Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

11





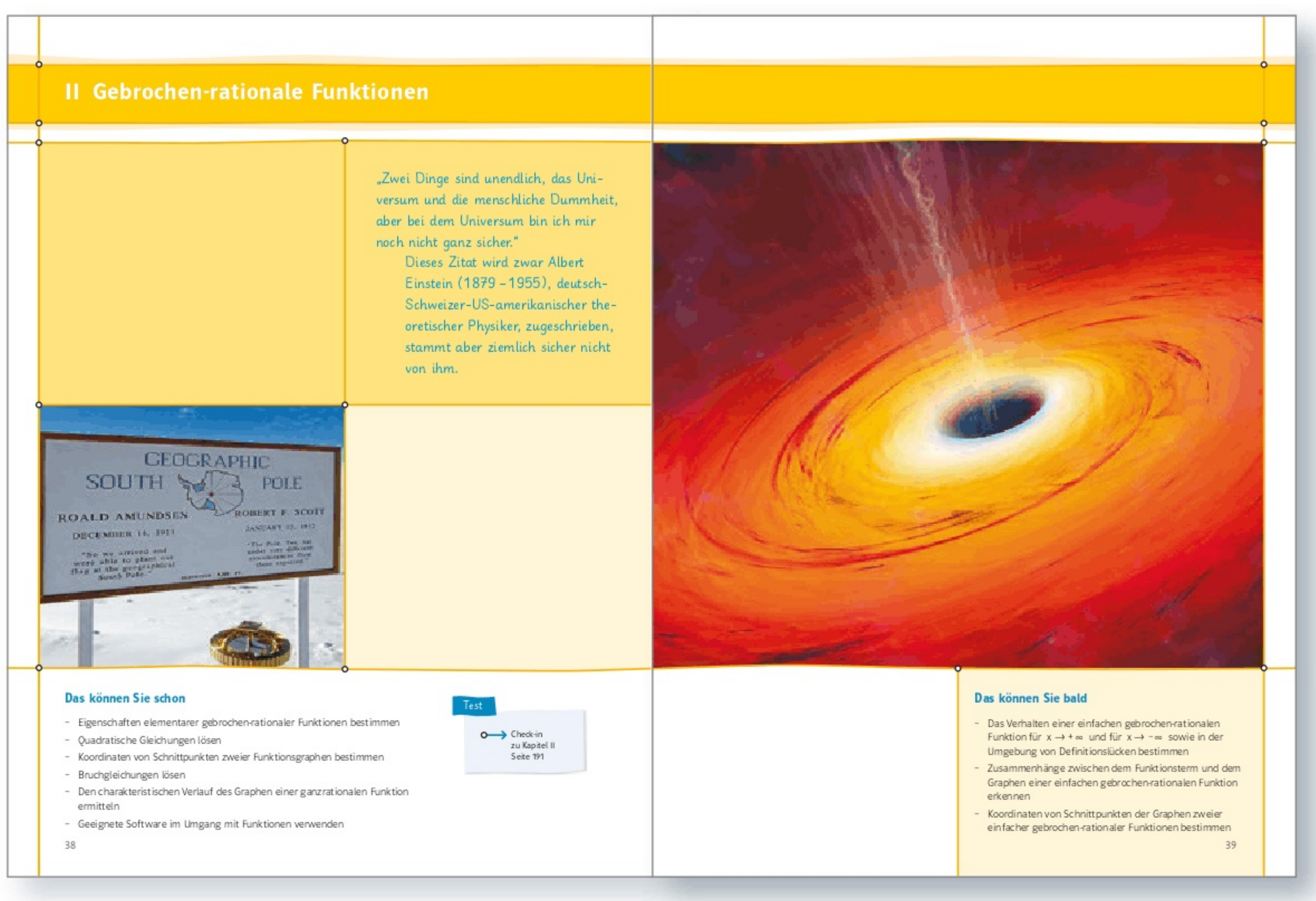
Bayern

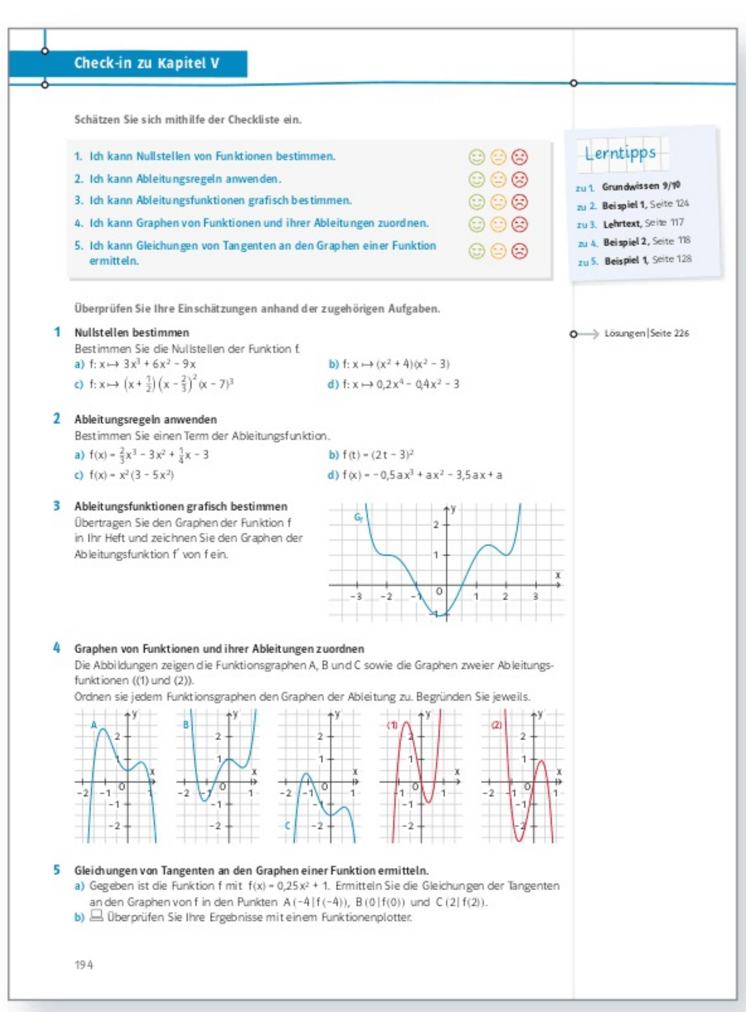
Klett

So lernen Sie mit dem Lambacher Schweizer

Start in ein neues Kapitel

Auf den Auftaktseiten finden Sie die wichtigsten Voraussetzungen für das neue Kapitel sowie die neuen Inhalte aufgelistet.

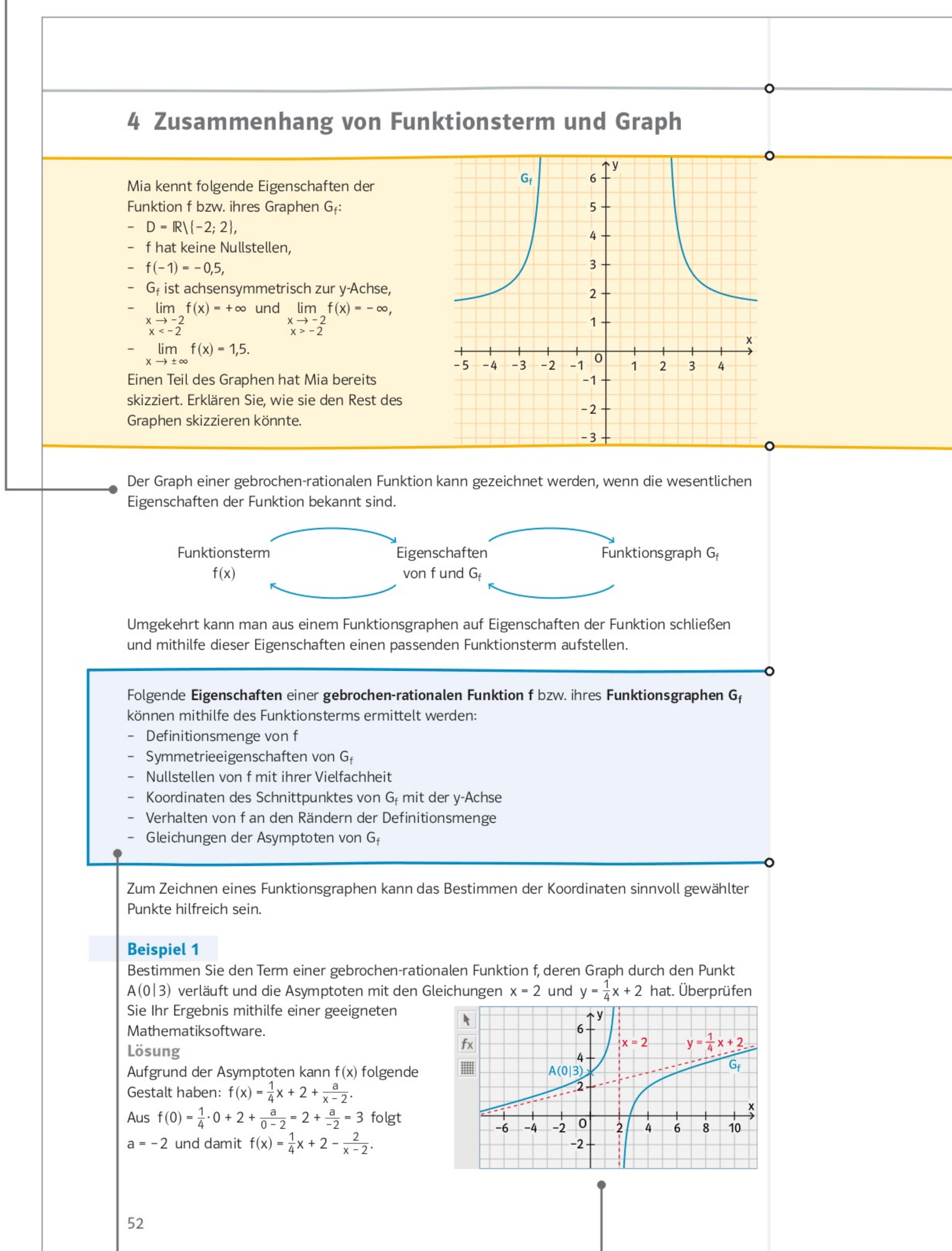




Check-in
Überprüfen Sie das Wissen, das Sie für den Einstieg in das neue Kapitel benötigen. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)

Verstehen und Üben

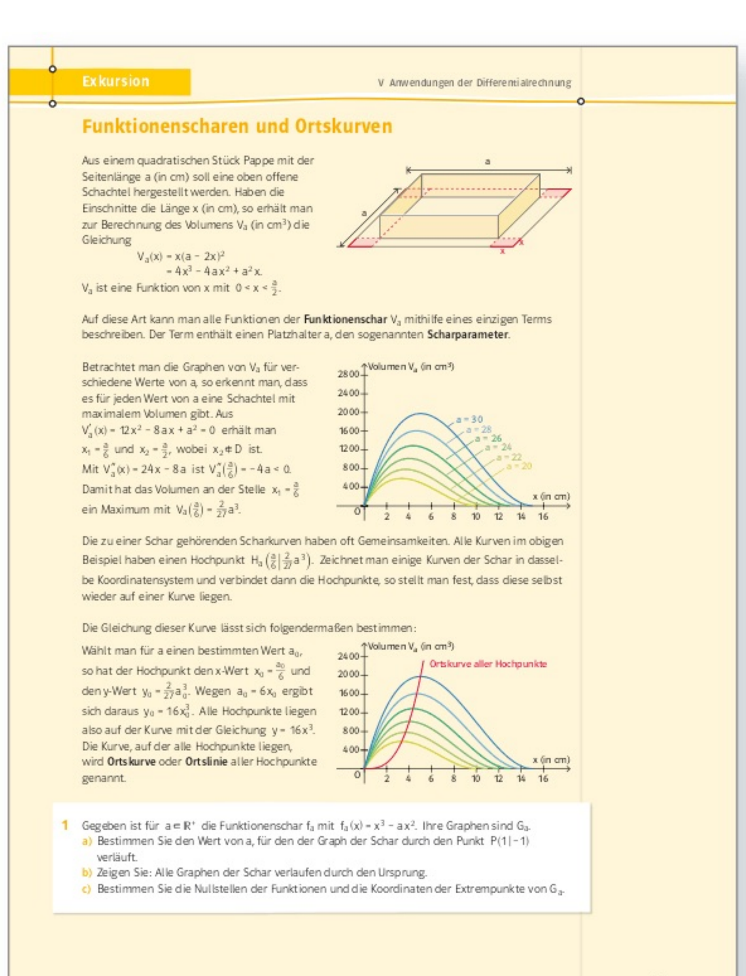
Der Lehrtext erläutert neue Inhalte und erklärt, wie der neue Stoff mit bereits Gelerntem zusammenhängt.



Im **Merkkasten** ist das Wichtigste zusammengefasst.

Hier finden Sie **Beispielaufgaben** und -lösungen.

Erkunden und Anwenden

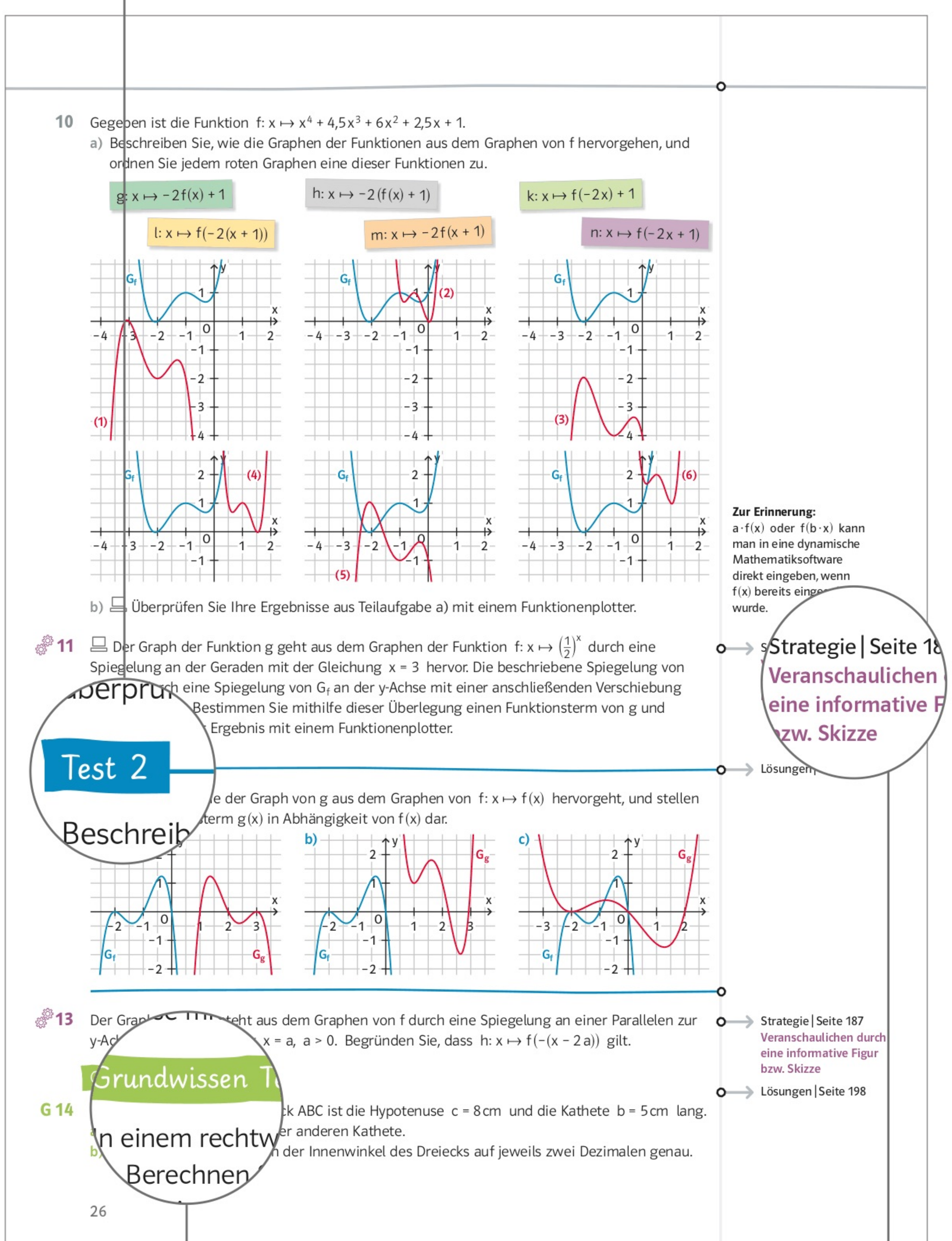


Exkursionen regen an, sich vertiefend mit spannenden Inhalten zu befassen.

Symbole

- Strategisch vorgehen
- Partnerarbeit
- Gruppenarbeit
- Internetrecherche oder Einsatz von Computer-Programmen
- Hilfsmittelfrei
  Mit diesem Symbol werden beispielhaft Aufgaben ausgezeichnet, die hierfür besonders gut geeignet sind.

Mit den **Test**-Aufgaben prüfen Sie, ob Sie den neuen Stoff verstanden haben. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)

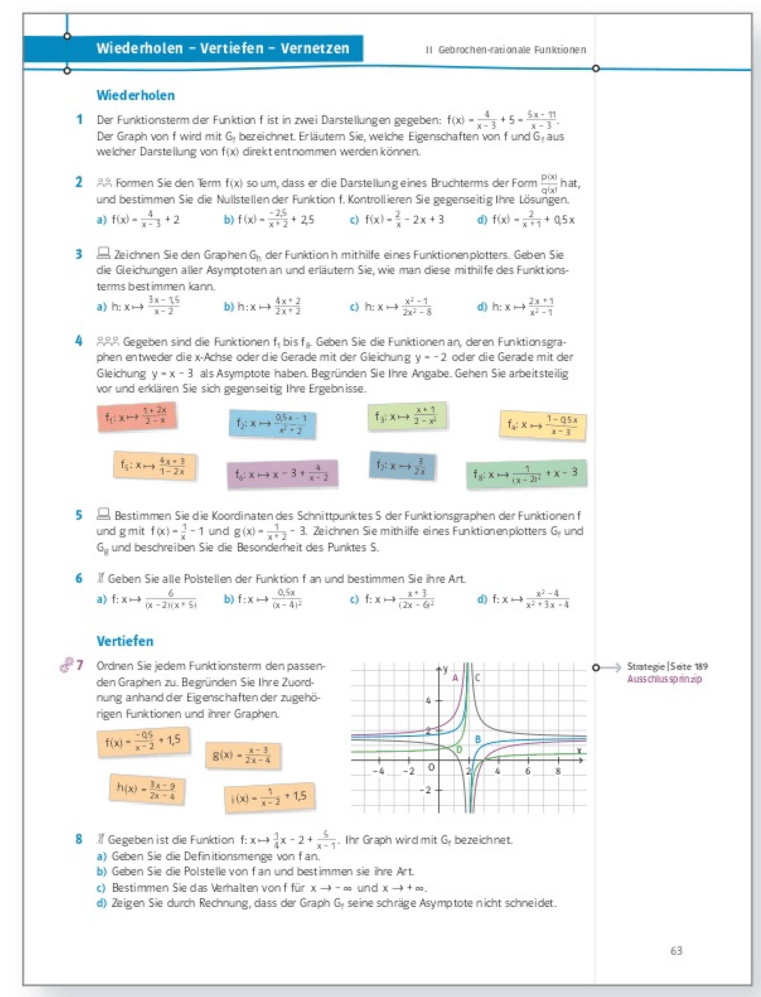


Prüfen Sie mit **Grundwissen Test**, ob der Stoff aus früheren Kapiteln oder Klassen noch sitzt. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)

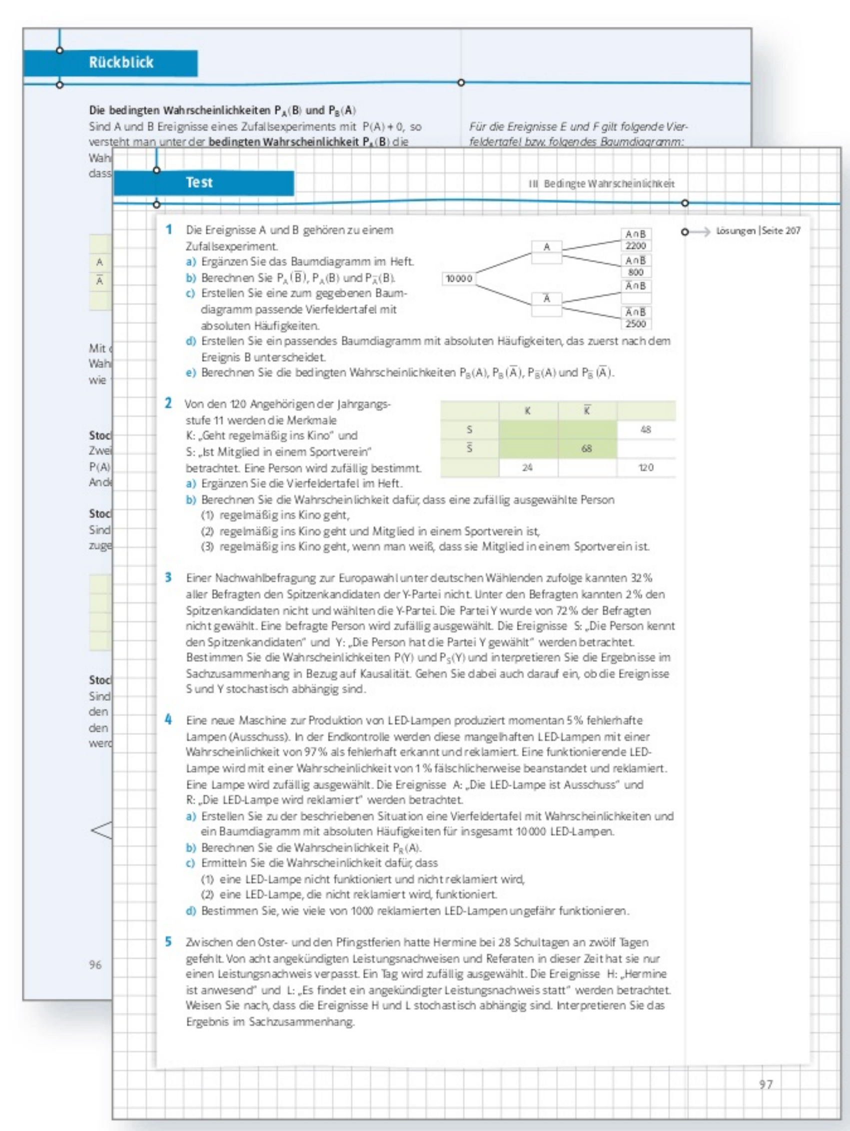
Differenzierung
Die Aufgaben sind in drei Blöcke geteilt. Im ersten sind Aufgaben, welche die grundlegende Basis sichern. Im zweiten Block finden Sie Aufgaben im mittleren und höheren Anforderungsniveau. Im dritten Block sind die Aufgaben zum Erforschen und Knobeln.

Dieser Hinweis zeigt Ihnen, dass diese Aufgabe mithilfe einer bestimmten **Strategie** gelöst werden kann.

Wiederholen und Überprüfen



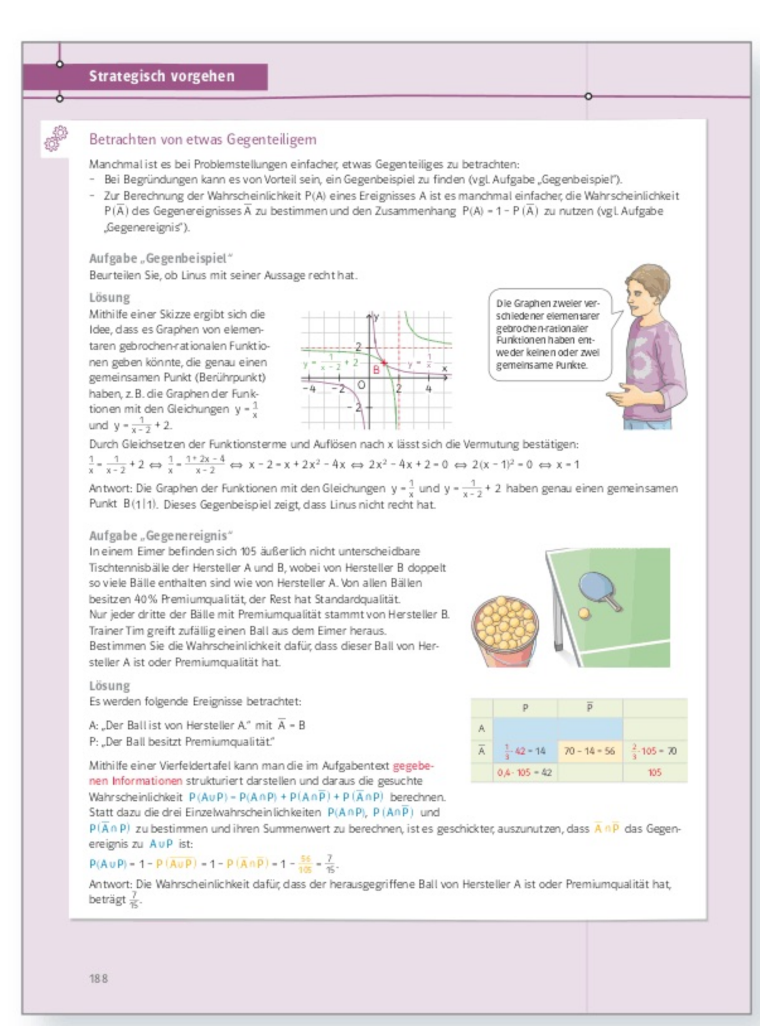
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen
Hier können Sie alle Inhalte des Kapitels wiederholen, vertiefen und mit anderen Inhalten vernetzen.



Rückblick
Zum schnellen Nachschlagen, was im Kapitel gemacht wurde.

Test
Am Ende des Kapitels können Sie Ihren Wissensstand selbstständig überprüfen. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)

Strategisch vorgehen



Auf den Seiten **Strategisch vorgehen** finden Sie Tipps, wie man Aufgaben, deren Lösungsweg nicht unmittelbar ersichtlich ist, lösen kann. Strategien und Hilfsmittel werden Ihnen anhand von Beispielen erläutert.

Zusatzmaterialien zu diesem Band für Schülerinnen und Schüler:
– Arbeitsheft Lambacher Schweizer 11 mit Mediensammlung (978-3-12-735015-9)
– Schulaufgabentrainer Lambacher Schweizer 11 (978-3-12-735019-7)
– Lösungen Lambacher Schweizer 11 (978-3-12-735013-5)

Dr. Theophil Lambacher (13.04.1899 – 14.12.1981) und **Wilhelm Schweizer** (11.11.1901 – 23.07.1990) lehrten beide Mathematik an der Schule. Theophil Lambacher wurde danach Oberschulamtspräsident und Ministerialrat am Kultusministerium, Wilhelm Schweizer arbeitete als Schulleiter, Fachleiter am Seminar und Dozent an der Universität. Der erste Band des Lambacher Schweizer erschien 1946: Lambacher Schweizer Mathematik für höhere Schulen, Mittelstufe 1. Teil enthielt auf 91 Seiten Algebra und Geometrie für die Klasse 7.

1. Auflage 1 6 5 4 3 2 | 2027 26 25 24 23

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.

Autorinnen und Autoren: Manfred Baum, Martin Bellstedt, Johannes Biburger, Boris Boor, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck (†), Jürgen Denker, Günther Dopfer, Prof. Rolf Dürr, Anke Frantzke, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Herbert Götz, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Manfred Herbst, Edmund Herd, Maren Herrmann, Carolin Herrmann, Prof. Detlef Hoche (†), Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Christine Kestler, Dr. Michael Kölle, Andreas König, Hans-Georg Kosuch, Prof. Dr. Detlef Lind, Dr. Johannes Novotný, Marion Rauscher, Rolf Reimer, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Rüdiger Sandmann, Prof. Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly (†), Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, Caroline Seibold, Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Jörg Stark, Andrea Stühler, Barbara Sy, Thomas Thiessen, Dr. Heike Tomaschek, Martin Weber, Prof. Dr. Ingo Weidig, Alexander Wollmann, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Gestaltung: Petra Michel, Amberg
Titelbilder: Gebäude: Getty Images (Moment/John Hemmingsen), München; Blüte: shutterstock.com (Alekcey), New York, NY
Satz: tiff.any GmbH, Berlin
Druck: Mohn Media Mohndruck GmbH, Gütersloh

Printed in Germany
ISBN 978-3-12-735010-4

9 783127 350104

Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

11

Bayern

erarbeitet von

Johannes Biburger
Anke Frantzke
Manfred Herbst
Christine Kestler
Caroline Seibold
Barbara Sy
Thomas Thiessen
Martin Weber

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig · Dortmund

Inhalt

I Spezielle Eigenschaften von Funktionen



II Gebrochen-rationale Funktionen



III Bedingte Wahrscheinlichkeit



IV Lokales und globales Differenzieren



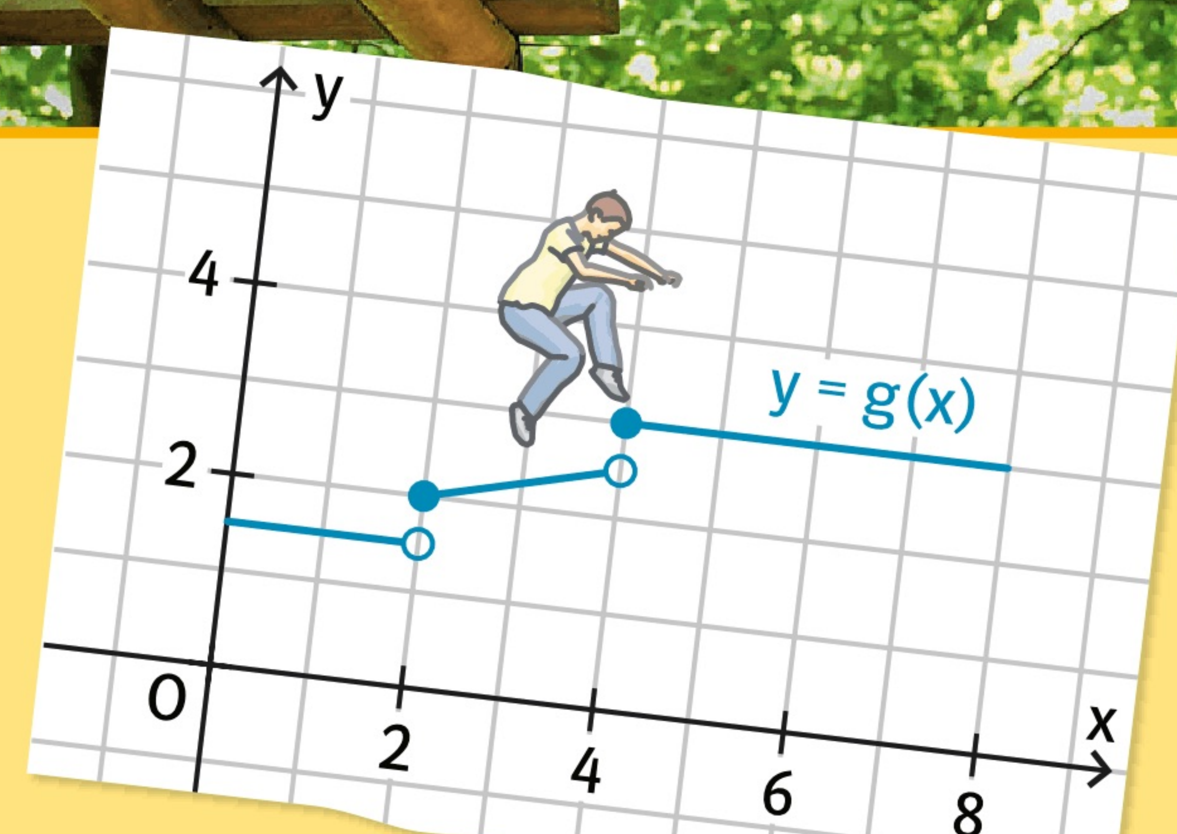


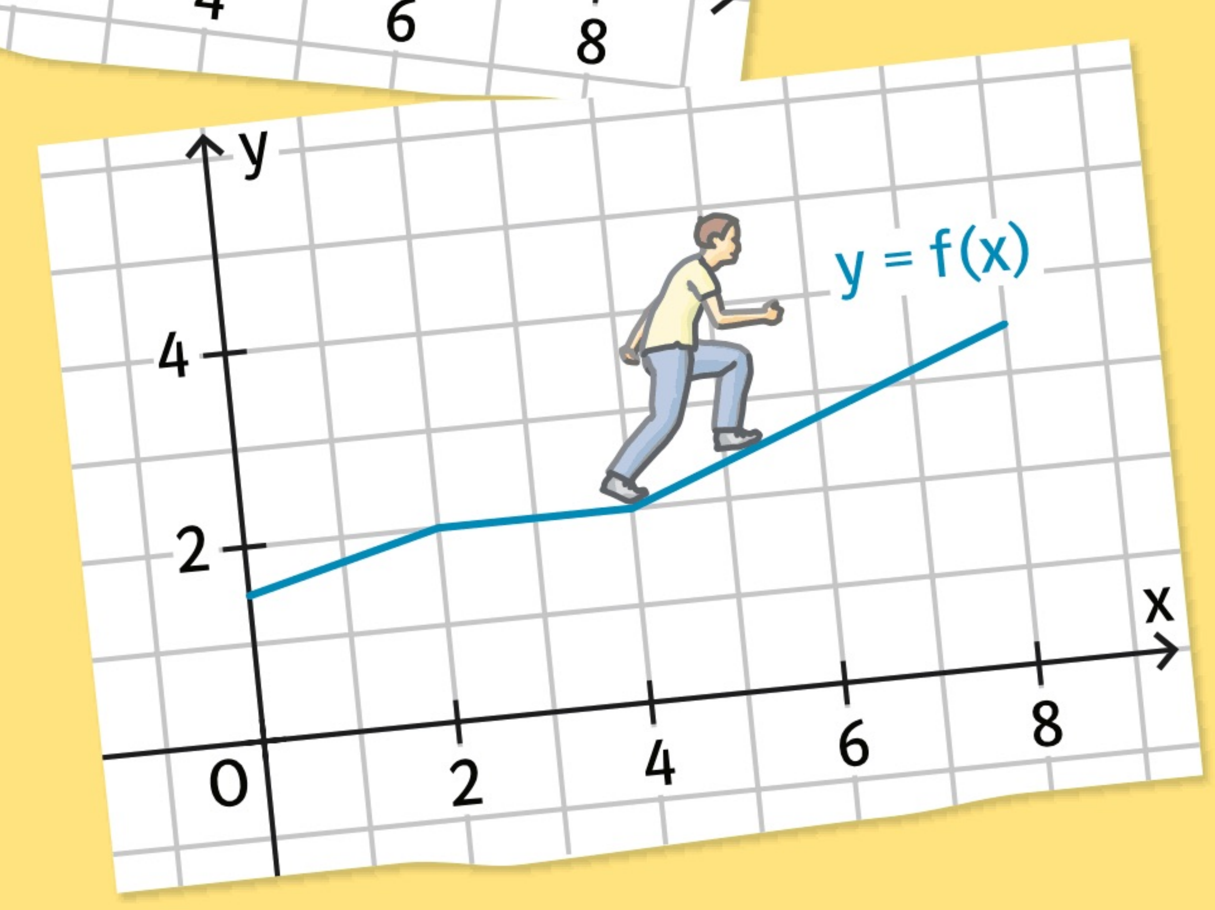
V Anwendungen der Differentialrechnung

I Spezielle Eigenschaften von Funktionen









Das können Sie schon

- Lineare und quadratische Funktionen aufstellen und zugehörige Graphen zeichnen
- Von einer gebrochen-rationalen Funktion der Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, einer Potenzfunktion mit $f(x) = a\,x^n$, einer ganzrationalen Funktion mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, einer Exponentialfunktion mit $f(x) = b\,a^x$ und einer Sinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ Eigenschaften angeben

Test

Check-in zu Kapitel I Seite 190



Das können Sie bald

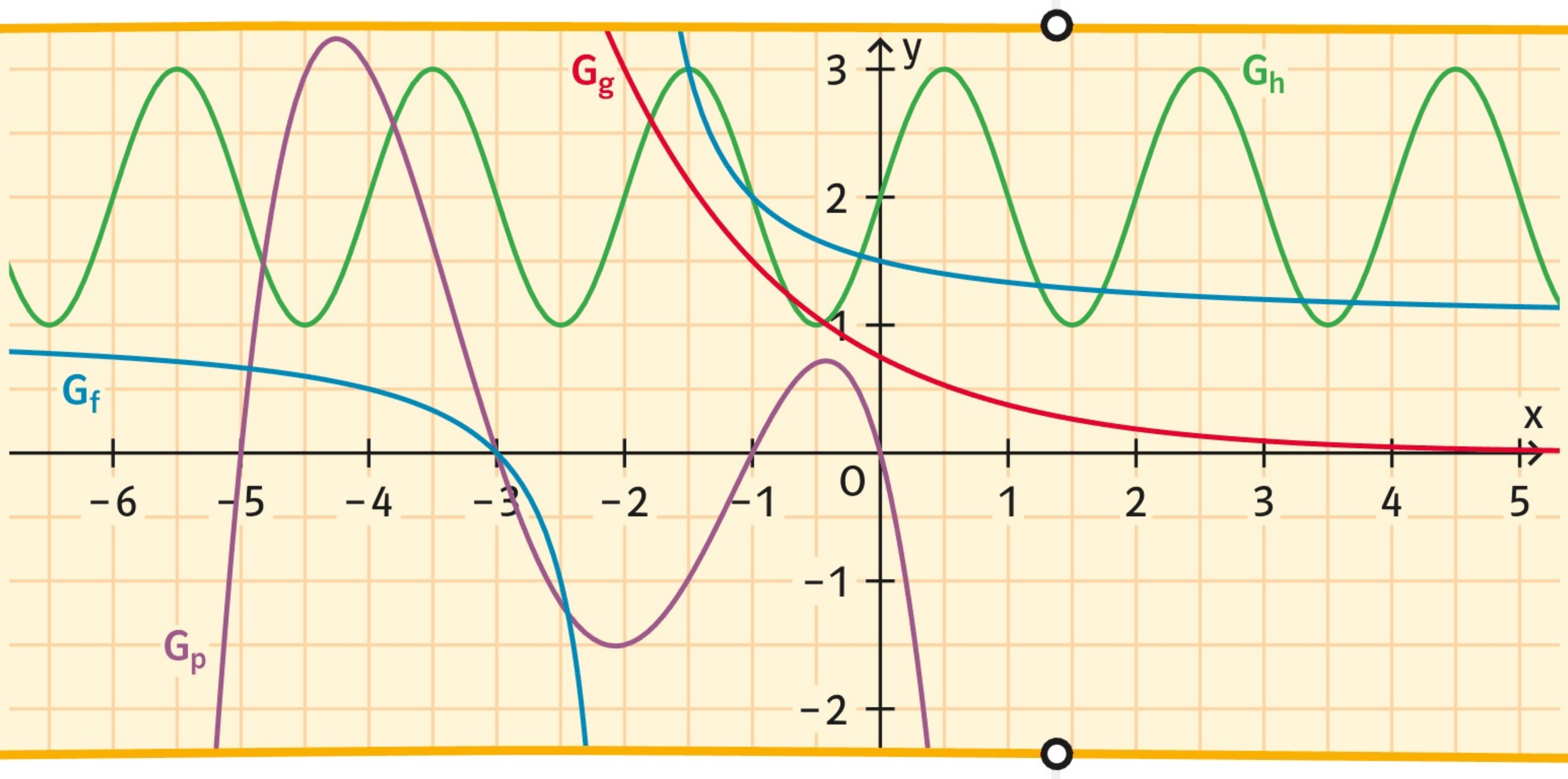
- Grenzwerte mittels eines Symbols schreiben
- Die Symmetrie von Funktionsgraphen rechnerisch nachweisen
- Verschiebung, Streckung und Spiegelung von Funktionsgraphen durch zugehörige Funktionsterme beschreiben
- Die Stetigkeit einer Funktion anschaulich beschreiben

1 Grenzwerte von Funktionen

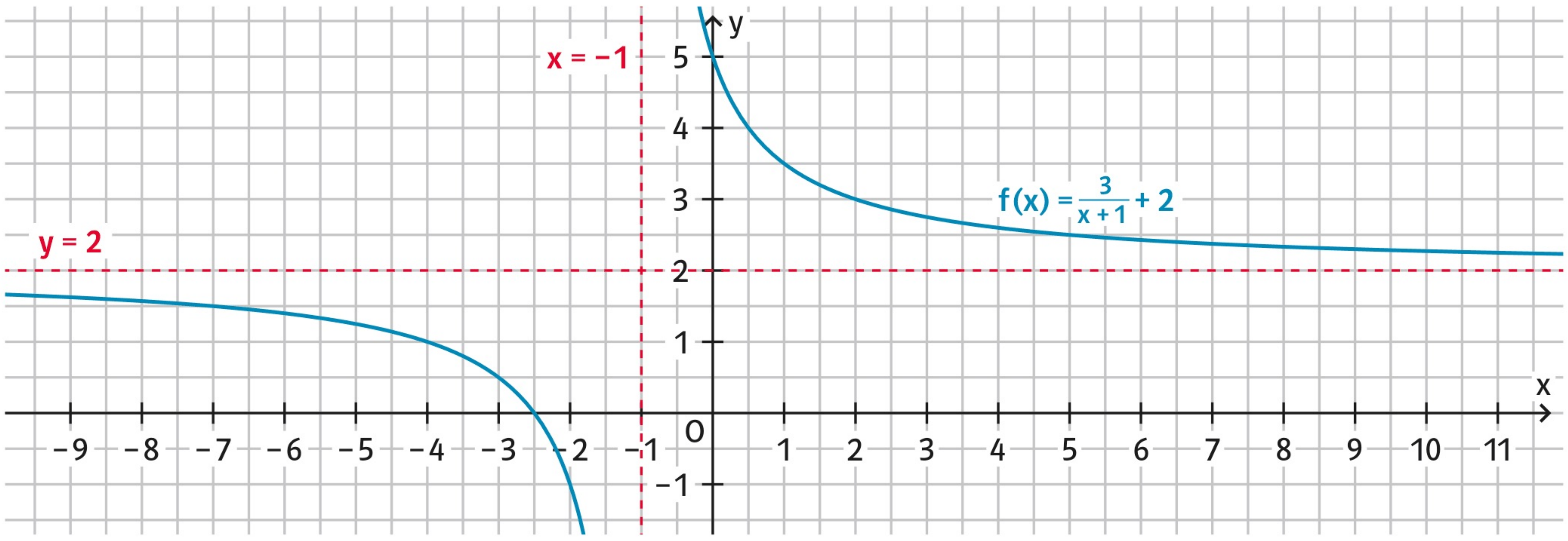
Die Graphen einer ganzrationalen, einer gebrochen-rationalen, einer trigonometrischen und einer Exponentialfunktion sind gegeben.

a) Ordnen Sie jedem Graphen einen der genannten Funktionstypen zu.

b) Beschreiben Sie für Funktionen jedes genannten Funktionstyps das Verhalten der Funktionswerte für betragsmäßig große x-Werte.



Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ besitzt eine senkrechte und eine waagerechte Asymptote. Ist der Funktionsterm beispielsweise $f(x) = \frac{3}{x+1} + 2$, so hat die zum Graphen gehörige senkrechte Asymptote die Gleichung $x = -1$ und die waagerechte Asymptote die Gleichung $y = 2$.



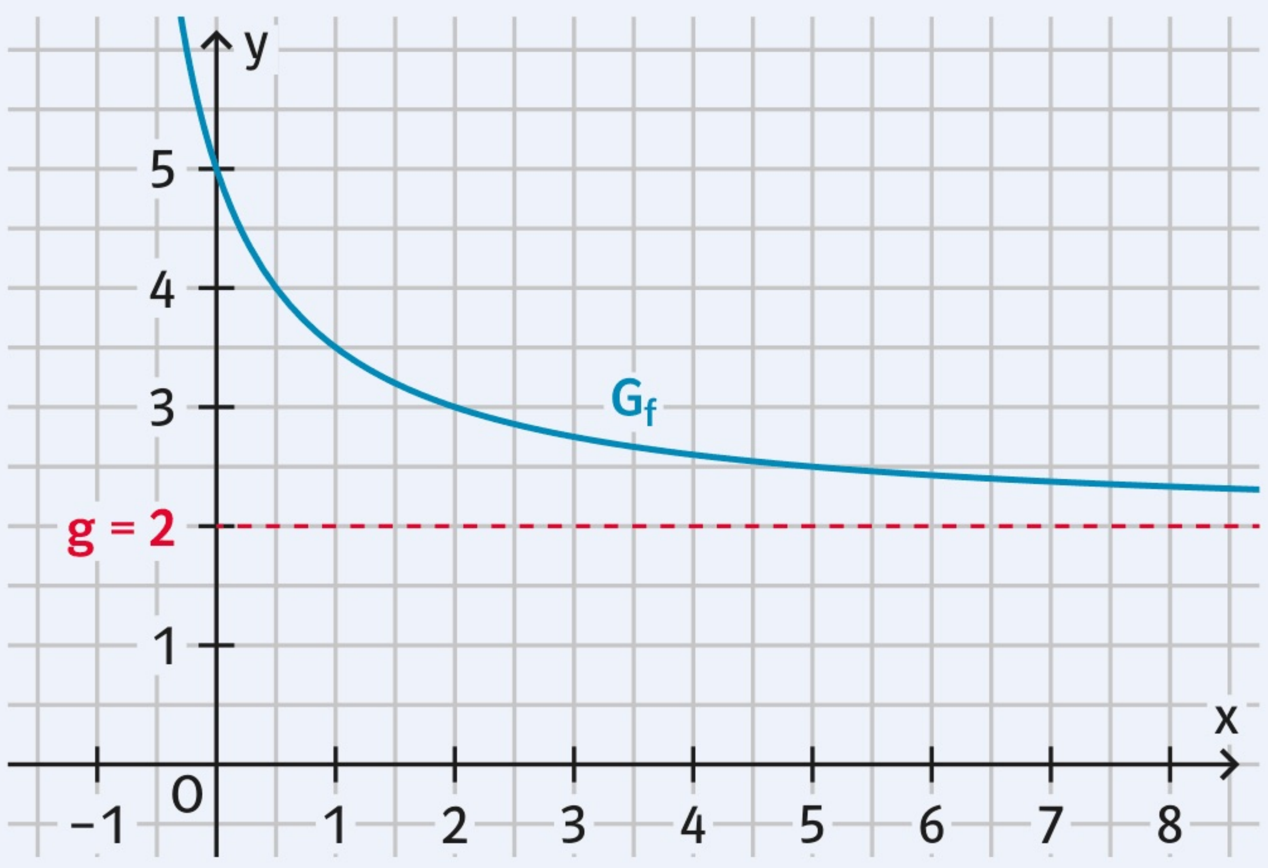
Für immer größer werdende x-Werte kommt der Graph der waagerechten Asymptote immer näher, das heißt, der Funktionswert f(x) nähert sich immer mehr dem Wert 2 an.
Rechnerisch lässt sich dies so begründen: Der Funktionsterm $\frac{3}{x+1} + 2$ besteht aus zwei Summanden. Für immer größer werdende x-Werte strebt der erste Summand $\frac{3}{x+1}$ gegen 0, während der zweite Summand 2 konstant ist. Insgesamt nähern sich damit die Funktionswerte für immer größer werdende x-Werte immer mehr der Zahl 2 an.

Die Zahl 2 nennt man deshalb den **Grenzwert** der Funktion f für x gegen plus unendlich und man schreibt dafür kurz $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x+1} + 2\right) = 2$.

Sprechweise: Limes von f(x) für x gegen plus unendlich.
Für die betrachtete Funktion f gilt zudem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{x+1} + 2\right) = 2$.

Kommen die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für beliebig groß werdende x-Werte einer Zahl g beliebig nahe, so heißt g **Grenzwert** von f für $x \to +\infty$.
Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$.

Entsprechend ist der Grenzwert einer Funktion für $x \to -\infty$ definiert.
Eine Funktion, die für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$ einen Grenzwert besitzt, bezeichnet man dort als **konvergent**.



Ist von einer Funktion die Definitionsmenge nicht angegeben, dann liegt die maximale Definitionsmenge vor. Statt Definitionsmenge sagt man auch Definitionsbereich.

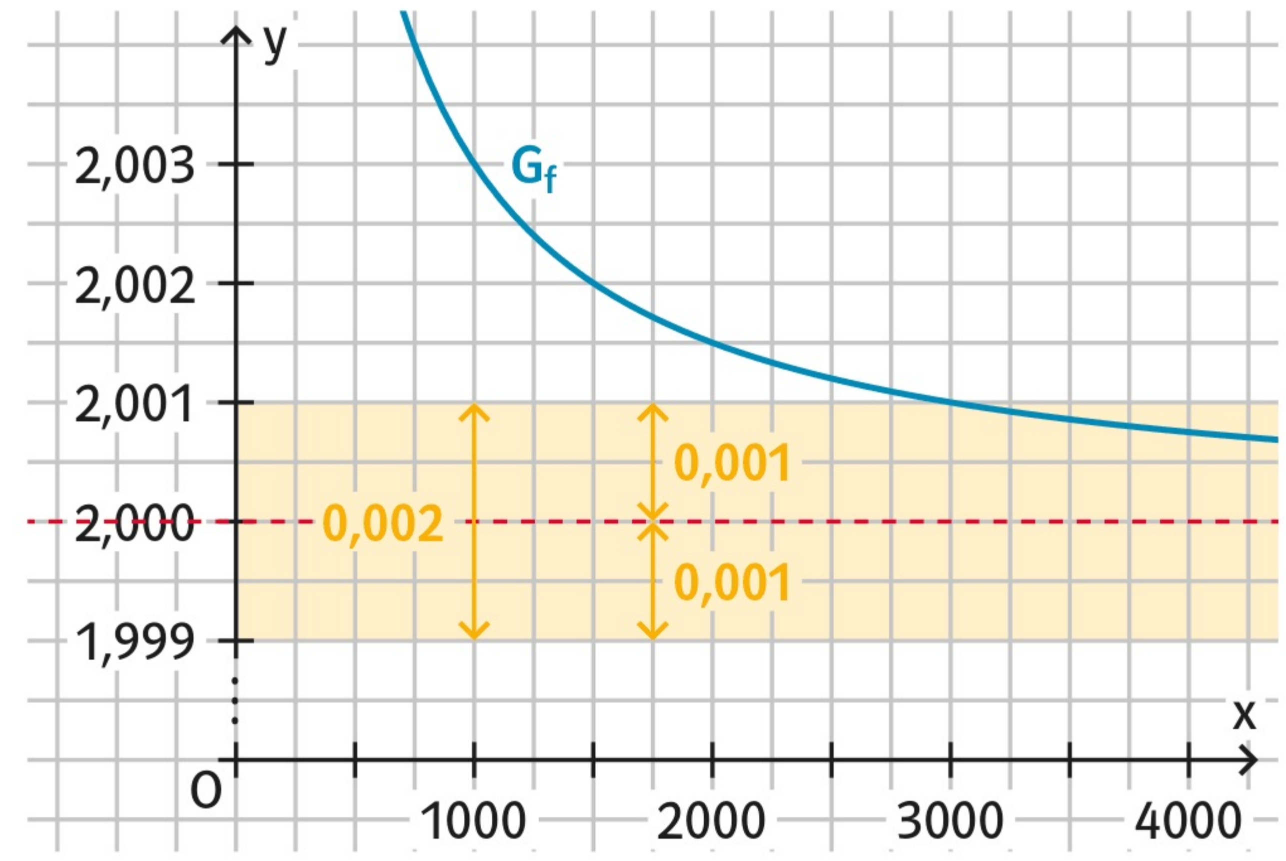
An Funktionsgraphen wird als Bezeichnung neben G_f auch f und gegebenenfalls f(x) verwendet, wenn der Funktionsterm bzw. die Zuordnungsvorschrift verdeutlicht werden soll.

limes (lat.): Grenze

convergere (lat.): zusammenlaufen

Bemerkungen zur Konvergenz:

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ hat für $x \to +\infty$ den Grenzwert 2.
Für $x > 3000$ unterscheiden sich die Funktionswerte f(x) von 2 um weniger als 0,001.
Für $x > 3000$ gilt somit $f(x) - 2 < 0{,}001$.
Lässt man als Abweichung von Funktionswert und Grenzwert nur 0,0001 zu, so muss man $x > 30\,000$ wählen. Für $x > 30\,000$ gilt somit $f(x) - 2 < 0{,}0001$.



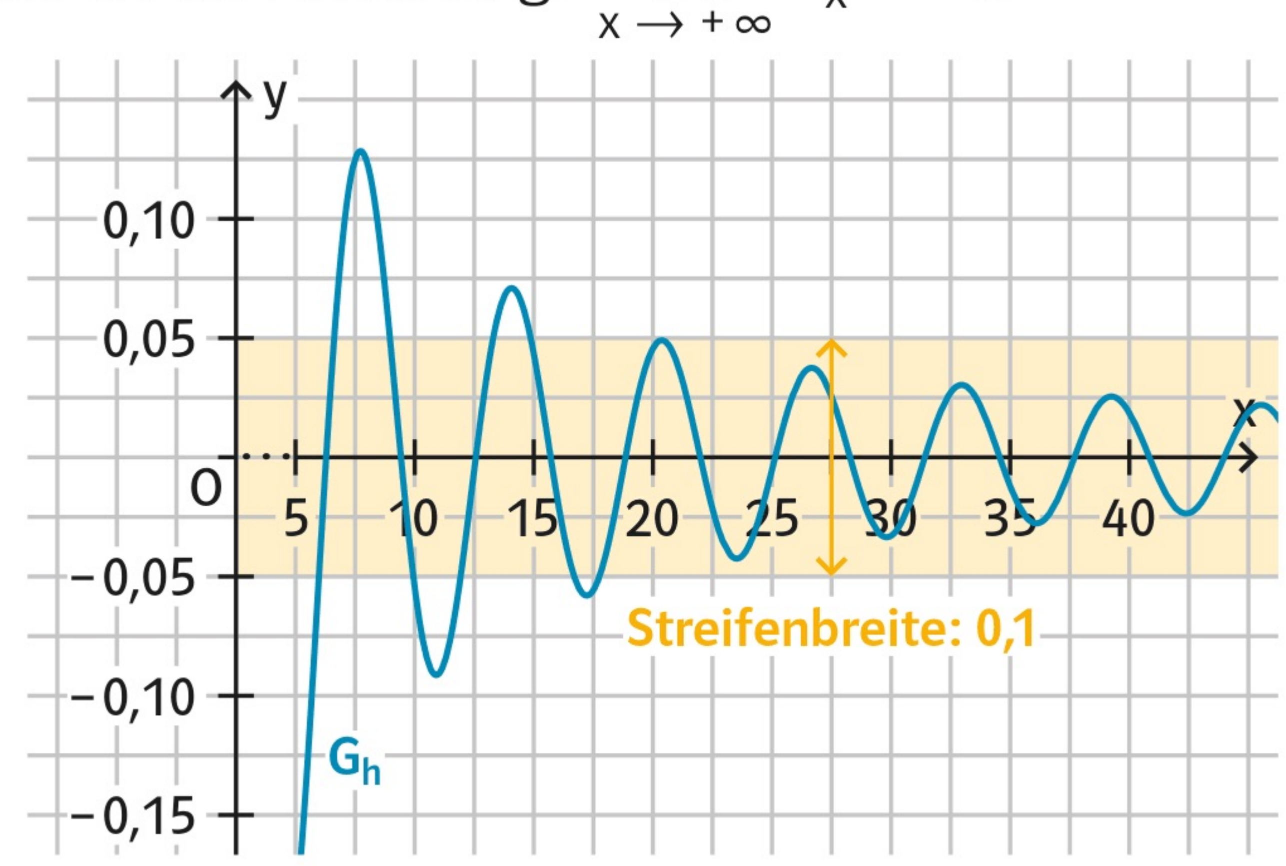
„Abweichungen" werden durch Differenzen zum Ausdruck gebracht.

Die Sprechweise „kommen die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für beliebig große x-Werte einer Zahl beliebig nahe" wird in der Mathematik präzisiert: Zu jeder vorgegeben Abweichung d (im obigen Beispiel 0,001 bzw. 0,0001) vom Grenzwert g gibt es einen x-Wert x_0 (im obigen Beispiel 3000 bzw. 30 000), sodass sich für alle $x > x_0$ die Funktionswerte f(x) von g um weniger als die vorgegebene Abweichung d unterscheiden. Der Graph von f verläuft somit ab der Stelle x_0 in einem Streifen, der symmetrisch zur Asymptote liegt und dessen Breite 2d durch die vorgegebene Abweichung d vom Grenzwert g vorgegeben ist.

Es ist möglich, dass sich der Graph nicht nur von einer Seite an seine waagerechte Asymptote annähert. Zeichnet man mit einem Funktionenplotter den Graphen der Funktion h mit $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, so erkennt man am Funktionsterm und an der Zeichnung: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

Zur Erinnerung:
$|\sin(x)| \leq 1$

Der Graph schwankt um die Asymptote mit der Gleichung $y = 0$. Die Schwankungsbreite wird dabei immer kleiner, sodass auch hier der Graph ab einem bestimmten x-Wert einen Streifen vorgegebener Breite nicht mehr verlässt. Beträgt die vorgegebene Streifenbreite 0,1, so sind von der x-Achse Abweichungen von 0,05 nach oben oder 0,05 nach unten möglich. Der Graph liegt dann ab etwa $x = 18$ nur noch im Streifen.

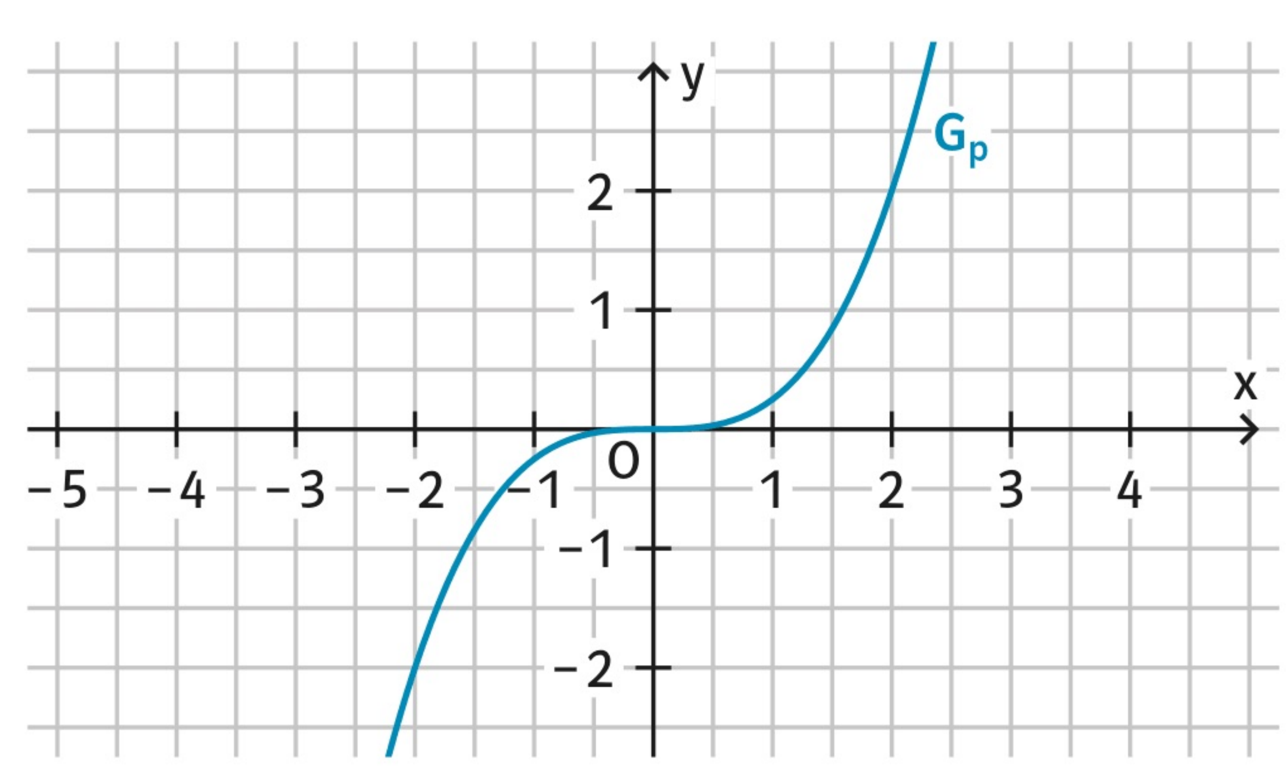


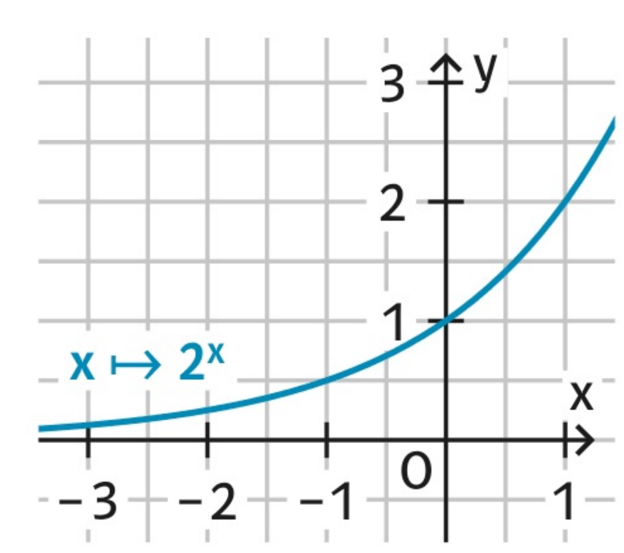
Divergenz

Es gibt Funktionen, die für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ keinen Grenzwert besitzen. Man sagt: Die Funktionen **divergieren** für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

divergere (lat.): auseinanderlaufen

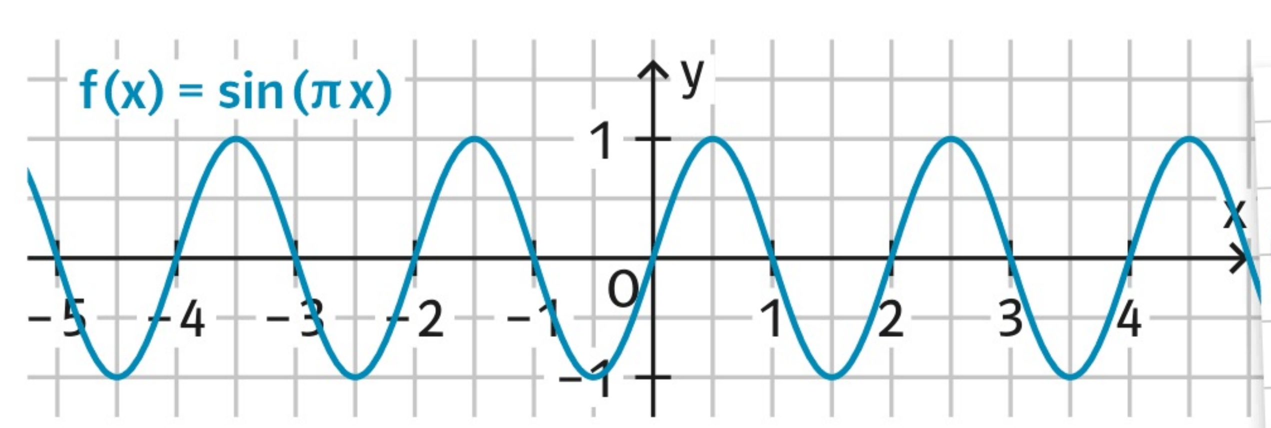
Bei Potenzfunktionen, wie zum Beispiel $p: x \mapsto 0{,}25 \cdot x^3$, werden die Funktionswerte für beliebig große bzw. beliebig kleine x-Werte betragsmäßig beliebig groß. Die Funktion hat keinen Grenzwert für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$. Auch wenn die Funktion für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ divergiert, verwendet man zur Beschreibung ihres Verhaltens die Schreibweisen $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$.





Konvergiert für $x \to -\infty$, divergiert für $x \to +\infty$.

Auch die Funktion $f: x \mapsto \sin(\pi x)$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Dabei werden die Funktionswerte allerdings nicht beliebig groß, sondern schwanken immer in der gleichen Weise.



Grenzwert existiert: konvergent.
Grenzwert existiert nicht: divergent.

Konvergenz und Divergenz für $x \to \pm\infty$ bei verschiedenen Funktionstypen

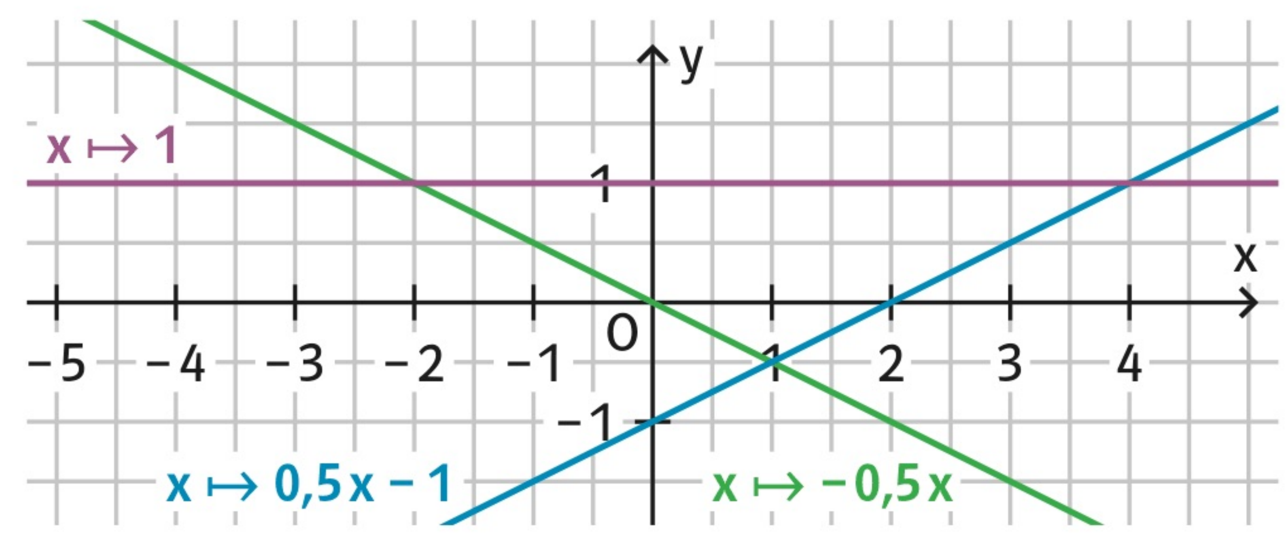
Ganzrationale Funktionen mit $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$.
Spezialfälle:

(1) Lineare Funktionen mit $x \mapsto mx + t$ divergieren, sofern $m \neq 0$ ist.

$m > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$m < 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$m = 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = t$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = t$.

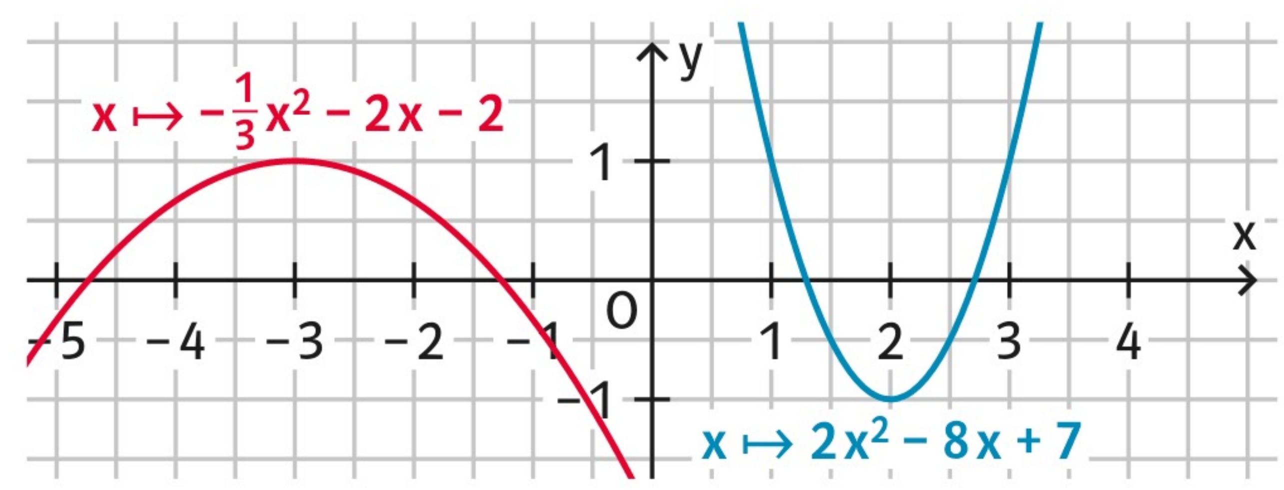


Monotonie:
Der Graph von f steigt bzw. fällt, wenn $m > 0$ bzw. $m < 0$ ist.

(2) Quadratische Funktionen mit $x \mapsto ax^2 + bx + c$ divergieren.

$a > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$a < 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



(3) Potenzfunktionen mit $x \mapsto ax^n$, $n > 0$, divergieren.

$a > 0$, n gerade: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

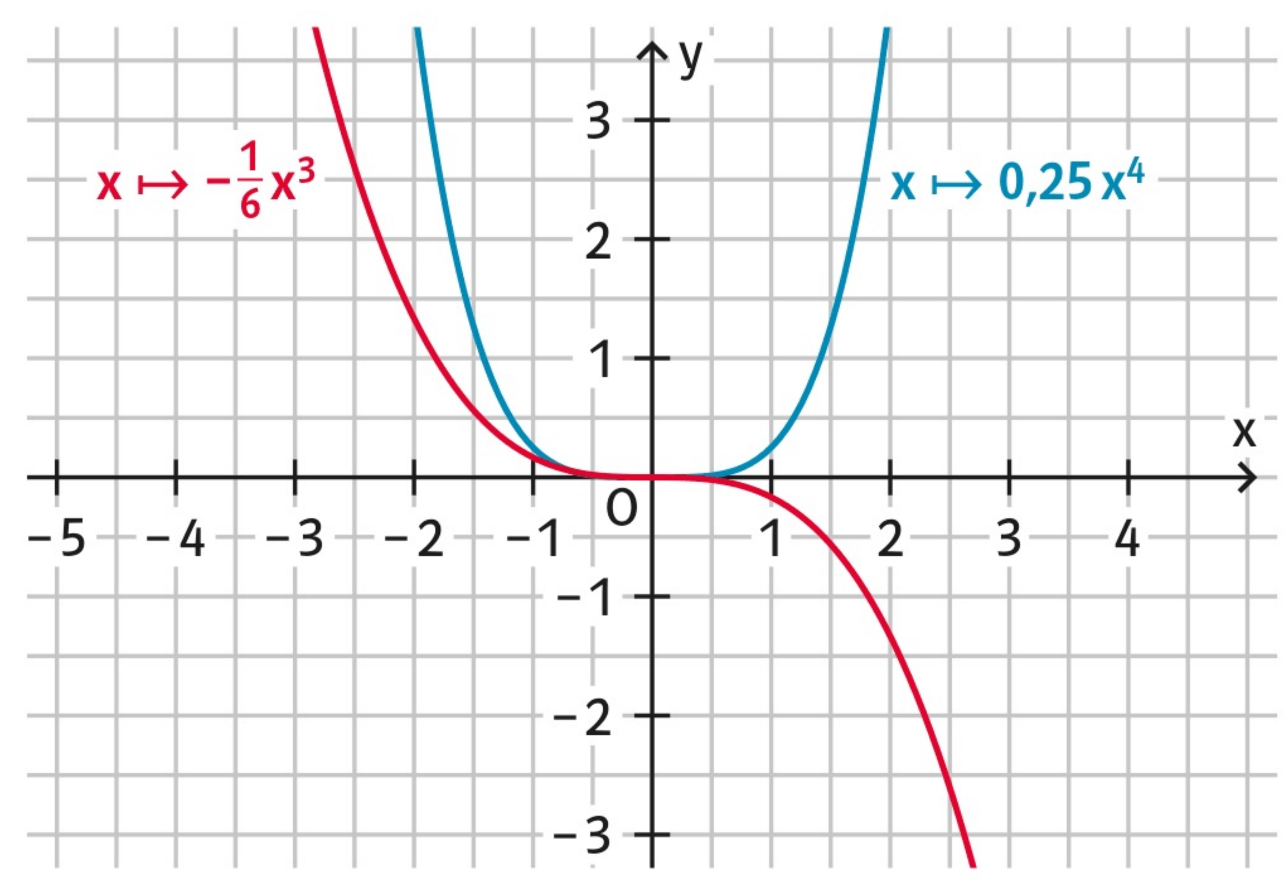
$a > 0$, n ungerade: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$a < 0$, n gerade: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

$a < 0$, n ungerade: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

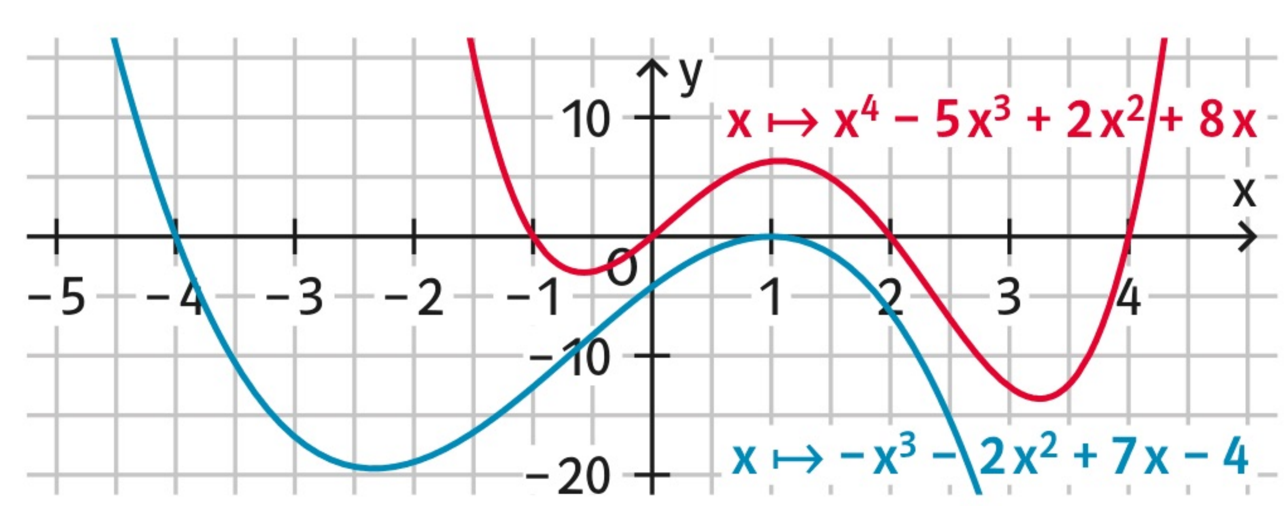
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



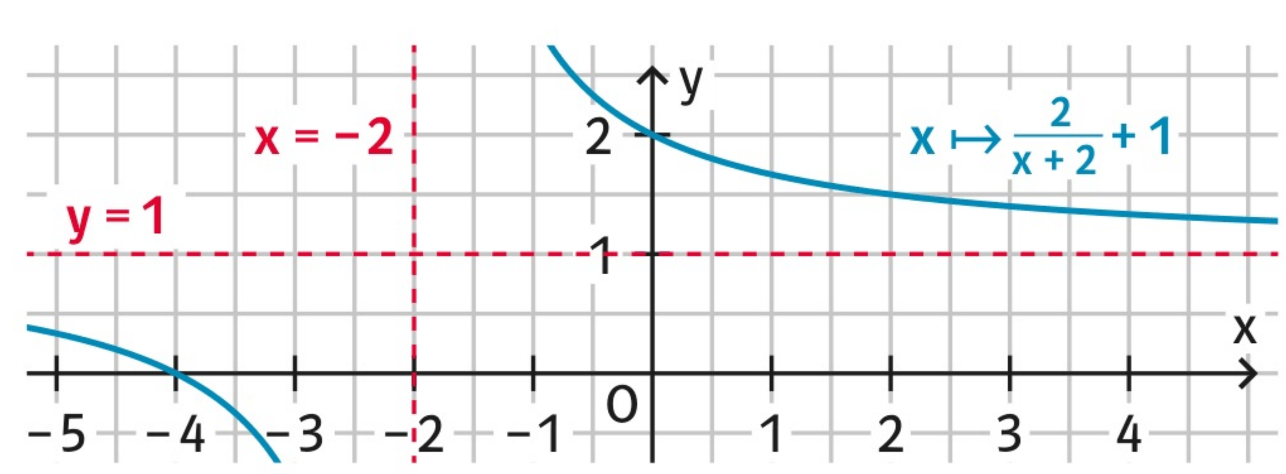
Wenn $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ gilt, dann schreibt man auch $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Monotonie:
Ist n ungerade, so gilt: Der Graph von f steigt bzw. fällt, wenn $a > 0$ bzw. $a < 0$ ist.

Ganzrationale Funktionen allgemein mit $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, divergieren für $n > 0$.
Das Grenzverhalten für $x \to \pm\infty$ hängt nur von a_n und n ab (vgl. Potenzfunktionen).



Gebrochen-rationale Funktionen der Form $x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, konvergieren.
Die waagerechte Asymptote des Graphen hat die Gleichung $y = c$.
Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$.

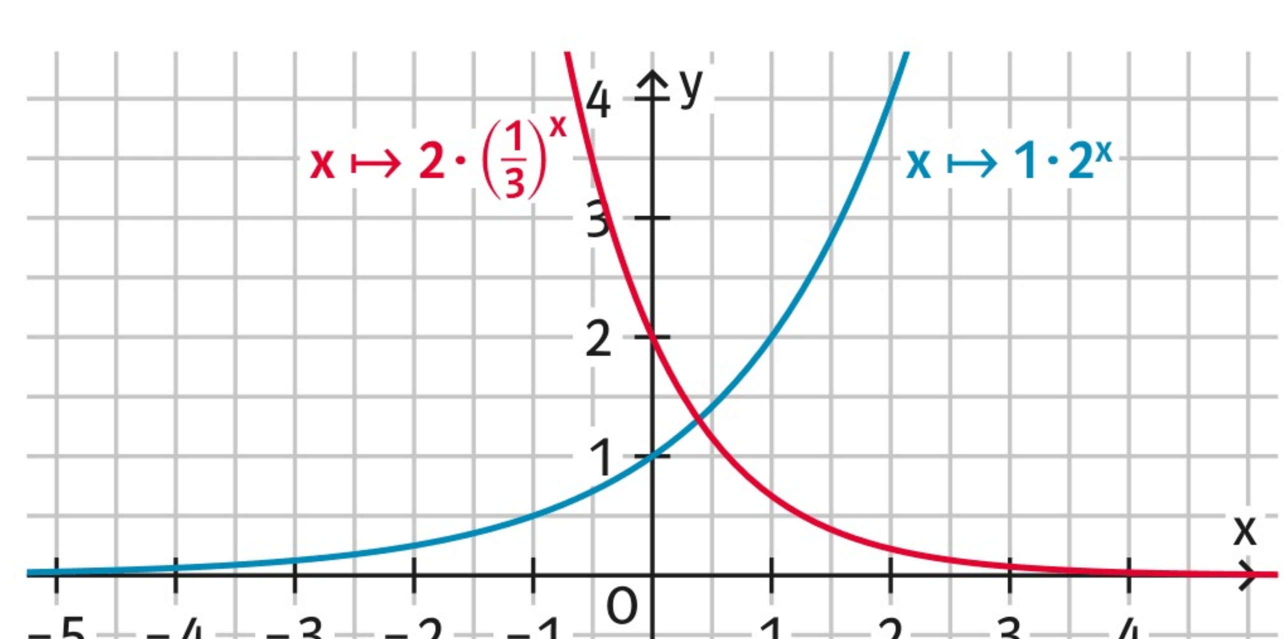


Monotonie:
Der Graph von f steigt bzw. fällt jeweils in den Intervallen $]-\infty; -b[$ und $]-b; +\infty[$, wenn $a < 0$ bzw. $a > 0$ ist.

Exponentialfunktionen mit $x \mapsto b a^x$, $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, konvergieren einseitig.
Die waagerechte Asymptote des Graphen hat die Gleichung $y = 0$.

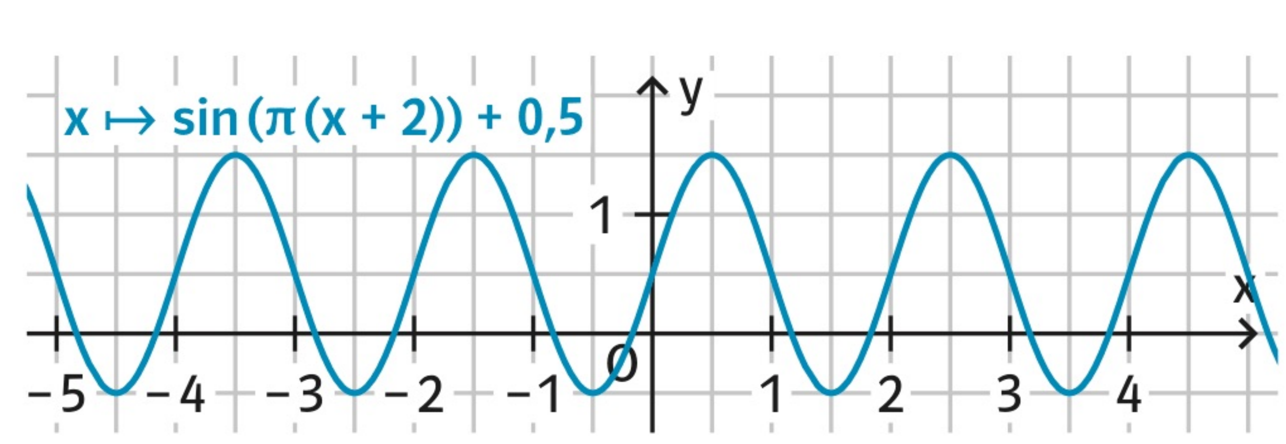
$a > 1$: $x \to -\infty$: Konvergenz, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
$x \to +\infty$: Divergenz.

$0 < a < 1$: $x \to +\infty$: Konvergenz, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
$x \to -\infty$: Divergenz.



Monotonie:
Ist $b > 0$, so gilt: Der Graph von f steigt bzw. fällt, wenn $a > 1$ bzw. $0 < a < 1$ ist.
Ist $b < 0$, so gilt: Der Graph von f fällt bzw. steigt, wenn $a > 1$ bzw. $0 < a < 1$ ist.

Trigonometrische Funktionen mit $x \mapsto a \cdot \sin(b(x + c)) + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$, divergieren.



Beispiel 1

Untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der waagerechten Asymptote des zugehörigen Graphen an.

a) $f: x \mapsto 2 \cdot \cos(x) + 1$ b) $g: x \mapsto \frac{4}{x-2} + 1$

c) $h: x \mapsto -2x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ d) $i: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot 2^x$

Lösung

a) Die Funktionswerte schwanken in ganz $\mathbb{R}$ zwischen -1 und 3. Es existiert kein Grenzwert, d.h., die Funktion divergiert für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

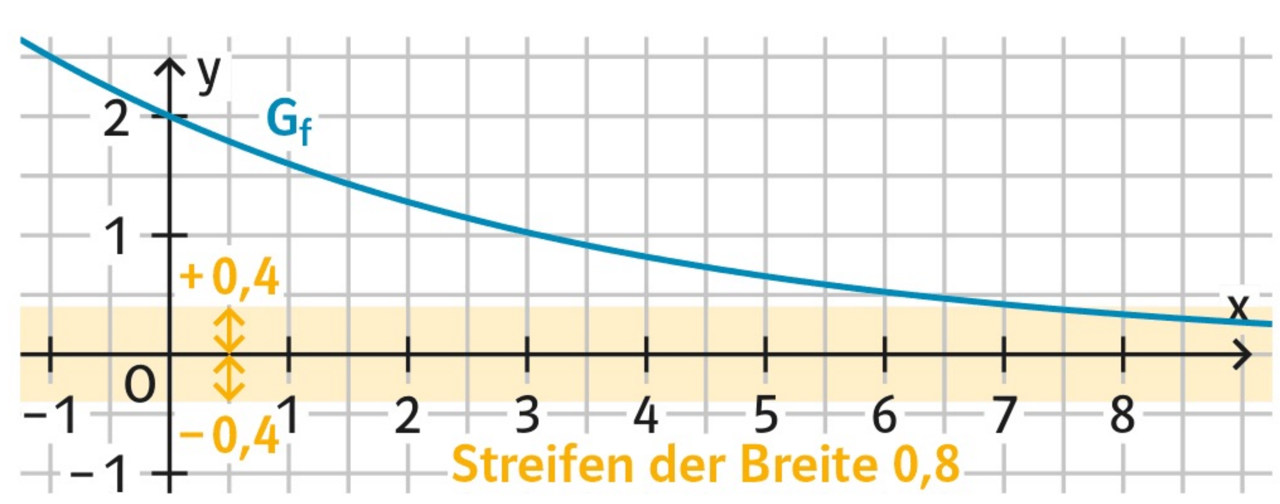
b) Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$, da der Wert des Bruchs $\frac{4}{x-2}$ für betragsmäßig immer größer werdende x-Werte gegen 0 geht. Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 1$.

c) Das Verhalten von $h(x)$ für $x \to \pm\infty$ gibt der Summand mit der höchsten vorkommenden Potenz, also $-2x^4$, an. Damit gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = -\infty$. Die Funktion divergiert für $x \to \pm\infty$.

d) Die Funktion konvergiert für $x \to -\infty$, da $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = 0$ ist, denn 2^x geht für $x \to -\infty$ gegen 0. Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 0$. Zudem gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = +\infty$, die Funktion divergiert für $x \to +\infty$.

Beispiel 2

Die Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot 0{,}8^x$ sowie ihr Graph G_f sind gegeben.



a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse und geben Sie das Monotonieverhalten von G_f an.

b) Geben Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ an.

c) Ein Streifen der Breite 0,8 hat die Asymptote von G_f als Symmetrieachse. Berechnen Sie den x-Wert, ab dem der Funktionsgraph den Streifen nicht mehr verlässt.

Lösung

a) Man setzt $x = 0$ in den Funktionsterm ein und erhält die y-Koordinate des Schnittpunktes. $f(0) = 2 \cdot 0{,}8^0 = 2 \cdot 1 = 2$. $S_y(0\,|\,2)$. G_f fällt.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2 \cdot 0{,}8^x) = 0$

c) $2 \cdot 0{,}8^x = 0{,}4 \Rightarrow 0{,}8^x = 0{,}2 \Rightarrow x = \log_{0{,}8}(0{,}2) \Rightarrow x \approx 7{,}21$
Da $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ist und G_f fällt, bleibt G_f für $x > \log_{0{,}8}(0{,}2) \approx 7{,}21$ innerhalb des Streifens.

Die Gleichung $2 \cdot 0{,}8^x = -0{,}4$ wird nicht untersucht, da $2 \cdot 0{,}8^x > 0$ ist.

Aufgaben

1 Skizzieren Sie den Graphen von f und beschreiben Sie sein Monotonieverhalten. Geben Sie, wenn möglich, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ an.

a) $f: x \mapsto \frac{2}{x}$ b) $f: x \mapsto \frac{-2}{x-3} + 1$ c) $f: x \mapsto 3^x$ d) $f: x \mapsto 2^{-x}$

e) $f: x \mapsto x^3$ f) $f: x \mapsto \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ g) $f: x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ h) $f: x \mapsto (-x)^2$

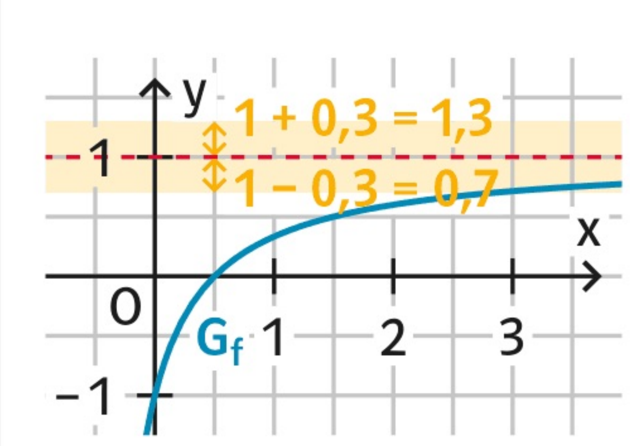
2 Geben Sie den Grenzwert der Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ sowie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen an. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f: x \mapsto \frac{2}{x-1}$ b) $g: x \mapsto \frac{2}{x-1} + 2$ c) $h: x \mapsto \frac{-2}{x+2} + 1$ d) $i: x \mapsto \frac{3}{x+1} - 2$

3 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-1}{x+0{,}5} + 1$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

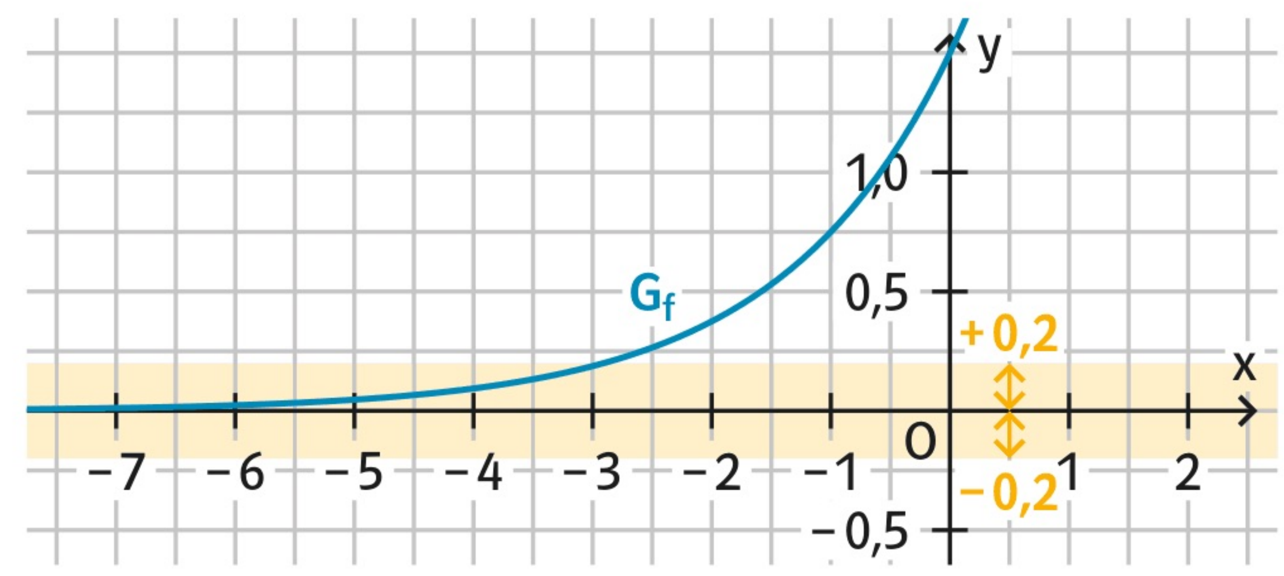
a) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.

b) Ein Streifen der Breite 0,6 hat die waagerechte Asymptote von G_f als Symmetrieachse. Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der Graph der Funktion an der Stelle
(1) $x = 2$ außerhalb des Streifens liegt, (2) $x = 3$ innerhalb des Streifens liegt.



4 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion $f: x \mapsto 0{,}5(x+2)^2(x^2-1)$ mit den Koordinatenachsen. Skizzieren Sie den Graphen und geben Sie das Verhalten der Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

5 Die Funktion $f: x \mapsto 1{,}5 \cdot 2^x$ hat für $x \to -\infty$ den Grenzwert 0. Ein Streifen der Breite 0,4 hat die Asymptote von G_f als Symmetrieachse. Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Graph der Funktion an der Stelle
a) $x = -2$ außerhalb des Streifens liegt,
b) $x = -3$ innerhalb des Streifens liegt.



In der Zeichnung sind die x- und y-Achse unterschiedlich skaliert.

6 Erläutern Sie sich gegenseitig den Unterschied der Funktionstypen Potenz- und Exponentialfunktion. Geben Sie dabei die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen mit den Koordinatenachsen an und skizzieren Sie jeweils den Graphen eines Vertreters der beiden Funktionstypen. Geben Sie eventuell vorhandene Grenzwerte an.

Test 1

Lösungen | Seite 195

7 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{x+2} - 1$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge und das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ an. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie G_f.
b) Ein Streifen der Breite 0,1 hat die waagerechte Asymptote des Graphen von f als Symmetrieachse. Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der Graph der Funktion an der Stelle
(1) $x = 10$ außerhalb des Streifens liegt, (2) $x = 100$ innerhalb des Streifens liegt.

8 Geben Sie die Terme dreier Funktionen unterschiedlichen Typs an, die für $x \to +\infty$ keinen Grenzwert besitzen.

9 Geben Sie einen Term und die Definitionsmenge einer Funktion mit den Eigenschaften an und zeichnen Sie ihren Graphen mit einem Funktionenplotter.
a) Die Funktion konvergiert für $x \to +\infty$ gegen 0 und divergiert für $x \to -\infty$.
b) Die Funktion konvergiert für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen -1.
c) Die Funktion konvergiert für $x \to -\infty$ gegen 0 und divergiert für $x \to +\infty$.

10 Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = 0$ gilt.

11 Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion f der Form $x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$ hat eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = c$. Ein Streifen mit der Breite 0,01 hat diese Asymptote als Symmetrieachse. Erläutern Sie, dass es Stellen x_0 und x_1 gibt, sodass der Graph für $x > x_0$ und für $x < x_1$ im Streifen verläuft.

12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{5}{x+3} - 4$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
a) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten und das Monotonieverhalten von G_f an.
b) Ein Streifen der Breite 0,1 hat die waagerechte Asymptote als Symmetrieachse.
(1) Berechnen Sie den kleinsten x-Wert x_0, sodass G_f für x-Werte größer x_0 im Streifen bleibt.
(2) Berechnen Sie den größten x-Wert x_1, sodass G_f für x-Werte kleiner x_1 im Streifen bleibt.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

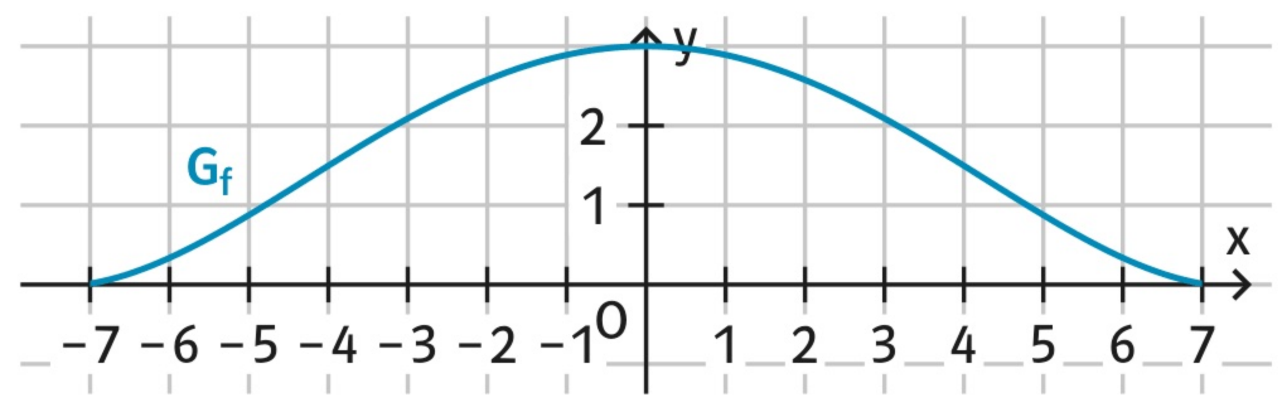
13 Beurteilen Sie folgende Aussage: „Liegt ein Funktionsgraph immer unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ und steigt in ganz $\mathbb{R}^+$, dann ist der Grenzwert für $x \to +\infty$ gleich 1."

14 a) Geben Sie Terme zweier Funktionen unterschiedlichen Typs an, die jeweils den Grenzwert 1 für $x \to +\infty$ besitzen. Bestimmen Sie jeweils das Verhalten der Funktionen für $x \to -\infty$.

b) Geben Sie einen Term einer Funktion an, die für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ divergiert und nur positive Funktionswerte besitzt. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse gegenseitig.

c) Geben Sie jeweils einen Term einer Funktion f an, für die $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ gilt und die zwei (eine, keine) Nullstellen besitzt. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse gegenseitig.

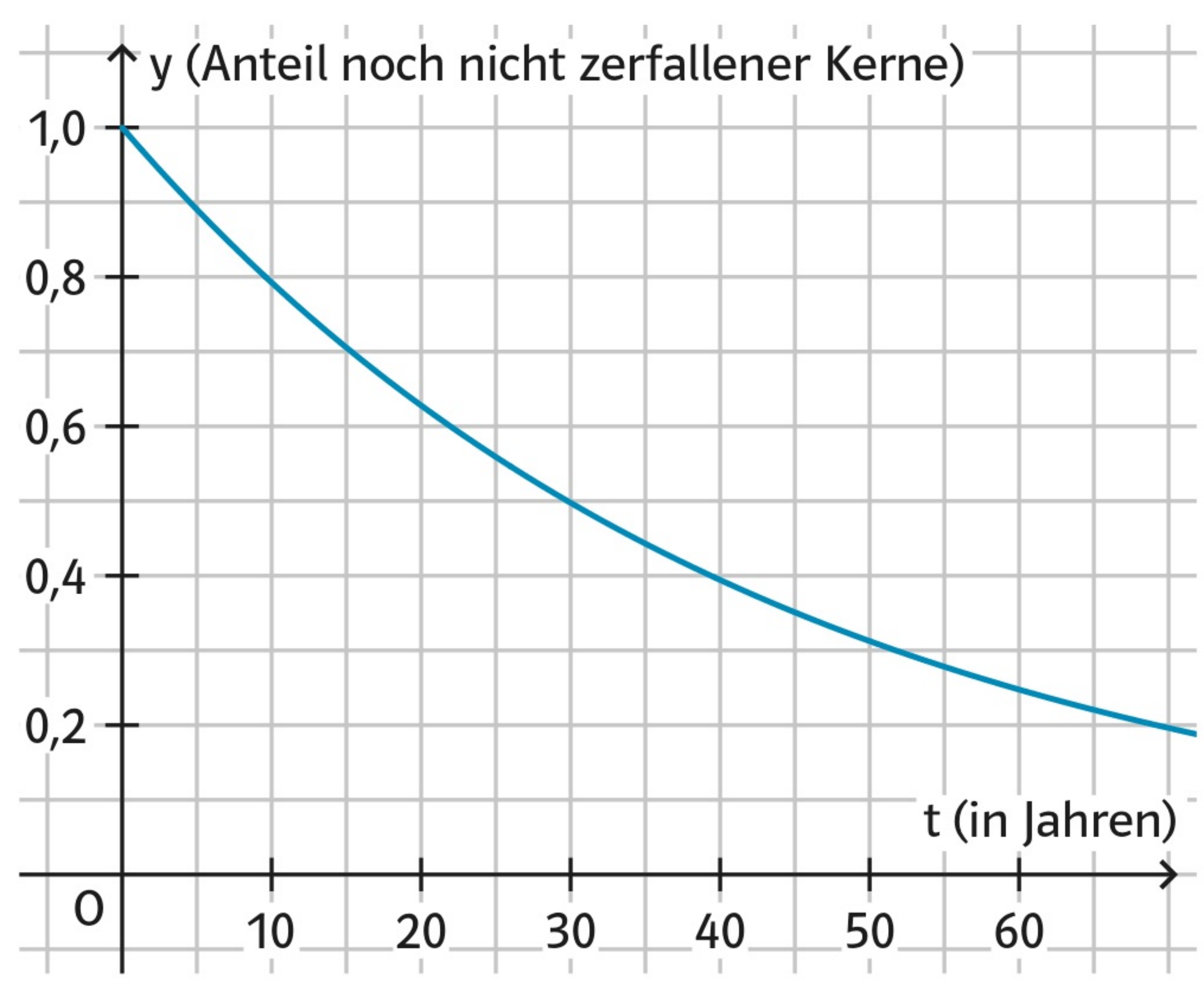
15 Nael sagt: „Am Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto 0{,}001x^4 - 0{,}11x^2 + 3$ erkennt man, dass der Grenzwert im Unendlichen 0 ist." Beurteilen Sie die Aussage.



16 Das Diagramm zeigt die Zerfallskurve von Cäsium-137, das unter anderem bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl 1986 freigesetzt wurde.

a) Stellen Sie mithilfe des Diagramms den Term einer Exponentialfunktion f auf, die den Anteil noch nicht zerfallener Kerne in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt. Geben Sie $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ an.

b) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Anteil noch nicht zerfallener Kerne 1‰ beträgt.





Havarierter Reaktor in Tschernobyl

Test 2

Lösungen | Seite 195

17 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{2} \cdot 3^x$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. Ein Streifen der Breite 0,02 hat die waagerechte Asymptote von G_f als Symmetrieachse.

a) Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f an und berechnen Sie den größtmöglichen x-Wert x_0, sodass G_f für $x < x_0$ innerhalb des Streifens verläuft.

b) Untersuchen Sie, ob eine Verdopplung des Wertes von x_0 aus Teilaufgabe a) genügt, damit G_f für $x < 2 \cdot x_0$ in einem Streifen mit halber Breite verläuft.

18 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \cos(x)$.

a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f an.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

c) Zeichnen Sie die Graphen von f und der Funktion $g\colon x \mapsto \frac{1}{x}$ mithilfe eines Funktionenplotters. Beschreiben Sie, wie sich der Verlauf der Kosinuskurve durch den Vorfaktor $\frac{1}{x}$ für positive x-Werte verändert.

d) Geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an.

e) Geben Sie einen positiven x-Wert an, ab dem alle Funktionswerte um weniger als 0,01 vom Grenzwert abweichen.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $h\colon x \mapsto \frac{1}{x} + \cos(x)$ und untersuchen Sie, ob h einen Grenzwert für $x \to +\infty$ besitzt.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 195

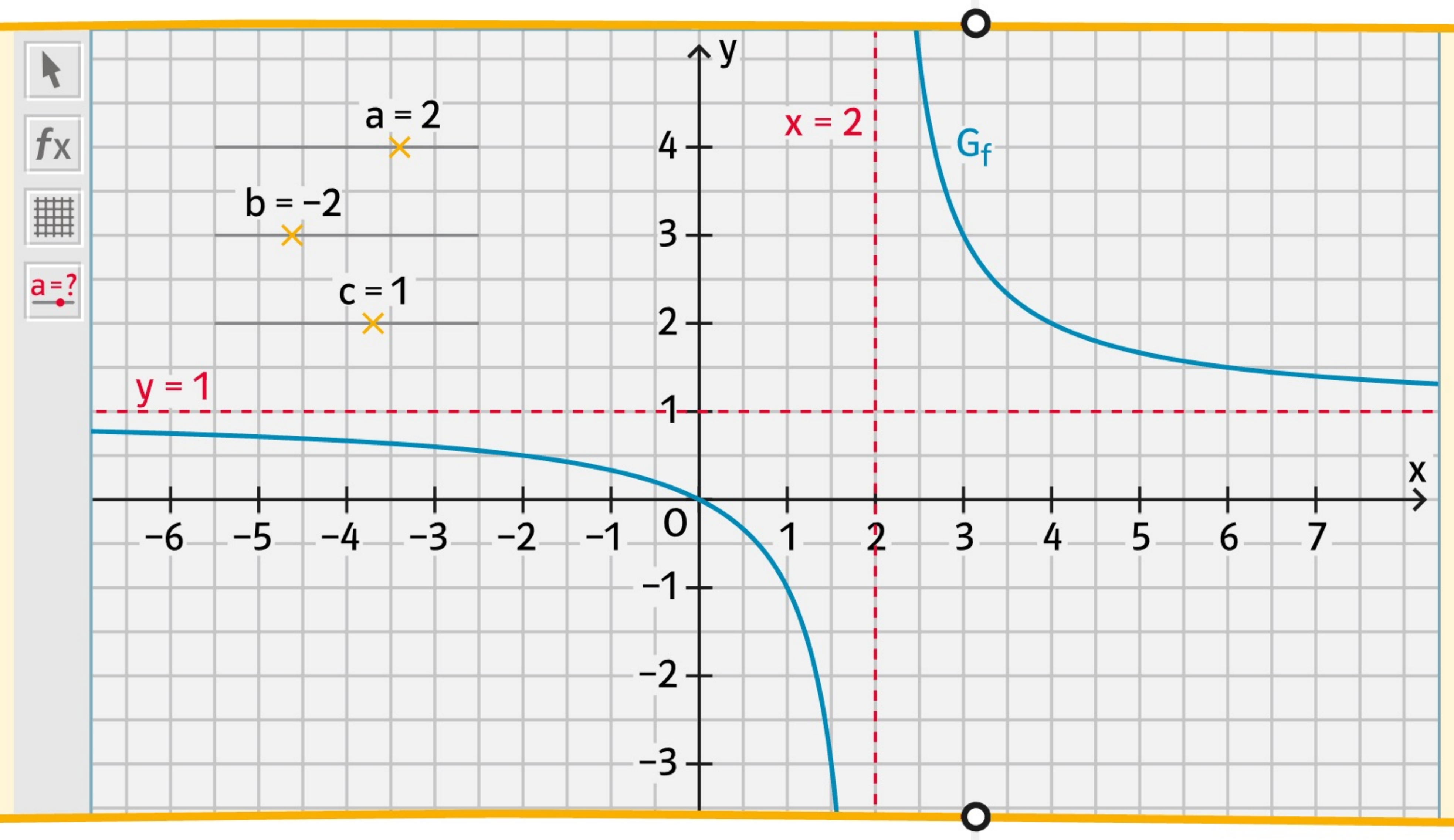
G 19 Ermitteln Sie die faktorisierte Form des Funktionsterms, indem Sie geeignet vorgehen (z. B. Ausklammern, Anwenden einer binomischen Formel oder Nullstellenberechnung).

a) $f\colon x \mapsto x^2 - 5x$ **b)** $g\colon x \mapsto x^2 - 5x + 6$ **c)** $h\colon x \mapsto x^2 - 9$

d) $k\colon x \mapsto x^2 - 4x + 4$ **e)** $p\colon x \mapsto 2x^2 - 2x - 24$ **f)** $q\colon x \mapsto -4x^2 + 18x - 8$

2 Symmetrie von Funktionsgraphen

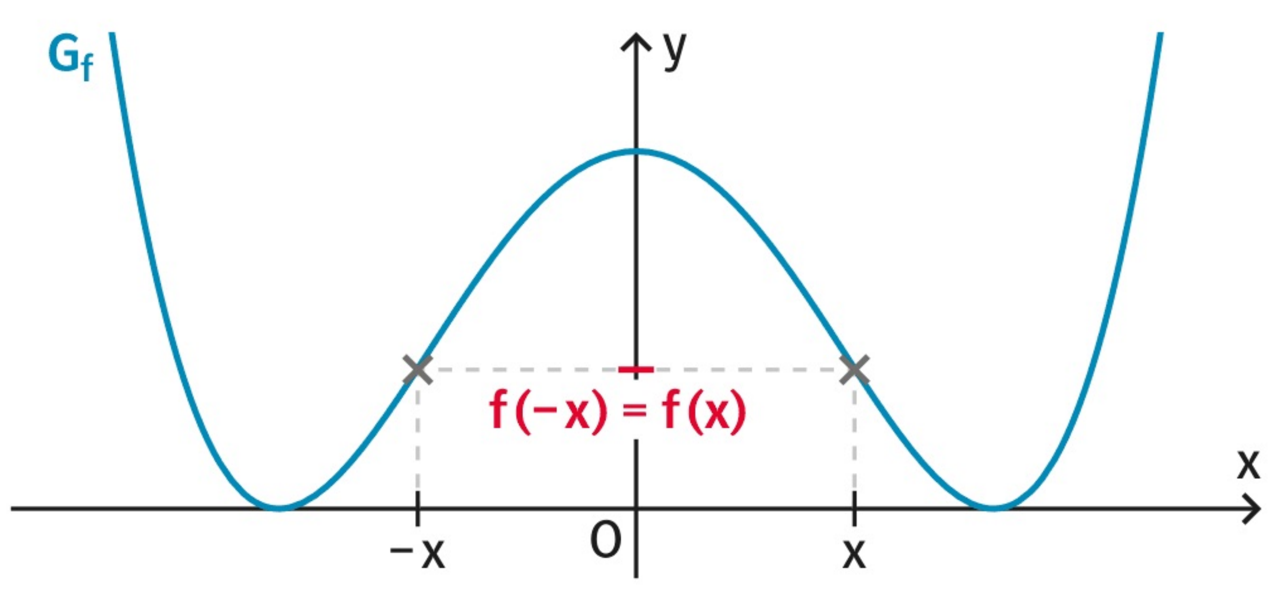
Gegeben ist eine gebrochen-rationale Funktion $f\colon x \mapsto \frac{a}{x+b} + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$.
Geben Sie Werte für die Parameter a, b und c an, sodass die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt wird. Interpretieren Sie die Gleichung geometrisch.



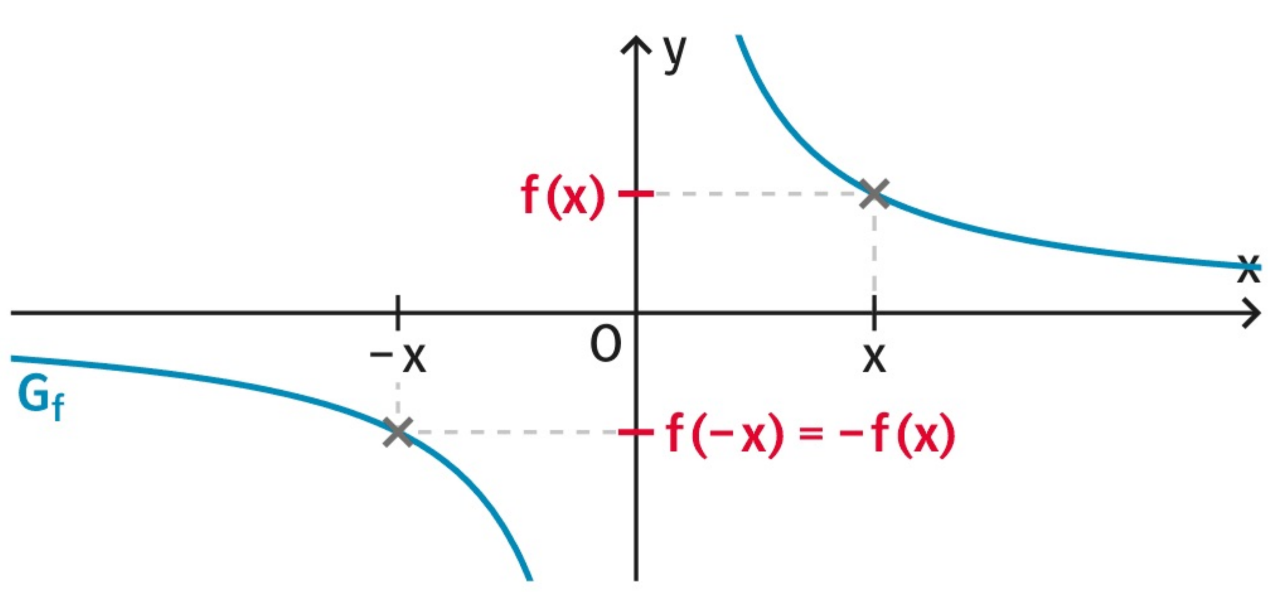
Die Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen zur y-Achse beziehungsweise die Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung kann anhand des zugehörigen Funktionsterms überprüft werden.

Eine Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ mit der Definitionsmenge D ist gegeben.

Achsensymmetrie zur y-Achse
Wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, dann ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.
Umgekehrt gilt auch: Wenn der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist, dann gilt für alle $x \in D$: $f(-x) = f(x)$.



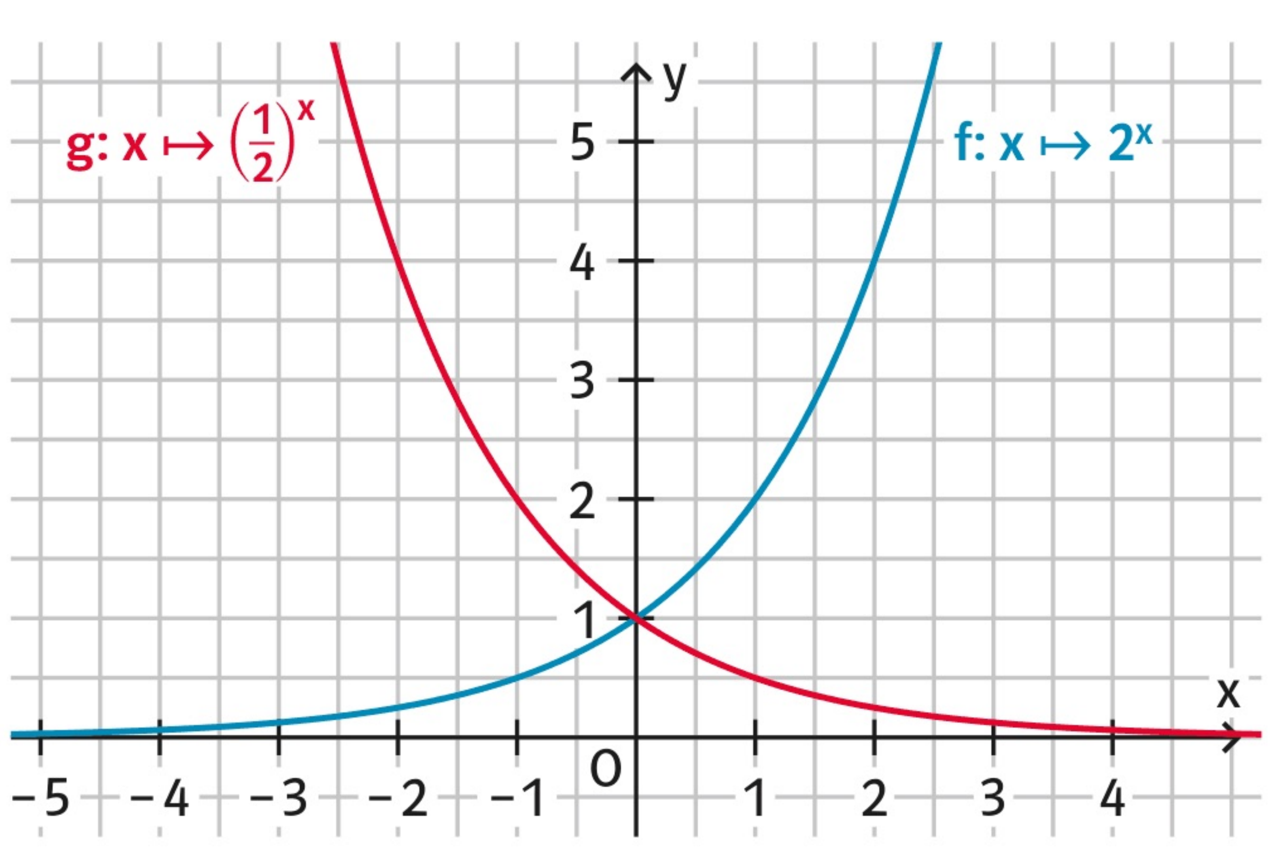
Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
Wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, dann ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
Umgekehrt gilt auch: Wenn der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, dann gilt für alle $x \in D$: $f(-x) = -f(x)$.



Der Graph einer Funktion f ist genau dann
- **achsensymmetrisch** zur **y-Achse**, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt,
- **punktsymmetrisch** zum **Koordinatenursprung**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Zur Erinnerung:
Eine Funktion heißt
- gerade, wenn ihr Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist,
- ungerade, wenn ihr Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

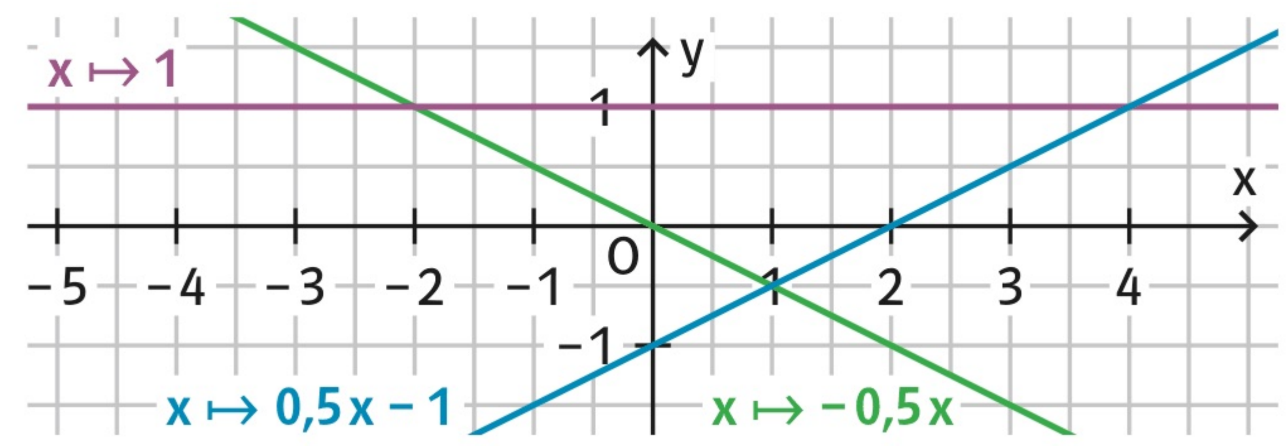
Bemerkung:
Die Graphen der beiden Funktionen
$f\colon x \mapsto 2^x$ und $g\colon x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$
sind **zueinander symmetrisch** bezüglich der y-Achse.
Spiegelt man den Graphen von f an der y-Achse, so erhält man den Graphen von g und umgekehrt. Jedoch ist jeder einzelne Graph für sich betrachtet nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.



Symmetrie bei verschiedenen Funktionstypen

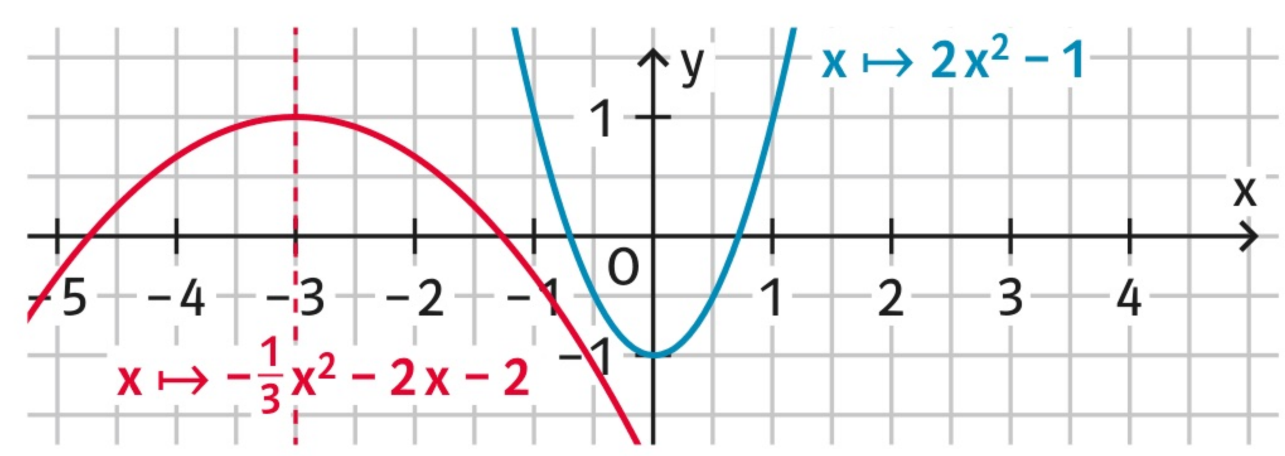
Ganzrationale Funktionen mit $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
Spezialfälle:

(1) Lineare Funktionen mit $x \mapsto mx + t$
Achsensymmetrie zur y-Achse, wenn $m = 0$ gilt.
Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn $t = 0$ gilt.



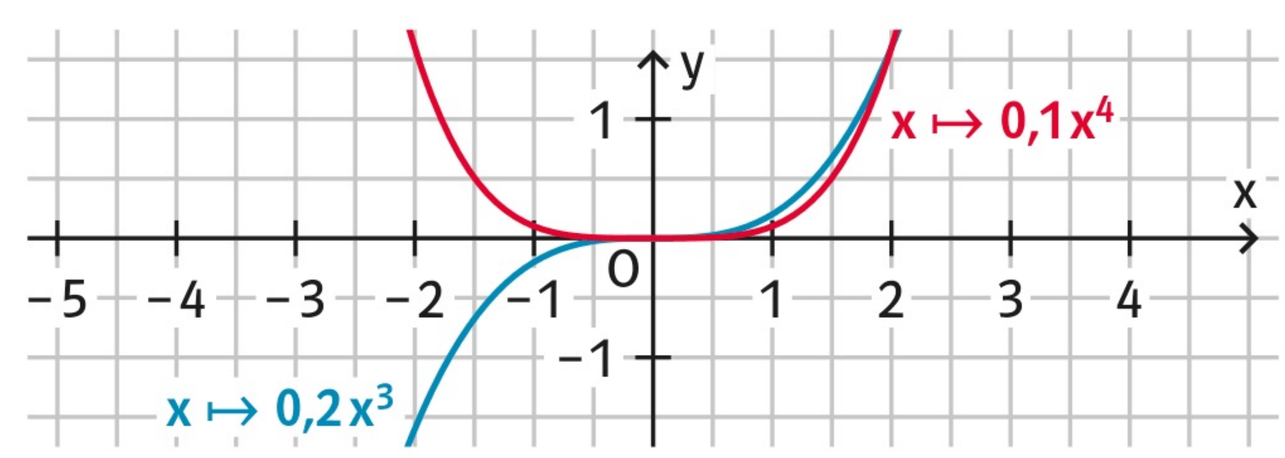
Für $m \neq 0$ und $t \neq 0$ liegt keine Achsensymmetrie zur y-Achse und keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

(2) Quadratische Funktionen mit $x \mapsto ax^2 + bx + c$
Achsensymmetrie zur y-Achse, wenn $b = 0$ gilt.



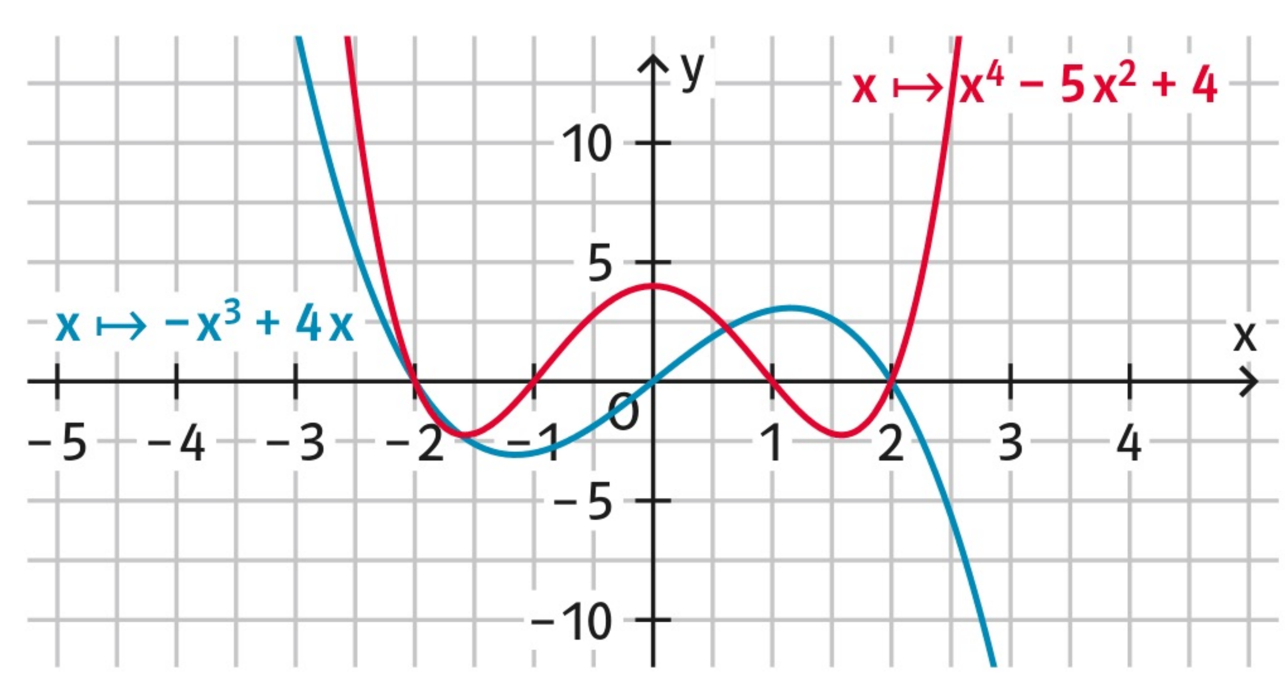
Allgemein: Achsensymmetrie zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitelpunkt.

(3) Potenzfunktionen mit $x \mapsto ax^n$
Achsensymmetrie zur y-Achse, wenn n gerade ist.
Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn n ungerade ist.



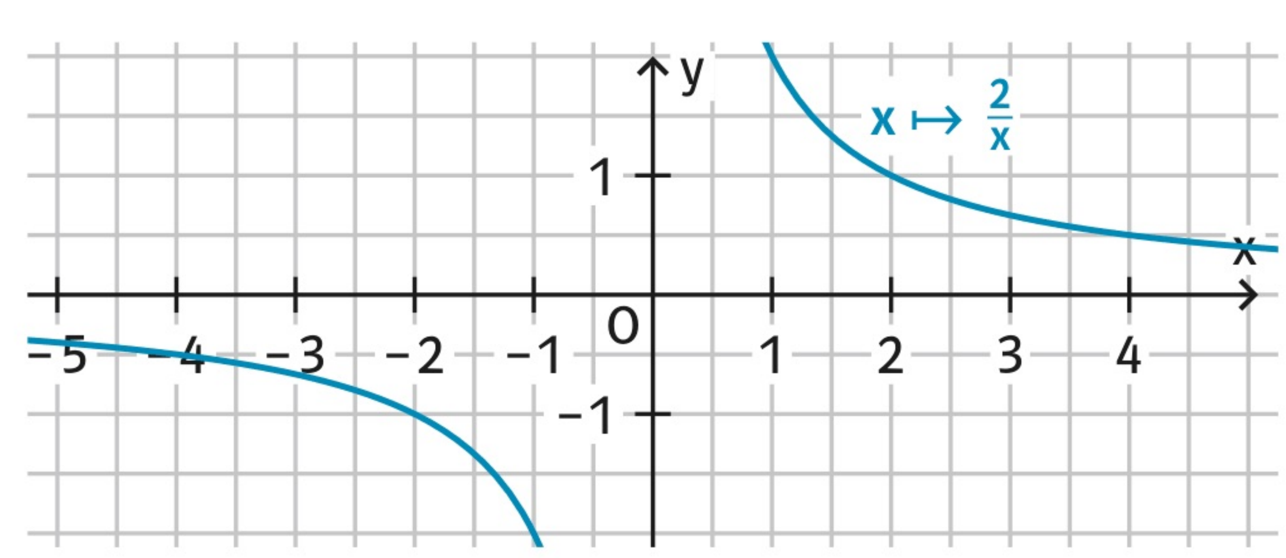
$f(x) = 0{,}1x^4$
$f(-x) = 0{,}1(-x)^4 = 0{,}1x^4 = f(x)$
$g(x) = 0{,}2x^3$
$g(-x) = 0{,}2(-x)^3 = -0{,}2x^3 = -g(x)$

Ganzrationale Funktionen allgemein mit
$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
Achsensymmetrie zur y-Achse, wenn im Funktionsterm nur Potenzen von x mit geraden Exponenten vorkommen.
Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn im Funktionsterm nur Potenzen von x mit ungeraden Exponenten vorkommen.



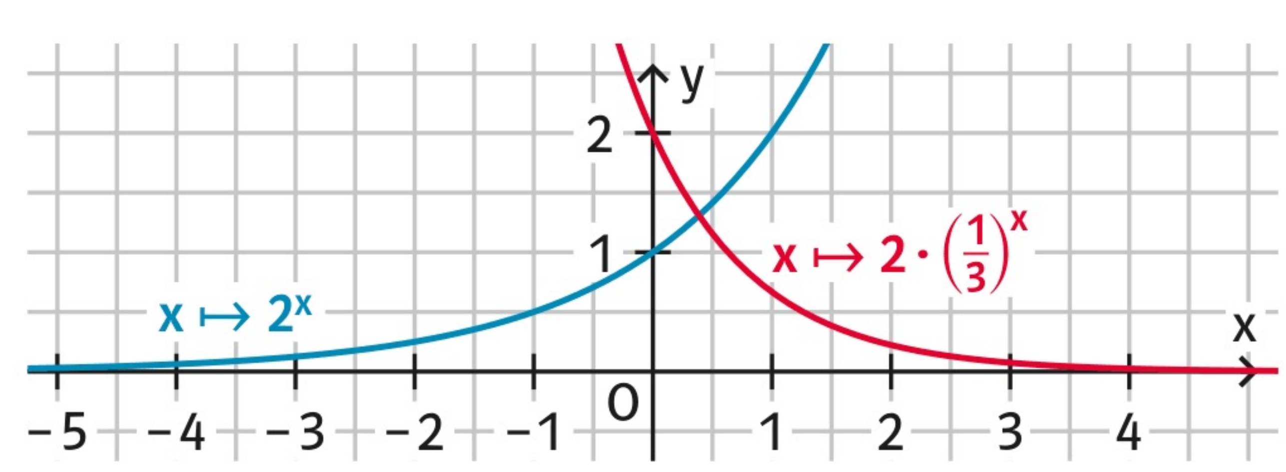
$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
$f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$
$g(x) = -x^3 + 4x$
$g(-x) = -(-x)^3 + 4(-x) = x^3 - 4x = -(-x^3 + 4x) = -g(x)$

Gebrochen-rationale Funktionen der Form
$x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$
Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn $b = 0$ und $c = 0$ gilt.

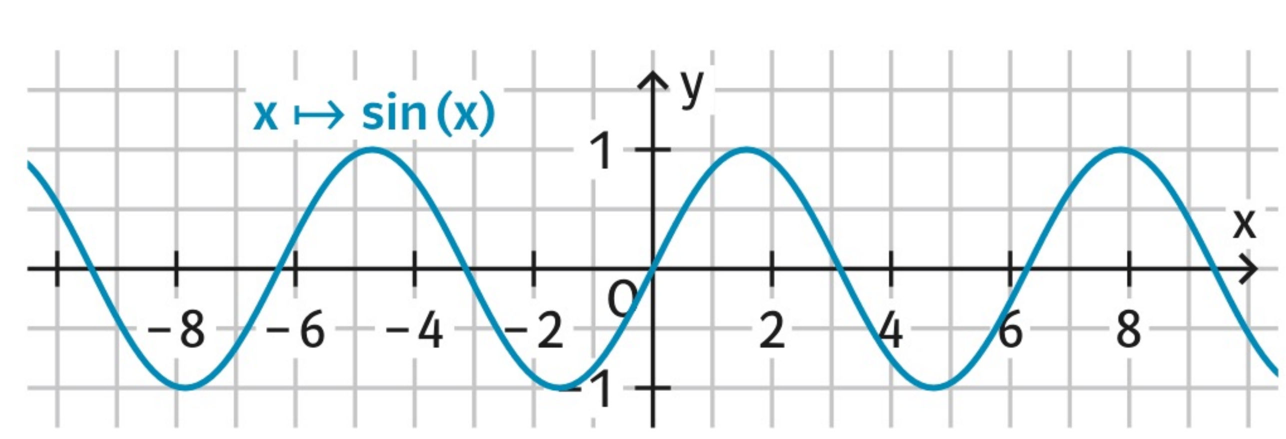


Allgemein: Punktsymmetrie zum Schnittpunkt der Asymptoten.

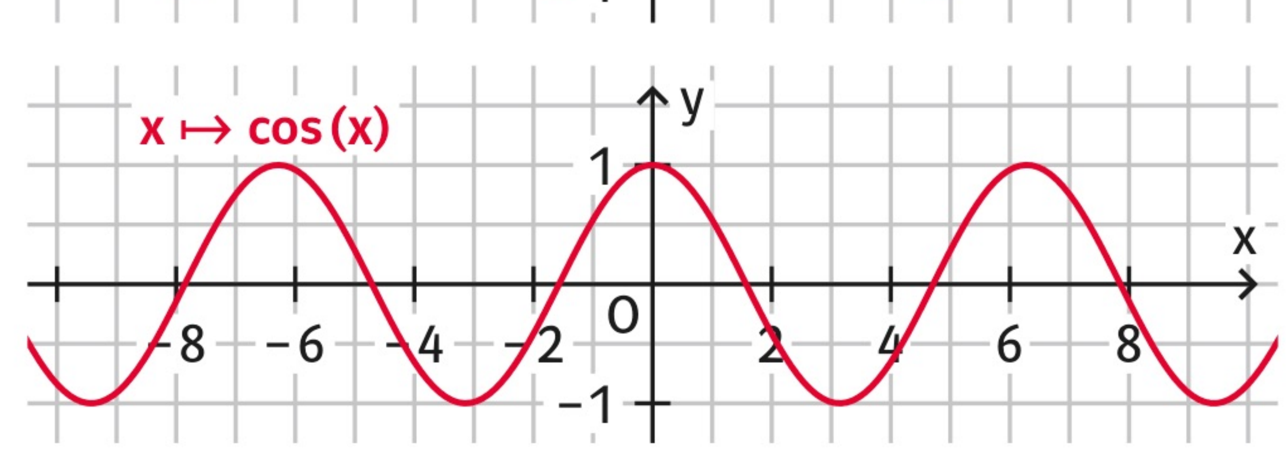
Exponentialfunktionen mit $x \mapsto b a^x$
Keine Symmetrie vorhanden.

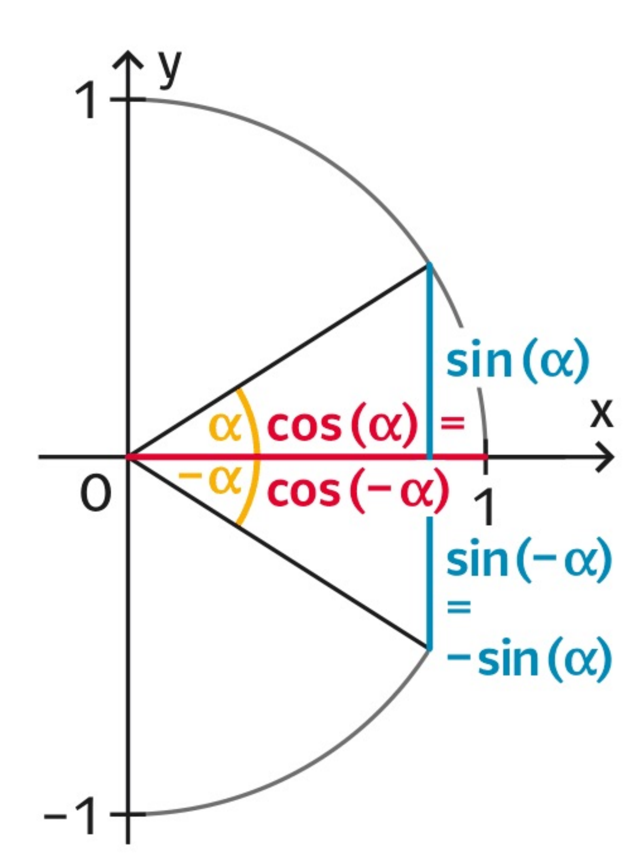


Trigonometrische Funktionen
Sinusfunktion mit $x \mapsto \sin(x)$
Punktsymmetrie zum Ursprung.



Kosinusfunktion mit $x \mapsto \cos(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse.





Beispiel 1

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion.

a) $f: x \mapsto 3x^6 - 2x^2 + 1$ b) $g: x \mapsto \frac{4}{x}$ c) $h: x \mapsto 2 + \cos(x)$

Lösung

a) $f(-x) = 3(-x)^6 - 2(-x)^2 + 1 = 3x^6 - 2x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

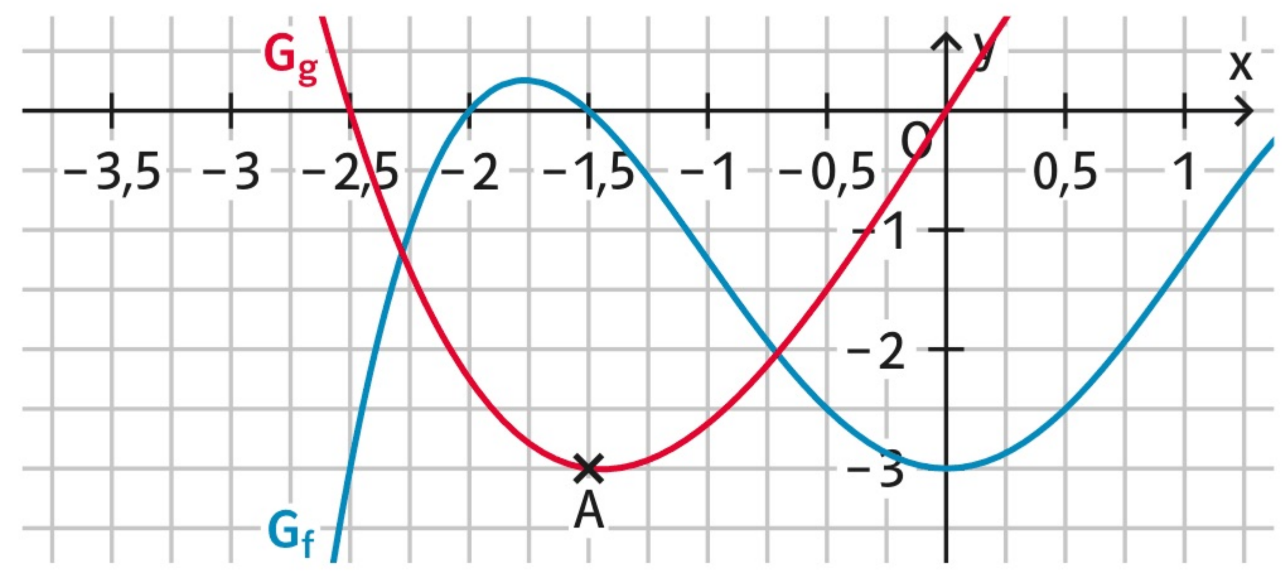
b) $g(-x) = \frac{4}{-x} = -\frac{4}{x} = -g(x) \Rightarrow G_g$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

c) $h(-x) = 2 + \cos(-x) = 2 + \cos(x) = h(x) \Rightarrow G_h$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Alternative Lösung zu a): Bei allen Potenzen von x sind die Exponenten gerade.

Beispiel 2

Die abgebildeten Graphen sind entweder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung oder achsensymmetrisch zur y-Achse und gehören zu ganzrationalen Funktionen. Bestimmen Sie zu jedem Graphen einen möglichen Funktionsterm.



Lösung

f: Vier einfache Nullstellen, also mindestens Grad 4.

$f(x) = a \cdot (x - 2)(x + 2)(x - 1{,}5)(x + 1{,}5)$

$f(0) = -3 \Rightarrow a \cdot (0 - 2)(0 + 2)(0 - 1{,}5)(0 + 1{,}5) = -3$

$a \cdot 9 = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$, also $f(x) = -\frac{1}{3}(x^4 - 6{,}25x^2 + 9)$

g: Drei einfache Nullstellen, also mindestens Grad 3.

$g(x) = a \cdot (x - 2{,}5)\,x\,(x + 2{,}5)$

$g(-1{,}5) = -3 \Rightarrow a \cdot (-1{,}5 - 2{,}5)(-1{,}5)(-1{,}5 + 2{,}5) = -3 \Rightarrow a \cdot 6 = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$, also

$g(x) = -\frac{1}{2}(x^3 - 6{,}25x)$

Aufgaben

1 Untersuchen Sie, ob der zur Funktion gehörige Graph achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und skizzieren Sie den Graphen.

a) $a: x \mapsto 2 \cdot \sin(x)$ b) $b: x \mapsto \cos(x)$ c) $c: x \mapsto \frac{3}{x}$

d) $d: x \mapsto \frac{1}{x-1}$ e) $e: x \mapsto 2x^2 - 1$ f) $f: x \mapsto 4^x$

g) $g: x \mapsto 2x + 1$ h) $h: x \mapsto 1{,}5$ i) $i: x \mapsto x^3$

j) $j: x \mapsto -2x$ k) $k: x \mapsto \cos(x) + 1$ l) $l: x \mapsto \sin(2x)$

2 Hinter jeder Funktionsvorschrift ist ein Buchstabe notiert. Die zugehörigen Graphen sind entweder achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung oder weisen keine dieser beiden Symmetrien auf. Bilden Sie für jeden der drei Fälle ein Lösungswort aus der Biologie.

$x \mapsto 4x^6 - 3x^2 - 1$ E | $x \mapsto x^3 - 2x$ L | $x \mapsto x^6 + 3x^3 + 1$ E | $x \mapsto 4x + 1$ E

$x \mapsto x^4 - \frac{1}{5}x^2 - 0{,}7$ E | $x \mapsto x^7 - x^5 + 4x$ E | $x \mapsto x^{90} - 8x^7$ I | $x \mapsto 6x^2 - 7x^5$ B

$x \mapsto 3x$ E | $x \mapsto x^{713} - 8x$ S | $x \mapsto x^8$ R | $x \mapsto \frac{x^6}{2} - 3x^2$ L | $x \mapsto x^3 + 3x^4 - 1$ N

3 Untersuchen Sie, ob der Graph der Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) $f: x \mapsto (x + 1)x(x - 1)$ b) $f: x \mapsto (x - 2)(x^2 - 1)(x + 2)$

c) $f: x \mapsto 3(x + 2)^2(x - 2)^2$ d) $f: x \mapsto (x^2 - 1)(x - 1)^2$

4 Erläutern Sie den Unterschied der Formulierungen „Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse“ und „Die Graphen sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse“.

5 Gegeben sind die Punkte $A(-3|2)$, $B(1|-2)$ und $C(5|4)$.

a) Die Punkte liegen auf einem Funktionsgraphen, der achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Geben Sie die Koordinaten von drei weiteren Punkten an, die auf dem Graphen liegen, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen.

b) Die Punkte liegen auf einem Funktionsgraphen, der punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Geben Sie die Koordinaten von drei weiteren Punkten an, die auf dem Graphen liegen, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen.

6 Geben Sie einen Term einer Funktion mit den folgenden Eigenschaften an und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem Funktionenplotter.

a) Bei $x = -2$ ist eine Nullstelle und der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Bei $x = -2$ ist eine Nullstelle und der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Test 1

Lösungen | Seite 195

7 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion hinsichtlich Achsensymmetrie zur y-Achse beziehungsweise Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung.

a) $a: x \mapsto (x^2 - 1)2x$ **b)** $b: x \mapsto -x^7 + 2x^3 + 1$ **c)** $c: x \mapsto (x^2 - 4)(1 - x)^2$

d) $d: x \mapsto \frac{3}{x}$ **e)** $e: x \mapsto 2 \cdot \sin(x)$ **f)** $f: x \mapsto \cos(x) - 4$

8 **a)** Geben Sie einen Term einer Funktion an, deren Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, durch den Punkt $P(1|2)$ verläuft und die x-Achse als Asymptote hat.

b) Geben Sie einen Term einer Funktion an, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist und die x-Achse in den Punkten $R(2|0)$ und $S(4|0)$ schneidet.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

9 Untersuchen Sie, ob es genau einen oder mehrere Werte für t gibt, sodass der Graph der Funktion eine Symmetrie zur y-Achse oder zum Koordinatenursprung aufweist.

a) $f: x \mapsto x^3 + t$ b) $f: x \mapsto 3x^2 + t$

c) $f: x \mapsto (x + t)^2$ d) $f: x \mapsto 2x^2 + (t - 1)x - 2$

10 Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie sich Ihre Entscheidung gegenseitig.

a) Falls $f(0) = 1$ ist, kann der Graph von f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

b) Falls $f(0) = 1$ ist, kann der Graph von f nicht punktsymmetrisch zum Ursprung sein.

c) Falls $f(1) = f(-1)$ ist, kann der Graph von f nicht punktsymmetrisch zum Ursprung sein.

d) Falls die Punkte $P(-1|2)$ und $Q(1|-2)$ auf dem Graphen von f liegen, kann G_f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse liegen.

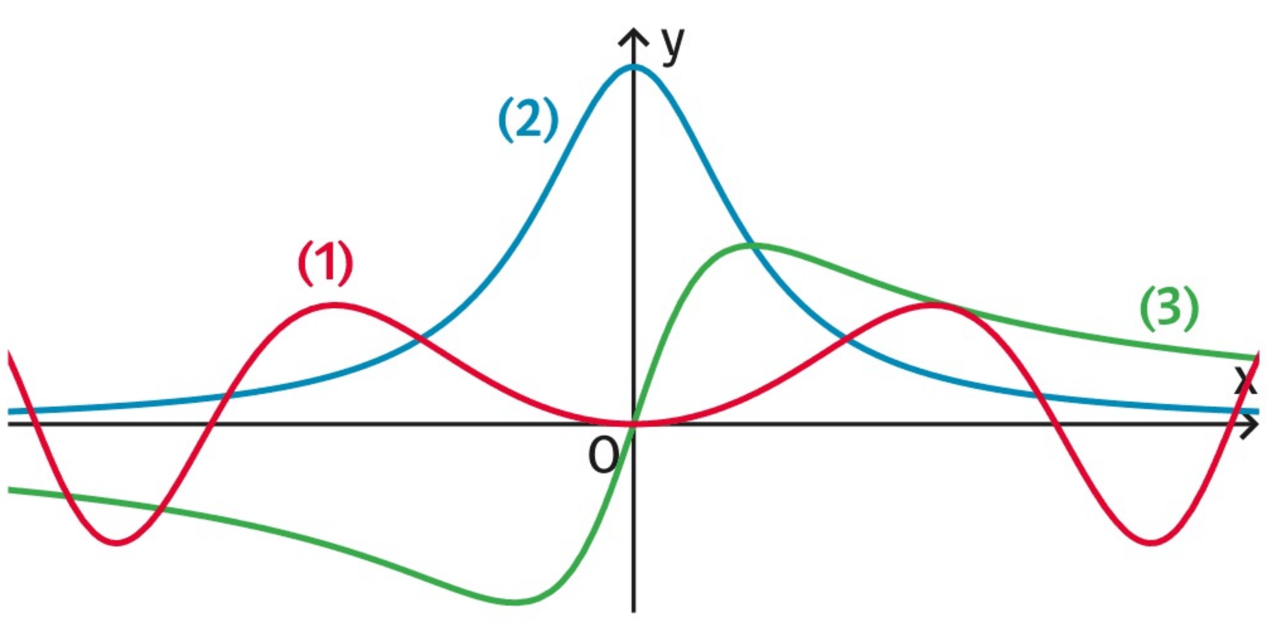
e) Es gibt eine Funktion, deren Graph sowohl achsensymmetrisch zur y-Achse als auch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

f) Verschiebt man den zur y-Achse achsensymmetrischen Graphen einer Funktion in x-Richtung, so erhält man den Graphen einer Funktion, der nicht achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

g) Verschiebt man den zum Ursprung punktsymmetrischen Graphen einer Funktion in y-Richtung, so erhält man den Graphen einer Funktion, der nicht punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Strategie | Seite 188
Betrachten von etwas Gegenteiligem

11 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{3}{x^2 + 1}$, $g: x \mapsto \sin(0{,}25x^2)$ und $h: x \mapsto \frac{3x}{x^2 + 1}$.
Ordnen Sie unter Verwendung des Symmetrieverhaltens der Graphen von f, g und h jedem abgebildeten Graphen eine der gegebenen Funktionen f, g und h zu.

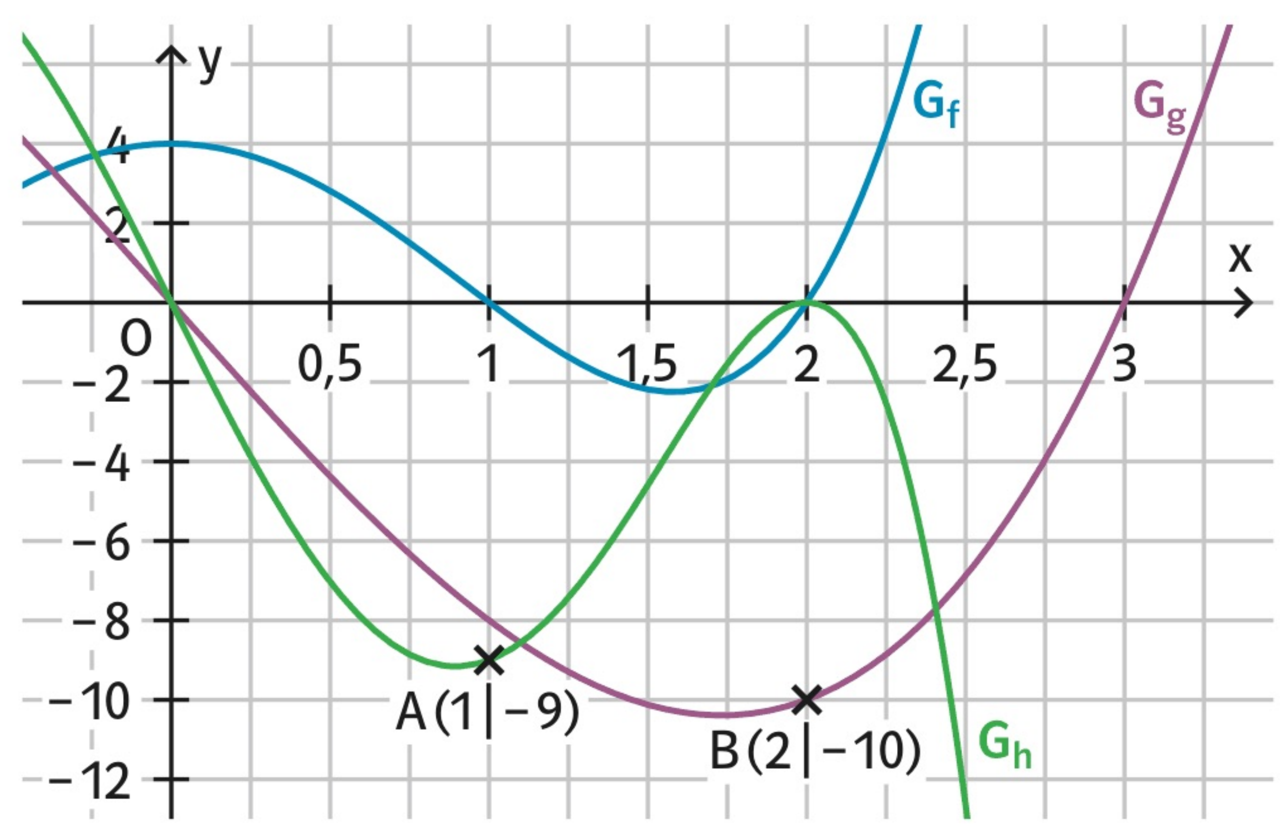


12 Skizzieren Sie den Graphen G_f der Funktion f. Geben Sie den Term einer Funktion g an, deren Graph G_g bezüglich der y-Achse symmetrisch zu G_f liegt, und skizzieren Sie G_g.

a) $f: x \mapsto 3^x$ b) $f: x \mapsto 2x - 1$ c) $f: x \mapsto x^3 - x$ d) $f: x \mapsto x^2 - 2x$

13 Gegeben ist eine gebrochen-rationale Funktion $g: x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$. Erläutern Sie sich gegenseitig, dass der Graph der Funktion nicht punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sein kann.

14 Die abgebildeten Graphen sind entweder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung oder achsensymmetrisch zur y-Achse und gehören zu ganzrationalen Funktionen. Bestimmen Sie zu jedem Graphen einen möglichen Funktionsterm.



15 Bestimmen Sie den Wert des Parameters c so, dass der Graph der Funktion $f: x \mapsto \sin(x + c)$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Test 2

Lösungen | Seite 195

16 Untersuchen Sie, ob es genau ein oder mehrere Wertepaare $(a; b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, gibt, sodass der Graph der Funktion f eine Symmetrie zur y-Achse oder zum Koordinatenursprung aufweist. Geben Sie jeweils auch die Art der Symmetrie an.

a) $f: x \mapsto ax^4 + bx^3 + 1$
b) $f: x \mapsto (x^2 - a^2)x + b$
c) $f: x \mapsto \frac{a}{x} + b$, $a \neq 0$
d) $f: x \mapsto a \cdot \cos(x + b)$, $a \neq 0$
e) $f: x \mapsto x^3 + 2(a+1)x^2 + bx$
f) $f: x \mapsto (x^2 - 4)(x + a)(x + b)$

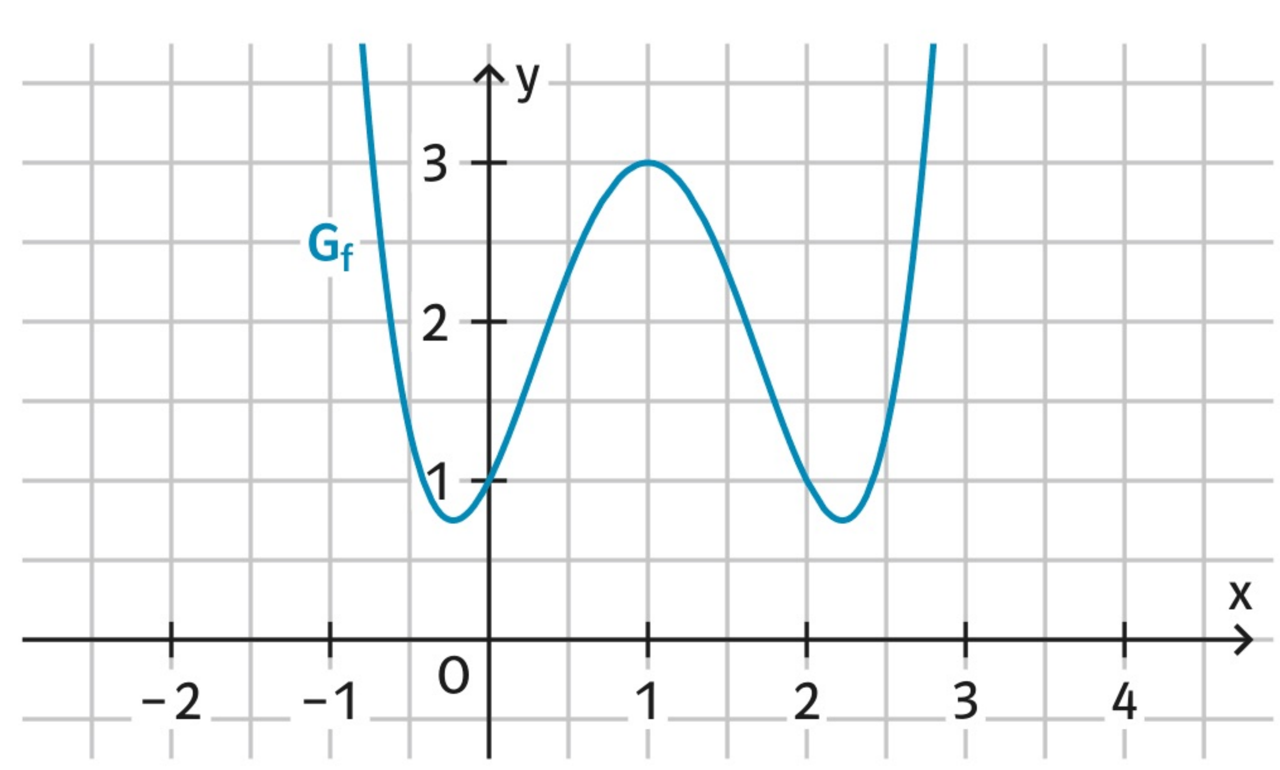
17 a) Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion, deren Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, immer eine ungerade Anzahl an Nullstellen besitzt.

b) Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion, deren Graph zur y-Achse achsensymmetrisch ist, eine gerade, aber auch eine ungerade Anzahl an Nullstellen besitzen kann.

18 Die Funktion $f: x \mapsto x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ und ihr Graph sind gegeben.

a) Überprüfen Sie rechnerisch die Gültigkeit der Gleichung $f(1 + a) = f(1 - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

b) Erläutern Sie, dass aus der Gültigkeit der Gleichung aus Teilaufgabe a) die Aussage „Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1$" abgeleitet werden kann.



Grundwissen Test

Lösungen | Seite 196

G 19 In einer Urne sind drei blaue und vier rote Kugeln.

a) Aus der Urne werden zufällig drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) alle Kugeln rot sind, (2) genau zwei Kugeln blau sind, (3) mindestens eine Kugel blau ist.

b) Aus der Urne werden zufällig drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) alle Kugeln rot sind, (2) genau zwei Kugeln blau sind, (3) mindestens eine Kugel blau ist.

3 Verschieben und Strecken von Funktionsgraphen

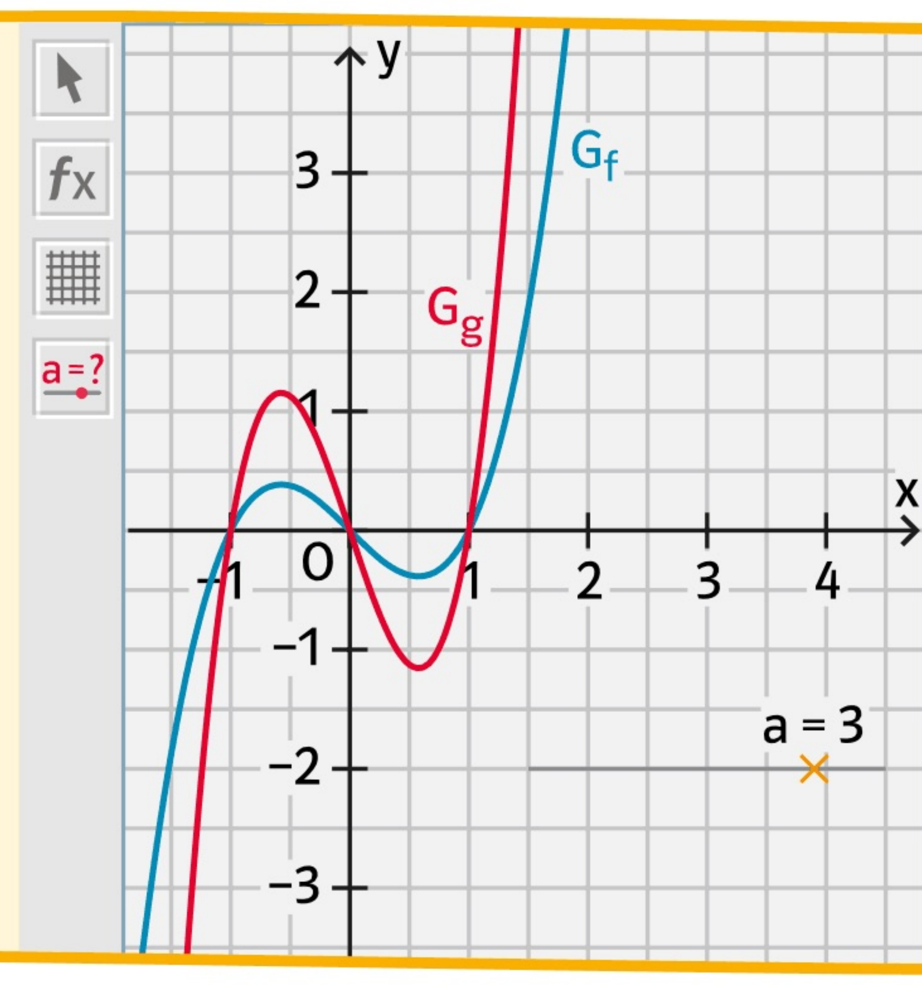
Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$ ist gegeben. Erstellen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware mithilfe eines Schiebereglers die Graphen der folgenden Funktionen und beschreiben Sie, wie der Graph jeweils aus dem der Funktion f hervorgeht.

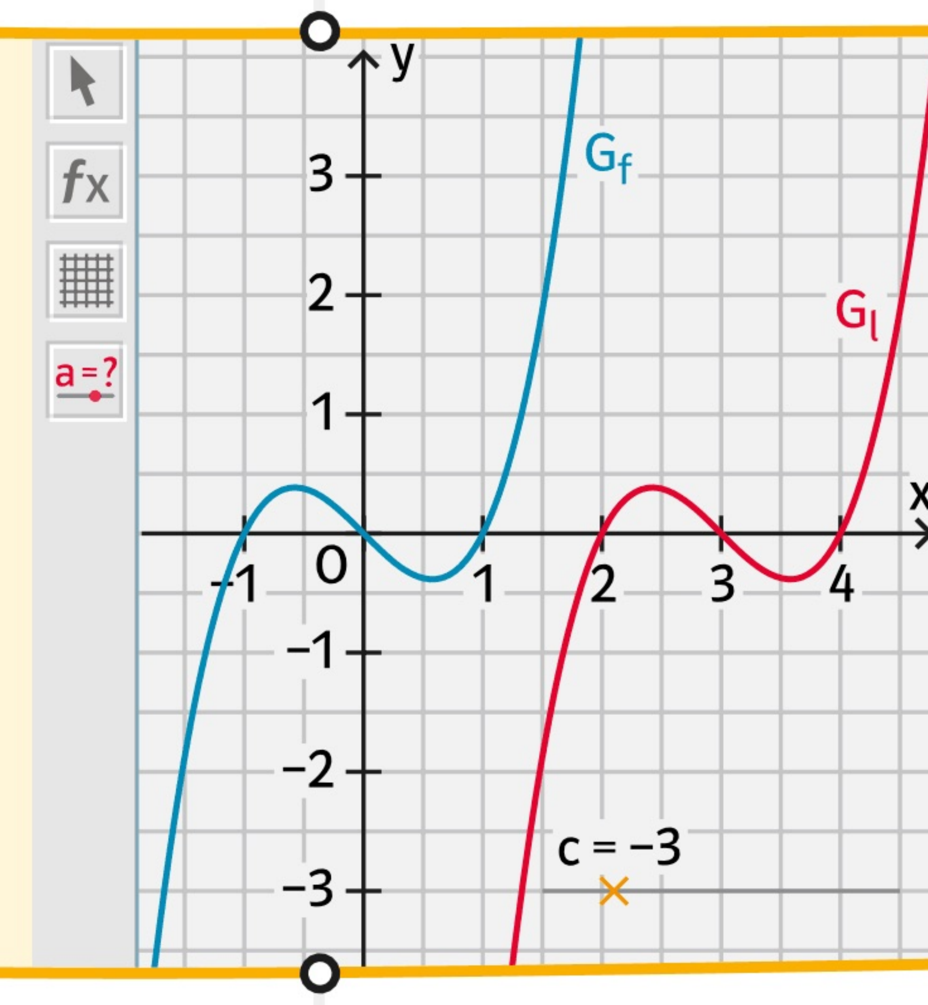
g: $x \mapsto a \cdot f(x) = a \cdot (x^3 - x),\ a \in \mathbb{R}^+$

h: $x \mapsto f(x) + d = (x^3 - x) + d,\ d \in \mathbb{R}$

k: $x \mapsto f(b \cdot x) = (b \cdot x)^3 - (b \cdot x),\ b \in \mathbb{R}^+$

l: $x \mapsto f(x + c) = (x + c)^3 - (x + c),\ c \in \mathbb{R}$





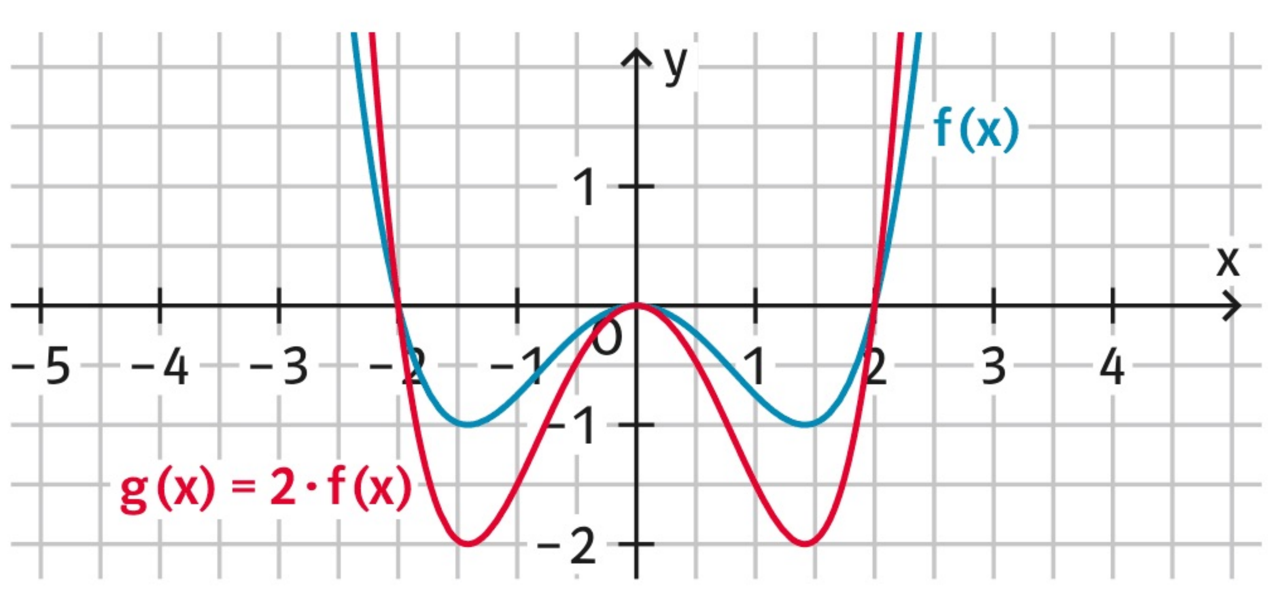
Verändert man den Funktionsterm f(x) einer Funktion f mithilfe von Parametern, z. B. $a \cdot f(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ oder $f(x + c)$ mit $c \in \mathbb{R}$, so gehen die zugehörigen Graphen aus dem der Funktion f durch Strecken oder Verschieben hervor.

Beispielhaft wird im Folgenden der Graph der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^4 - x^2$ gestreckt bzw. verschoben.

Streckung in y-Richtung

Den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot f(x)$ erhält man, indem man den Graphen von f mit dem Faktor 2 in y-Richtung streckt:

$g(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (0{,}25x^4 - x^2)$.



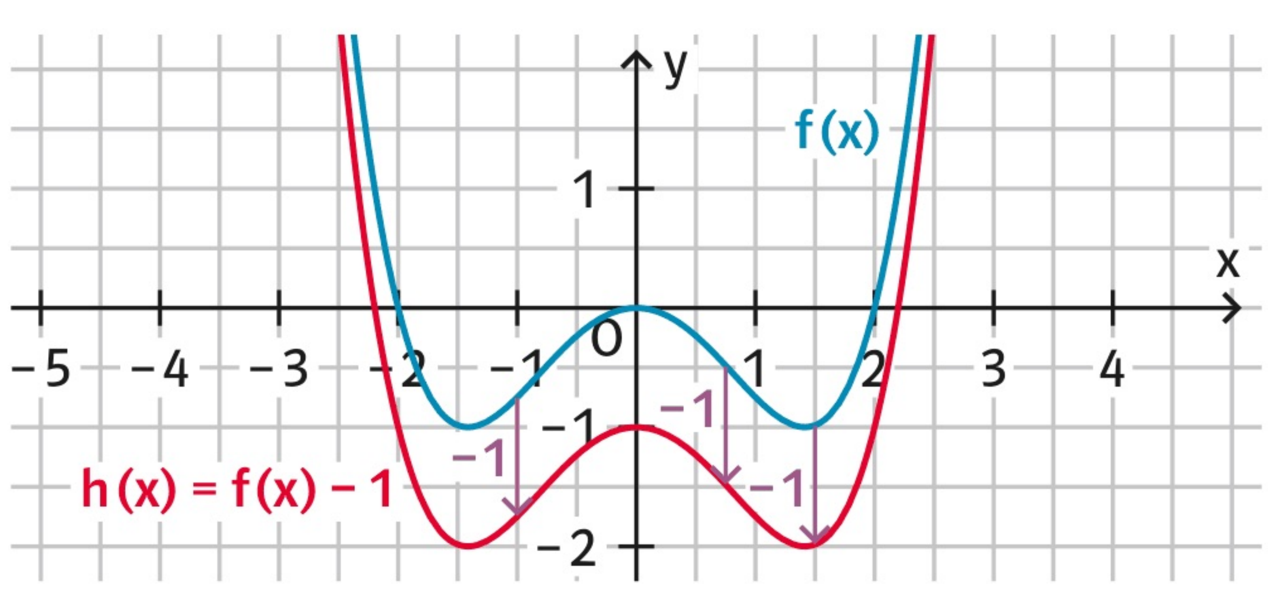
Allgemein: Man erhält den Graphen der Funktion g mit $g(x) = a \cdot f(x),\ a \in \mathbb{R}^+$, durch Streckung des Graphen der Funktion f mit dem Faktor a in y-Richtung.

Ist $0 < a < 1$, so wird der Graph der Funktion f „gestaucht“. Trotzdem spricht man in der Mathematik auch hier von einer Streckung.

Verschiebung in y-Richtung

Den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x) - 1$ erhält man, indem man den Graphen der Funktion f um −1 in y-Richtung verschiebt:

$h(x) = f(x) - 1 = (0{,}25x^4 - x^2) - 1$.



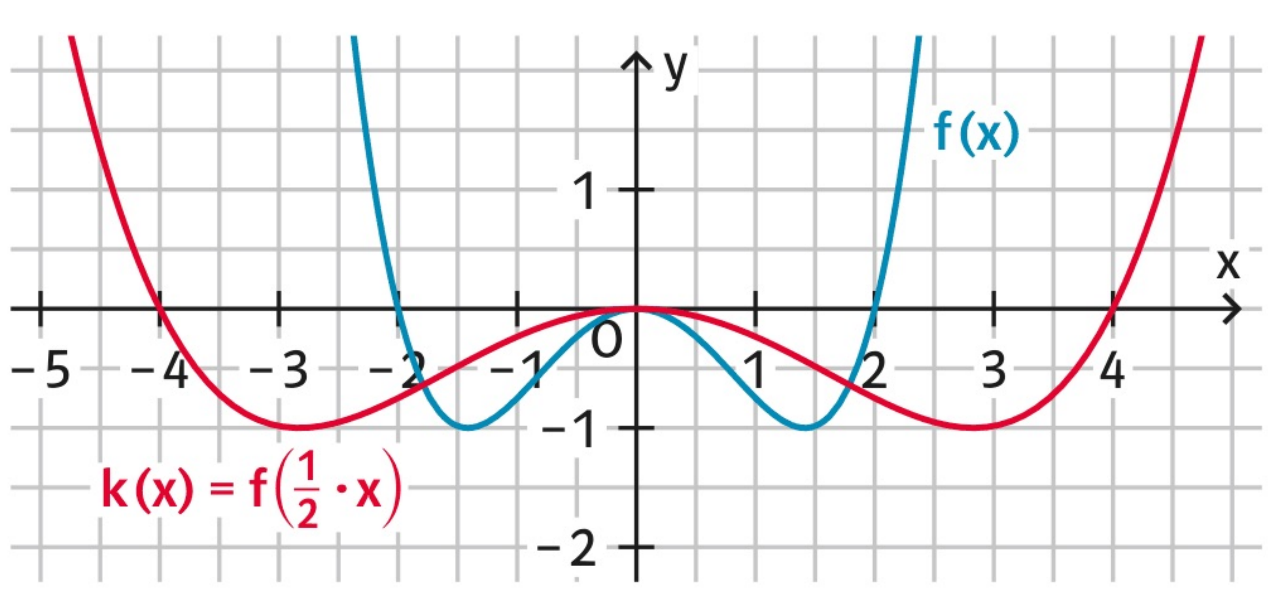
Allgemein: Man erhält den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x) + d,\ d \in \mathbb{R}$, durch Verschiebung des Graphen der Funktion f um d in y-Richtung. Ist $d < 0$, so wird der Graph der Funktion f in negative y-Richtung verschoben.

Verschiebt man G_f um −1 in y-Richtung, so ist dies gleichbedeutend damit, dass G_f um 1 in negative y-Richtung verschoben wird.

Streckung in x-Richtung

Den Graphen der Funktion k mit $k(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ erhält man, indem man den Graphen der Funktion f mit dem Faktor $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ in x-Richtung streckt:

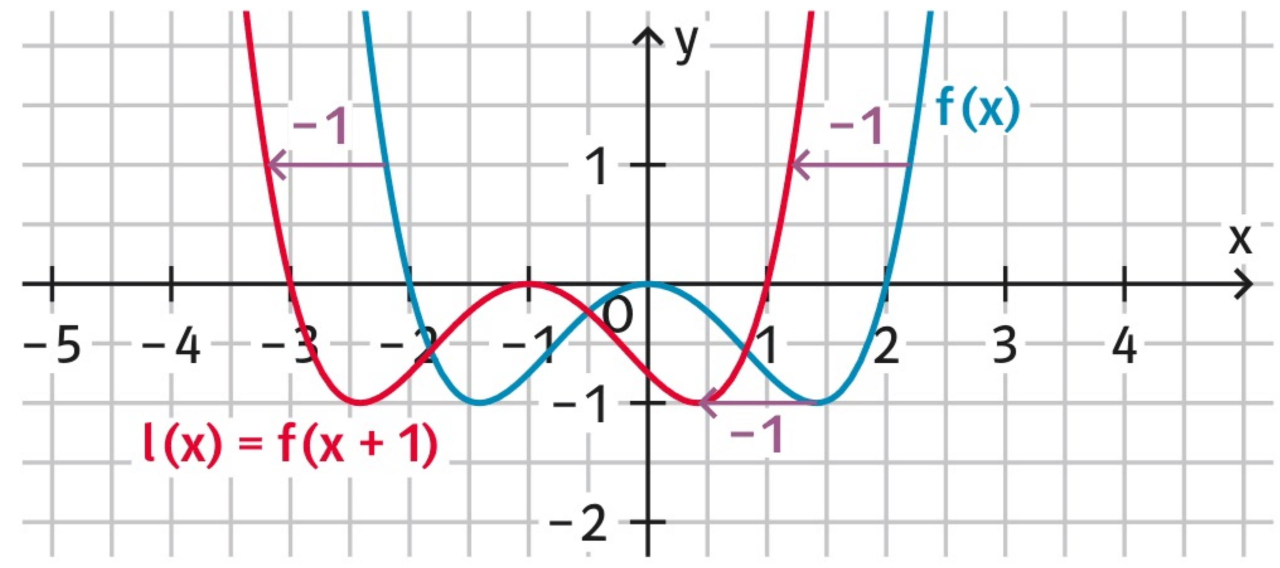
$k(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 0{,}25\left(\frac{1}{2}x\right)^4 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.



Allgemein: Man erhält den Graphen der Funktion k mit $k(x) = f(b \cdot x),\ b \in \mathbb{R}^+$, durch Streckung des Graphen der Funktion f mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung. Im Unterschied zur Streckung in y-Richtung wird hier nur das Argument x mit dem Faktor b multipliziert.

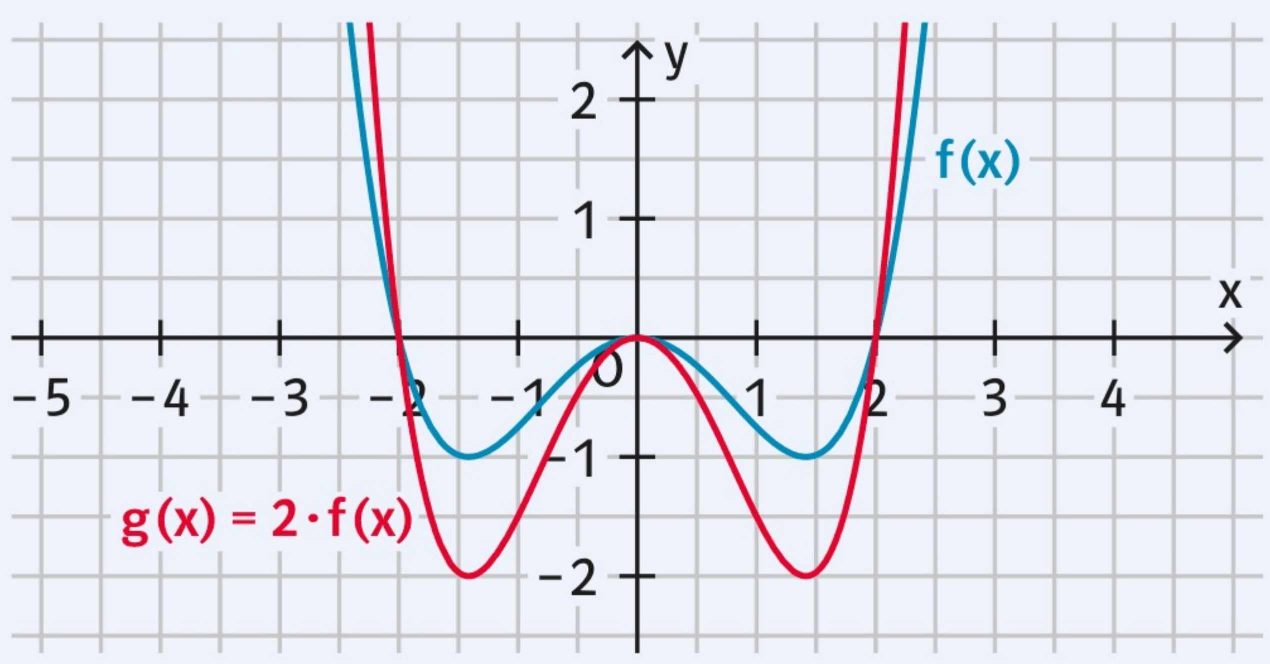
Auch im Fall $b > 1$ spricht man in der Mathematik von einer Streckung des Graphen der Funktion f. Anschaulich wird er gestaucht.

Verschiebung in x-Richtung



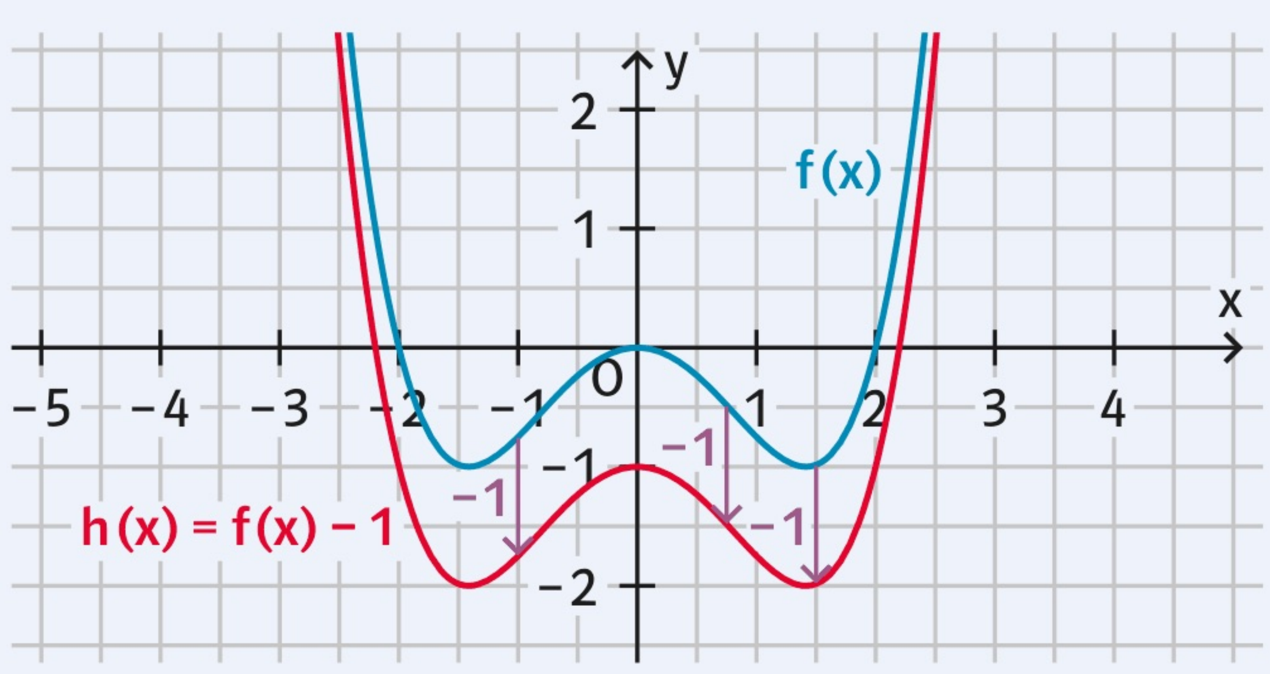
Den Graphen der Funktion l mit $l(x) = f(x + 1)$ erhält man, indem man den Graphen der Funktion f um −1 in x-Richtung verschiebt.
Das heißt, der Graph von f wird um 1 in negative x-Richtung verschoben:
$l(x) = f(x + 1) = 0{,}25(x + 1)^4 - (x + 1)^2$.
Allgemein: Man erhält den Graphen der Funktion l mit $l(x) = f(x + c)$, $c \in \mathbb{R}$, durch Verschiebung des Graphen der Funktion f um −c in x-Richtung. Ist $c < 0$, so wird der Graph der Funktion f in positive x-Richtung, für $c > 0$ in negative x-Richtung verschoben. Im Unterschied zur Verschiebung in y-Richtung wird hier nur zum Argument x der Parameter c addiert.

Verschieben und Strecken des Graphen einer Funktion f

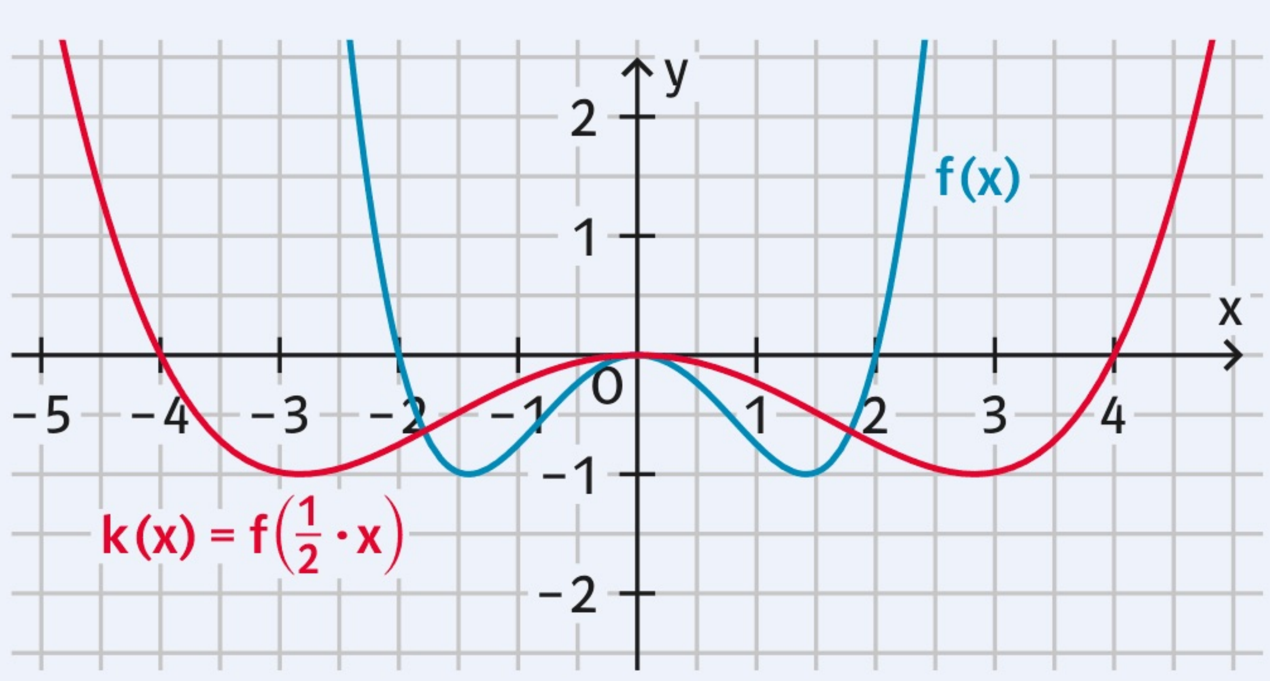


g(x) = a · f(x) mit $a \in \mathbb{R}^+$
Strecken mit dem Faktor a in y-Richtung



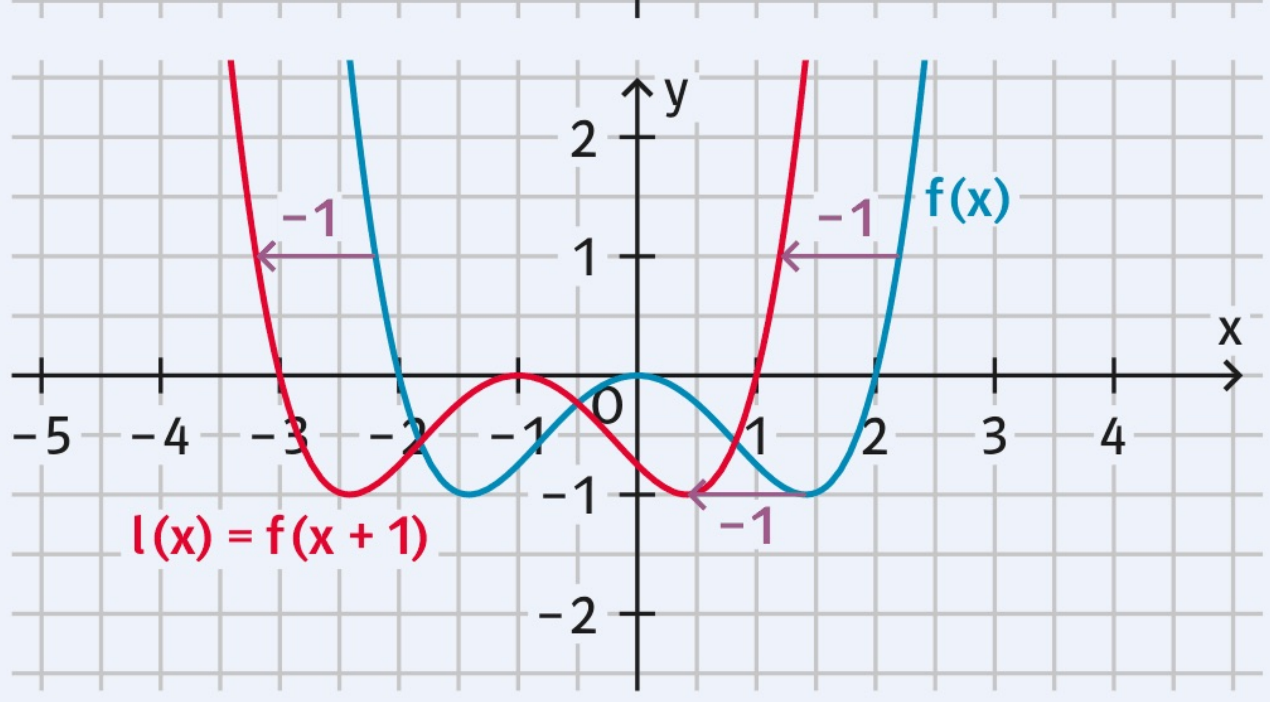


h(x) = f(x) + d mit $d \in \mathbb{R}$
Verschieben um d in y-Richtung



k(x) = f(b · x) mit $b \in \mathbb{R}^+$
Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung





l(x) = f(x + c) mit $c \in \mathbb{R}$
Verschieben um −c in x-Richtung

Bemerkungen:
Soll der Graph einer Funktion f in y-Richtung gestreckt bzw. verschoben werden, so muss der gesamte Funktionsterm f(x) mit einer Zahl multipliziert bzw. eine Zahl zum Term addiert werden.
Soll der Graph einer Funktion f in x-Richtung gestreckt bzw. verschoben werden, so muss nur das Argument x mit einer Zahl multipliziert bzw. eine Zahl zum Argument addiert werden.

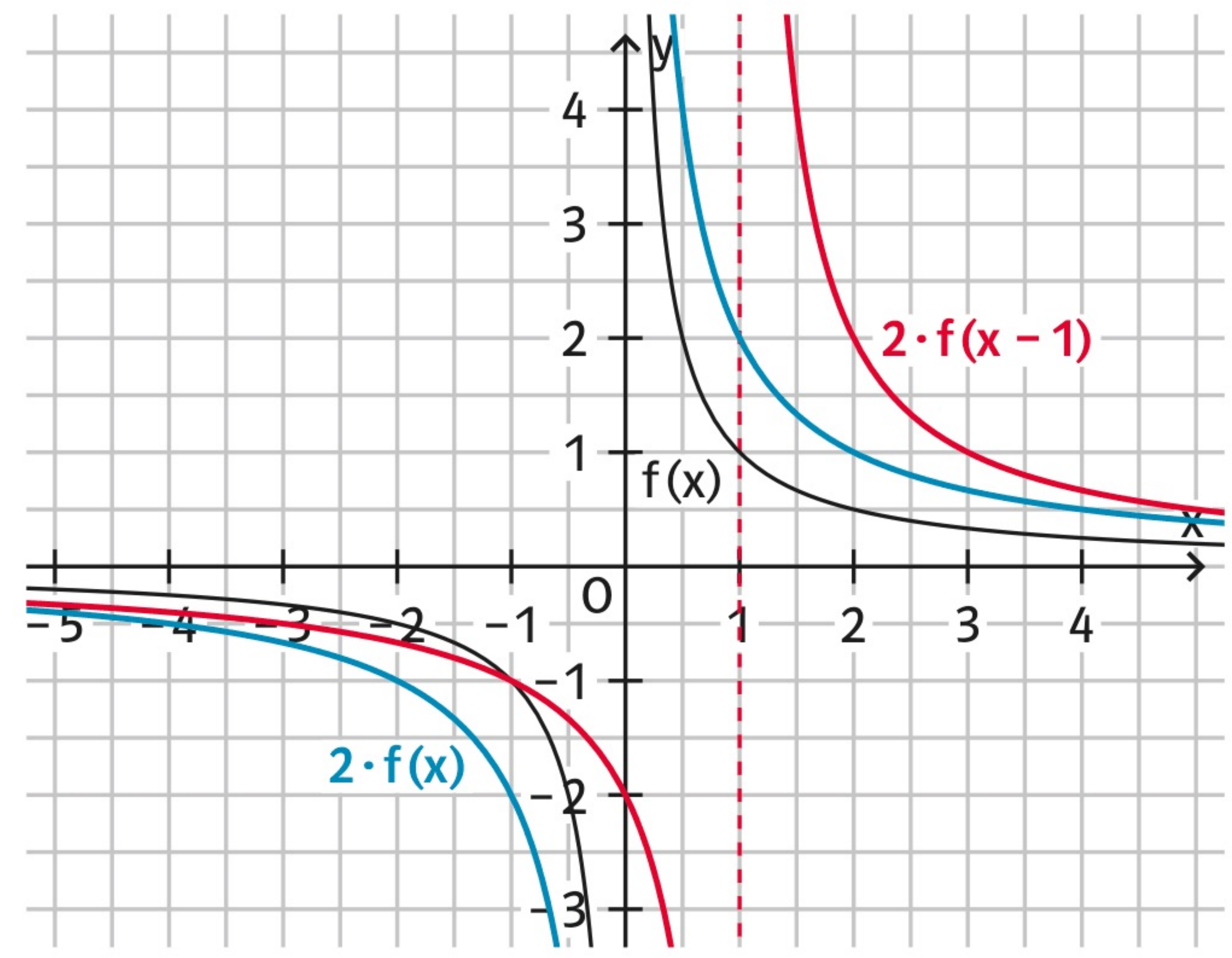
Kombination von Streckung und Verschiebung

Aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ entsteht durch Streckung und Verschiebungen der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{2}{x-1} = 2 \cdot f(x-1)$.

Streckung in y-Richtung mit Faktor 2

Verschiebung in x-Richtung um +1

Es gilt $g(x) = 2 \cdot f(x - 1)$.



Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm f(x).

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem von f hervorgeht.
(1) $g(x) = f(x+3)$ (2) $g(x) = f(2x)$ (3) $g(x) = 5 + f(x)$

b) Der Graph von h geht aus dem Graphen von f durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 4 und durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 0,2 hervor. Geben Sie den Funktionsterm h(x) in Abhängigkeit von f(x) an.

Lösung

a) (1) Der Graph von f wird um −3 in x-Richtung verschoben.
(2) Der Graph von f wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestreckt.
(3) Der Graph von f wird um +5 in y-Richtung verschoben.

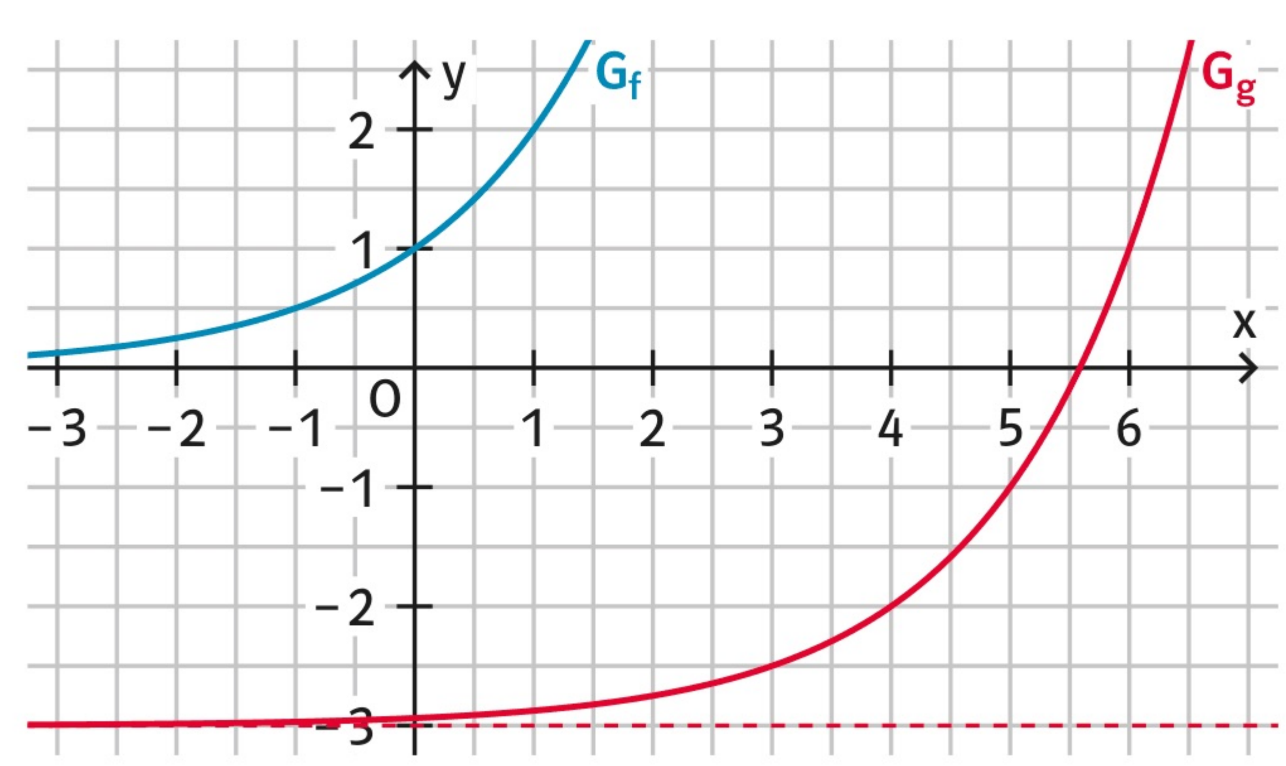
b) $h(x) = 4 \cdot f(5x)$

Beispiel 2

G_f ist der Graph einer Exponentialfunktion $f\colon x \mapsto a \cdot b^x$ und G_g ein dazu kongruenter Graph, der zur Funktion g gehört.

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem von f durch Verschiebungen hervorgeht.

b) Geben Sie den Term g(x) in Abhängigkeit von f(x) und nur in Abhängigkeit von x an.



Zur Erinnerung:
„Kongruent" bedeutet „deckungsgleich".

Lösung

a) Der Punkt $(0|1) \in G_f$ wird auf den Punkt $(4|-2) \in G_g$ verschoben. G_g geht aus G_f durch eine Verschiebung um 4 in x-Richtung und um −3 in y-Richtung hervor.

b) $g(x) = f(x-4) - 3 = a \cdot b^{x-4} - 3$

Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto x^2$. Skizzieren Sie die Graphen von f und g. Geben Sie den Funktionsterm von g zunächst in Abhängigkeit von f(x) und zusätzlich nur in Abhängigkeit von x an. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse anschließend gegenseitig.
Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f, indem dieser

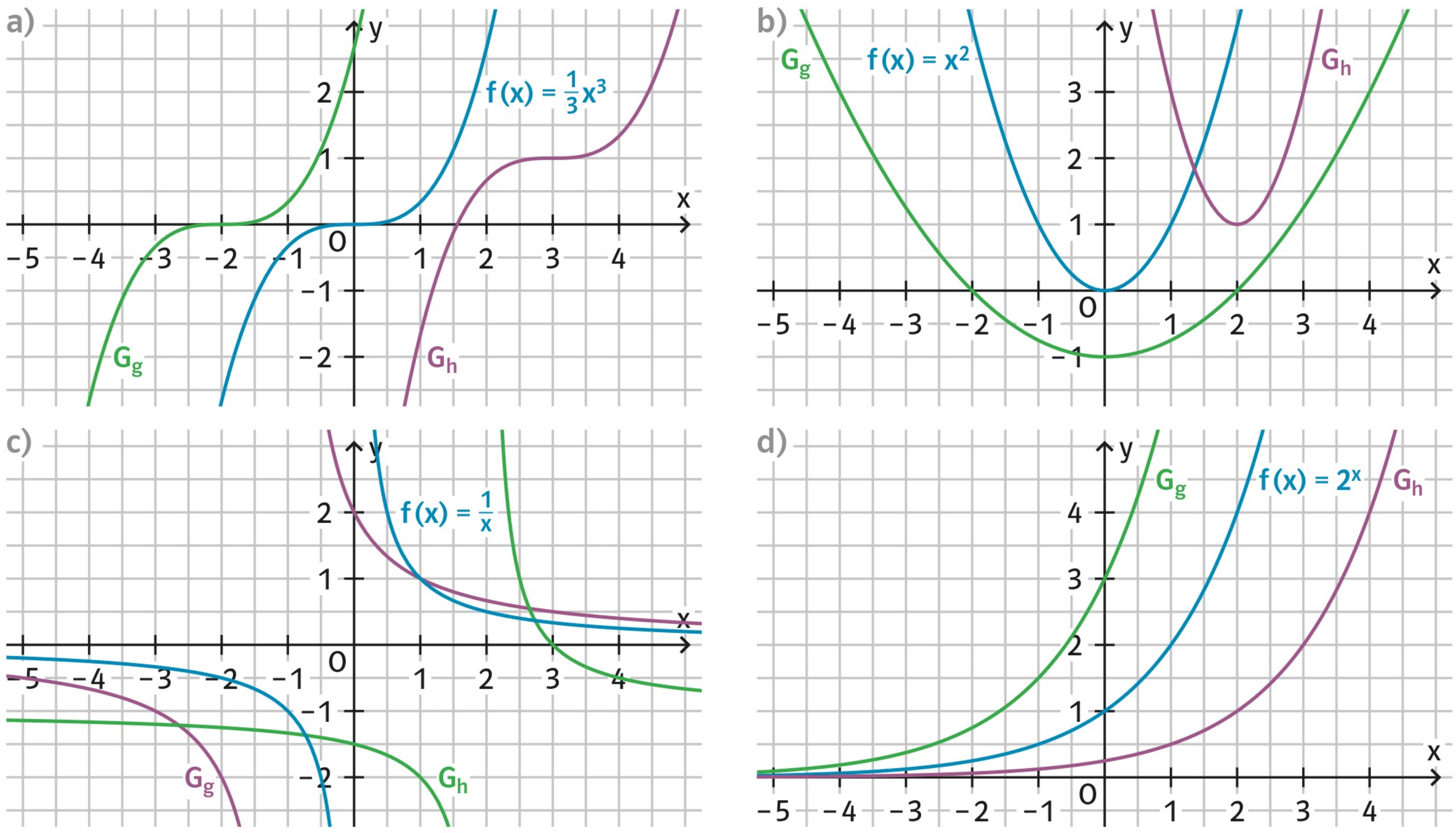
a) mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt wird,

b) um 2 in x-Richtung und um −3 in y-Richtung verschoben wird,

c) mit dem Faktor 3 in x-Richtung gestreckt und um −2 in y-Richtung verschoben wird.

2 Zeichnen Sie in ein gemeinsames Koordinatensystem die Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ und der Funktionen g und h mit $g(x) = 3 \cdot f(x)$ und $h(x) = f(3 \cdot x)$.

3 Gegeben sind die Graphen von f, g und h. Bestimmen Sie die Funktionsterme der Funktionen g und h.



Test 1

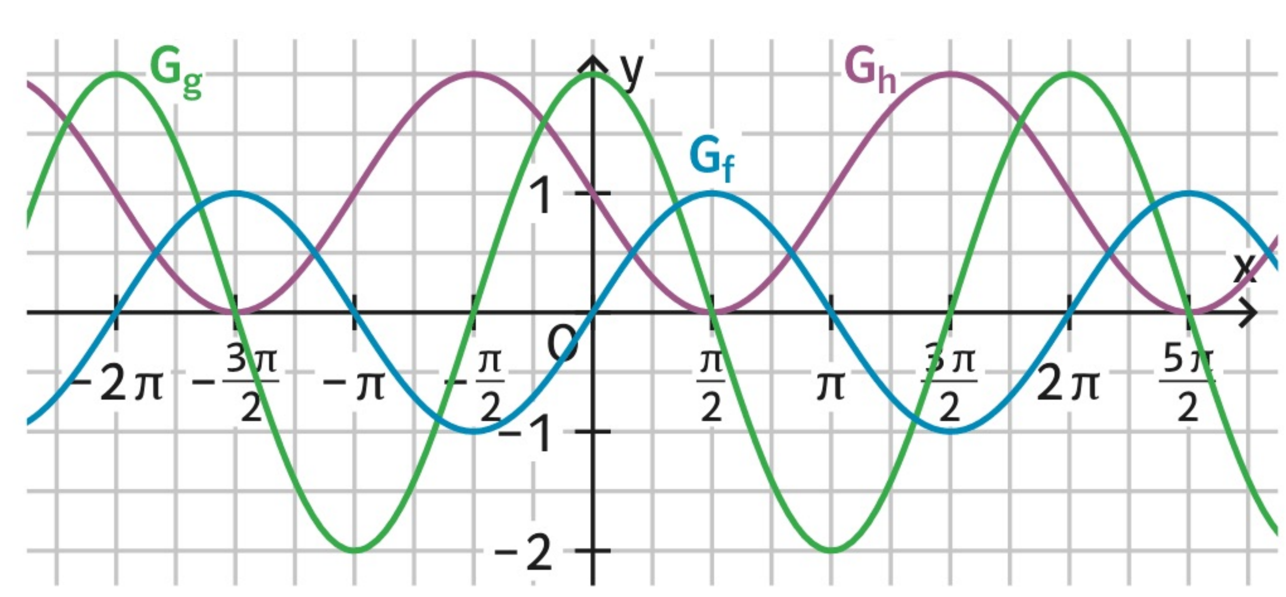
Lösungen | Seite 196

4 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Skizzieren Sie den Graphen von g. Geben Sie den Funktionsterm von g zunächst in Abhängigkeit von f(x) und zusätzlich nur in Abhängigkeit von x an. Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f, indem dieser

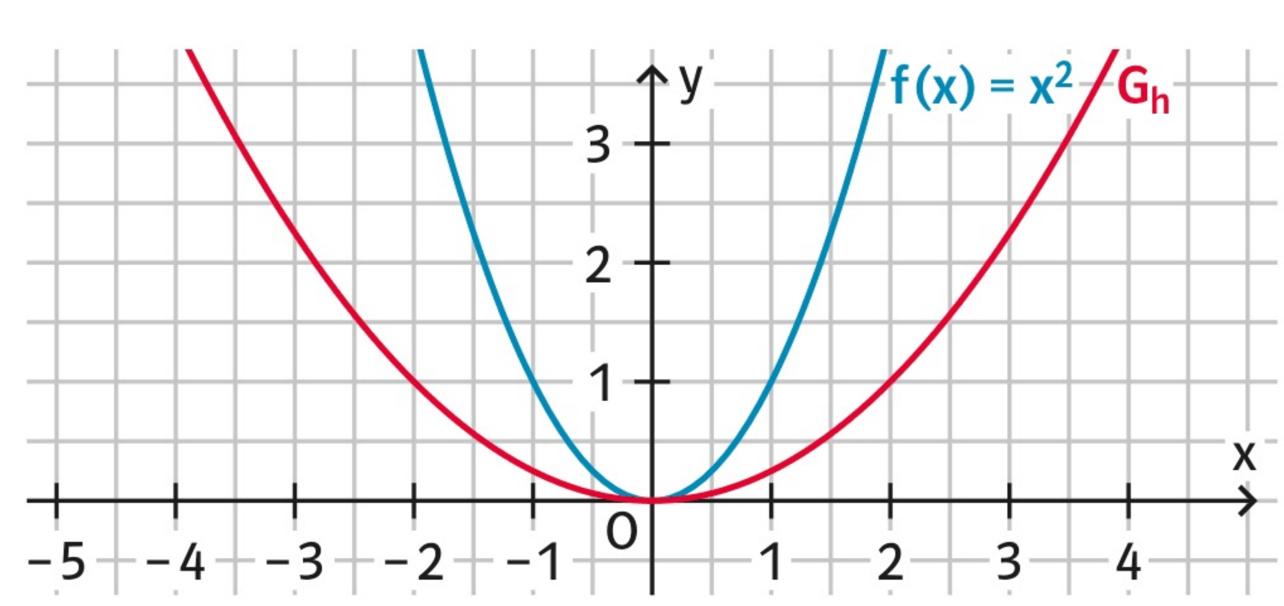
a) um 2 in x-Richtung und um 4 in y-Richtung verschoben wird,

b) mit dem Faktor 2 in x-Richtung gestreckt und um −3 in y-Richtung verschoben wird.

5 Der Graph der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ wird gestreckt bzw. verschoben, wodurch die Graphen der Funktionen g und h entstehen. Bestimmen Sie mögliche Funktionsterme der Funktionen g und h.



6 Marian sagt: „Der Graph von h ist aus der Normalparabel durch Streckung in x-Richtung hervorgegangen."
Aysun sagt: „Der Graph von h ist aus der Normalparabel durch Streckung in y-Richtung hervorgegangen."
Begründen Sie, dass beide recht haben.



7 Die Funktion $f\colon x \mapsto 3^x$ hat an der Stelle $x = 1{,}5$ den Funktionswert $f(1{,}5) = 3^{1{,}5}$. Bestimmen Sie die Stelle, an welcher die Funktion g mit dem Funktionsterm g(x) den gleichen Funktionswert annimmt wie f an der Stelle $x = 1{,}5$. Beschreiben Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Graphen von f und g besteht. Überprüfen Sie dies mit einer dynamischen Mathematiksoftware, indem Sie mithilfe von Schiebereglern den Graphen von f verschieben bzw. strecken.

a) $g(x) = 3 \cdot 3^x$ b) $g(x) = 3^{2x}$ c) $g(x) = 3^{x-2}$

d) $g(x) = 3^{0{,}1x}$ e) $g(x) = 3^x + 1$ f) $g(x) = \sqrt{3}^{\,0{,}5x}$

$a \cdot f(x)$ oder $f(b \cdot x)$ kann man in eine dynamische Mathematiksoftware direkt eingeben, wenn $f(x)$ bereits eingegeben wurde.

8 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{-2}{x+3} - 1$ mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und anschließend um 2 in y-Richtung verschoben werden kann, um den Graphen von $g: x \mapsto \frac{-4}{x+3}$ zu erhalten. Beschreiben Sie, wie die Asymptoten von g aus denen von f hervorgehen.

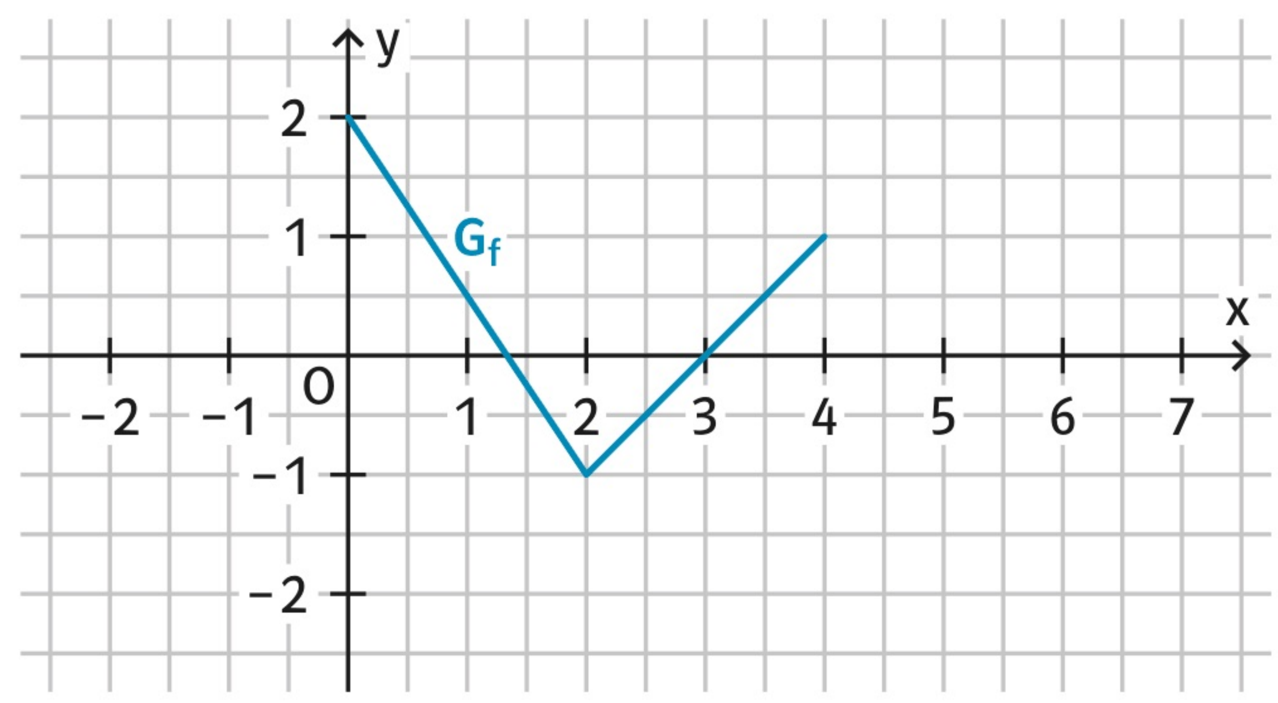
9 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 0{,}5^x$. Der Graph der Funktion f_1 ergibt sich aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 2 in x-Richtung. Der Graph der Funktion f_2 ergibt sich aus dem Graphen von f durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 4. Begründen Sie rechnerisch, dass die Graphen von f_1 und f_2 identisch sind.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

10 Die Funktion f, deren Graph abgebildet ist, ist im Bereich [0; 4] definiert. Übertragen Sie den Graphen in Ihr Heft und zeichnen Sie dazu den Graphen der angegebenen Funktion. Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der angegebenen Funktion an.

a) $g: x \mapsto 2f(x)$ b) $h: x \mapsto f(x-2) + 3$

c) $m: x \mapsto f(2x)$ d) $n: x \mapsto f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$



11 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sin(x)$.

a) Geben Sie drei unterschiedliche Werte für c an, sodass $\cos(x) = \sin(x + c)$ gilt, wobei zwei dieser Werte positiv sind und einer negativ ist.

b) Der Graph von f wird in y-Richtung mit dem Faktor 3 und in x-Richtung mit dem Faktor 0,5 gestreckt. Dabei entsteht der Graph einer Funktion g. Geben Sie den Funktionsterm von g in Abhängigkeit von f(x) sowie die Amplitude und Periodenlänge von g an.

c) Der Graph von f wird in x-Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt und in y-Richtung um −1 verschoben. Dabei entsteht der Graph einer Funktion h. Geben Sie den Funktionsterm von h in Abhängigkeit von f(x) sowie die Amplitude und Periodenlänge von h an.

d) Stellen Sie sich gegenseitig die Aufgabe, den Funktionsterm einer Funktion k zu finden, deren Graph aus einer von Ihnen vorgegebenen Verschiebung bzw. Streckung der Sinuskurve hervorgeht.

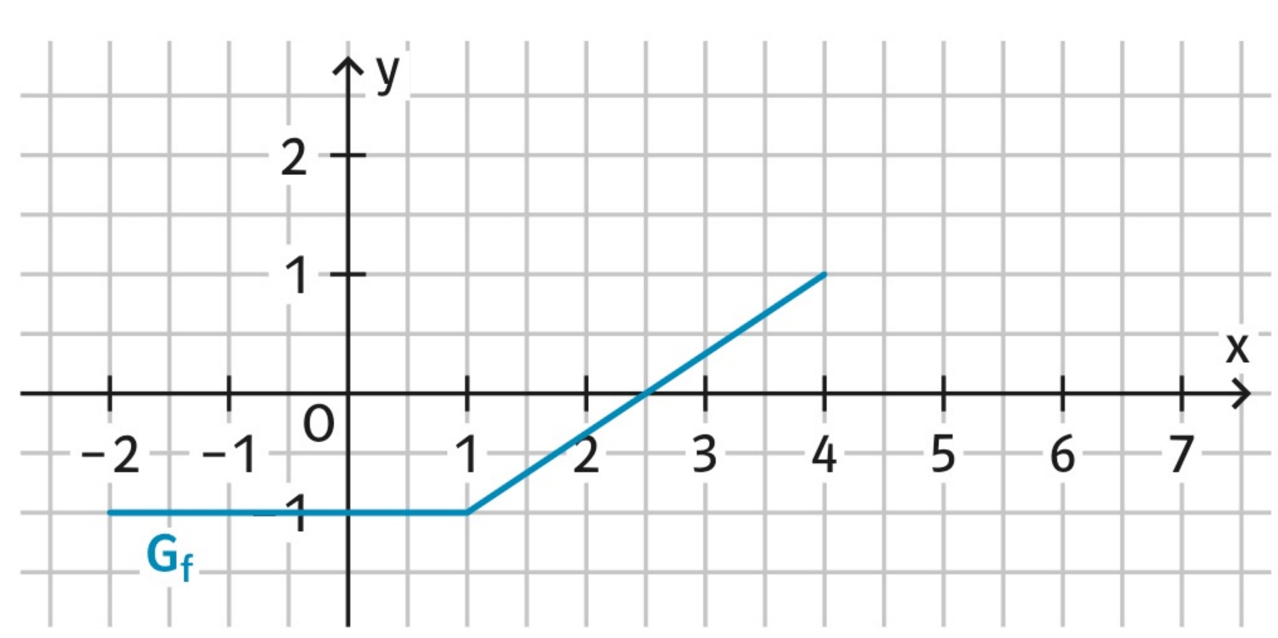
Test 2

Lösungen | Seite 197

12 Die Funktion f, deren Graph abgebildet ist, ist im Bereich [−2; 4] definiert. Zeichnen Sie den Graphen der angegebenen Funktion und geben Sie auch deren Definitions- und Wertemenge an.

a) $g: x \mapsto 2 \cdot f(x) + 1$ b) $h: x \mapsto f(x-2) - \frac{3}{2}$

c) $m: x \mapsto f(2x) - 1$ d) $n: x \mapsto 3 \cdot f\left(\frac{1}{2}x\right)$



13 Stellen Sie den Term g(x) der Funktion g in der Form $g(x) = a \cdot f(b(x + c)) + d$ dar und beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f gestreckt bzw. verschoben werden muss, um den Graphen von g zu erhalten.

a) $f(x) = x^2,\ g(x) = 2x^2 + 4x + 2$ b) $f(x) = \frac{2}{x},\ g(x) = \frac{4}{2x+1} + 4$

Beispiel:
$f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{0{,}5x - 1}$
$g(x) = \frac{1}{0{,}5(x-2)} = \frac{2}{x-2}$
$= 2f(x-2)$

Grundwissen Test

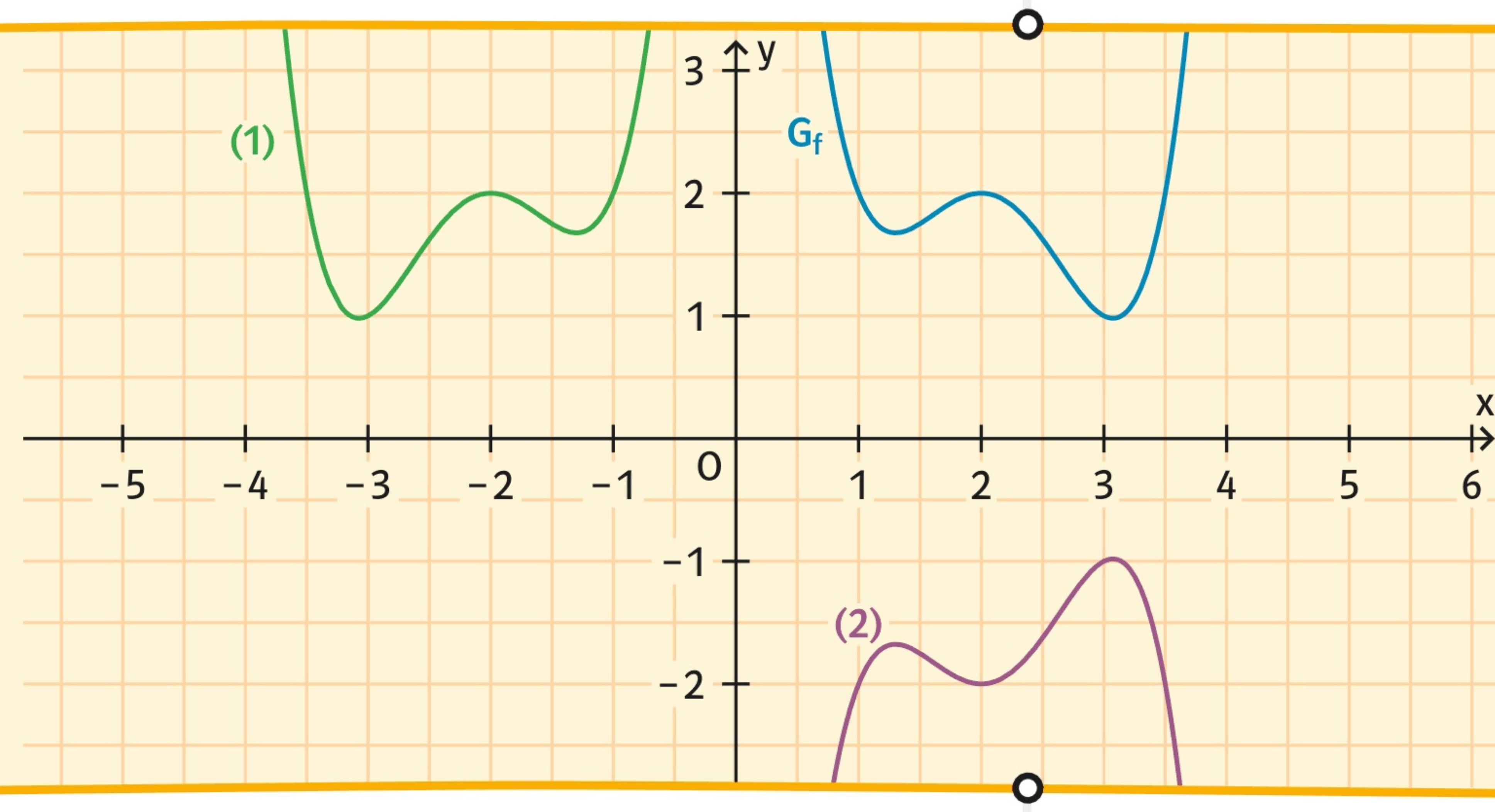
Lösungen | Seite 197

G 14 Fassen Sie den Term zu einem Bruch zusammen und vereinfachen Sie diesen anschließend.

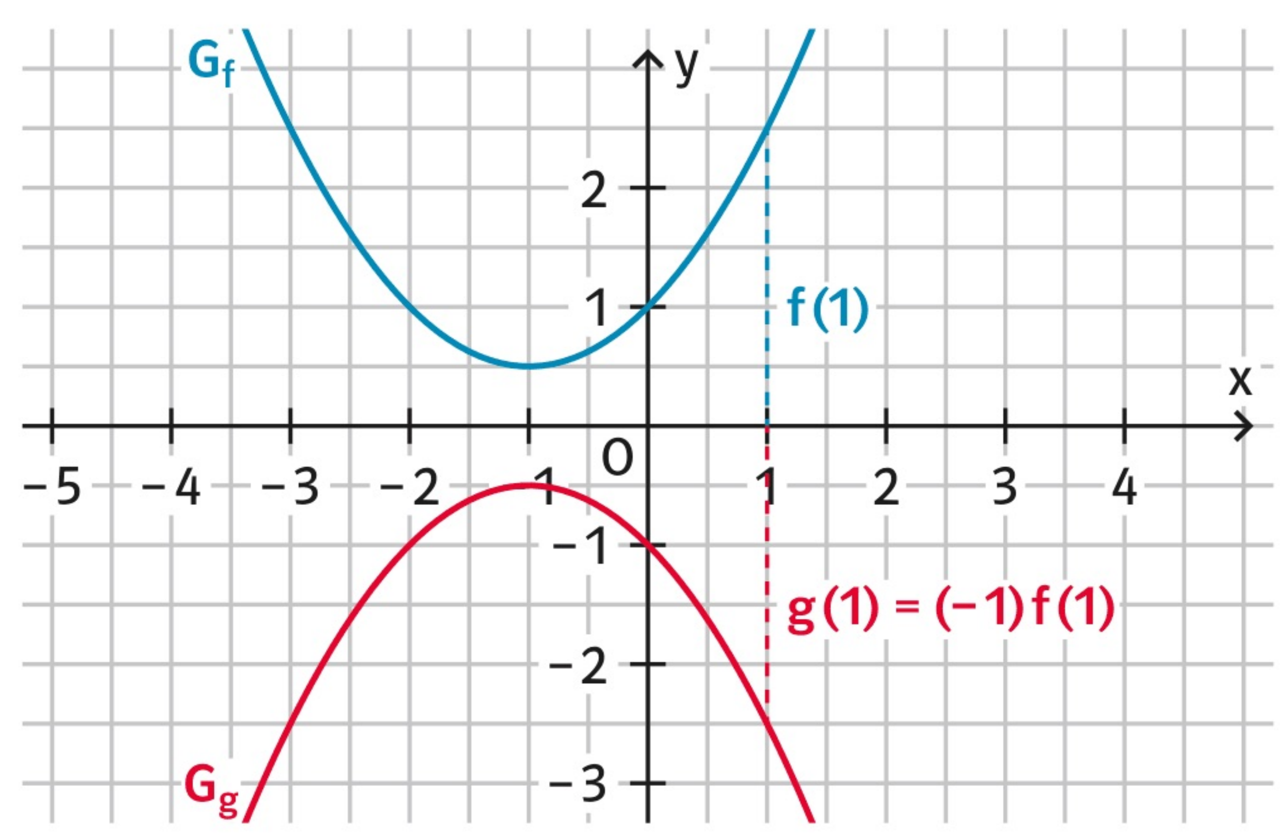
a) $\frac{5x-2}{2x+1} + \frac{2-4x}{2x+1}$ b) $\frac{2x^2-1}{x^2+1} + 3$ c) $4x + \frac{8x}{x-2}$ d) $x - 1 - \frac{3}{x+1}$

4 Spiegeln von Funktionsgraphen

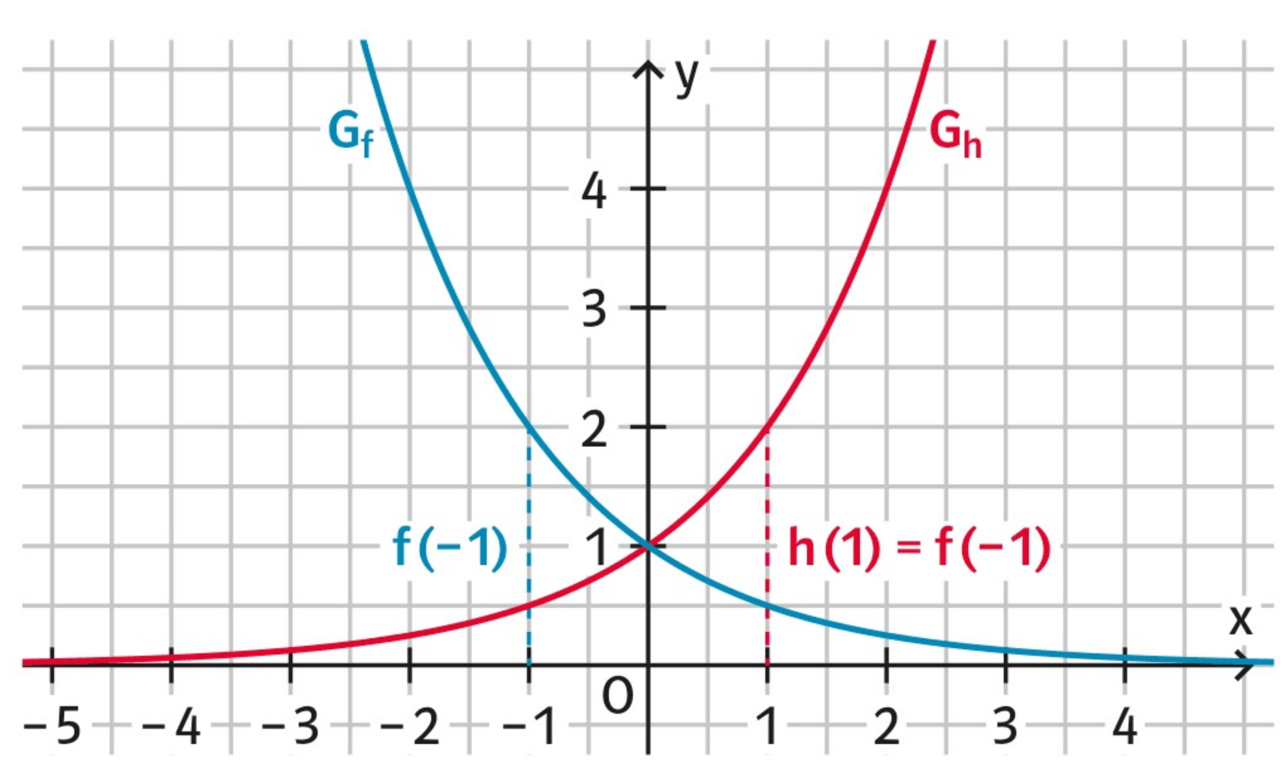
Gegeben sind die Funktion
f: $x \mapsto x^4 - 8{,}5x^3 + 25{,}5x^2 - 32x + 16$
und ihr Graph G_f.
Überprüfen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware, welcher der beiden zusätzlich eingezeichneten Graphen zur Funktion
g: $x \mapsto -f(x)$ beziehungsweise zur Funktion
h: $x \mapsto f(-x)$ gehört.
Erläutern Sie den Zusammenhang der Graphen von f und g bzw. von f und h.



Beim Strecken des Graphen einer Funktion f: $x \mapsto f(x)$ in y-Richtung mit dem Faktor a entsteht der Graph einer Funktion g: $x \mapsto a \cdot f(x)$, wobei a bisher positiv war. Jetzt wird die Änderung des Graphen für $a = -1$ untersucht.
Die Funktionsterme der Funktionen
f: $x \mapsto \quad 0{,}5x^2 + x + 1$ und
g: $x \mapsto (-1)(0{,}5x^2 + x + 1)$ unterscheiden sich nur durch den Vorfaktor (-1).
Es gilt $g(x) = (-1) \cdot f(x)$.
Die Funktionswerte von g erhält man somit, indem man die Funktionswerte von f mit (-1) multipliziert. Damit erhält man den Graphen von g durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse.

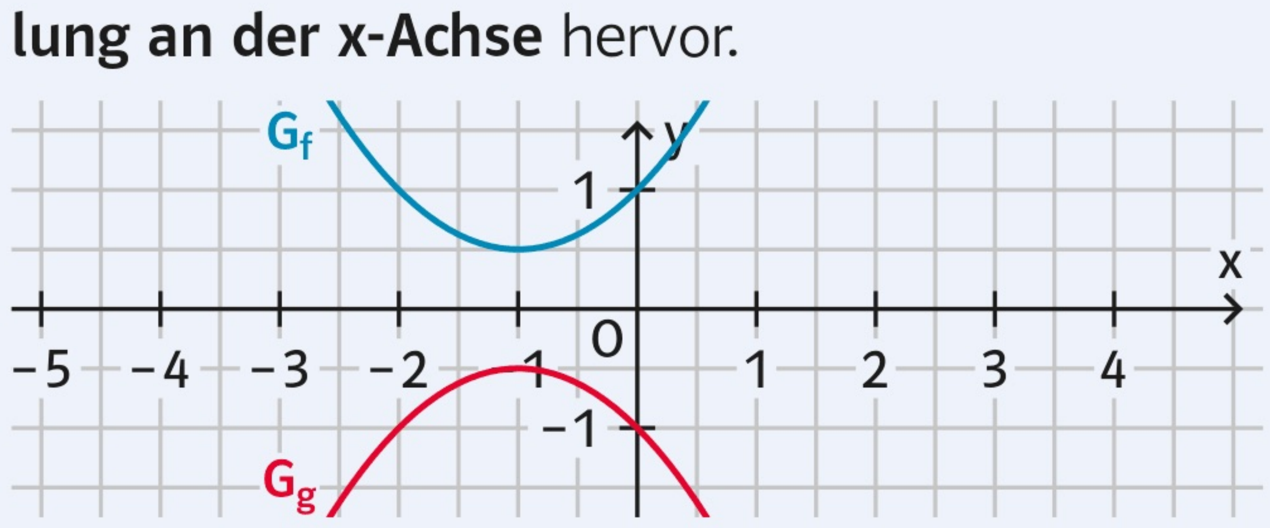


Beim Strecken des Graphen der Funktion f: $x \mapsto f(x)$ in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ entsteht der Graph von h: $x \mapsto f(bx)$, wobei b bisher positiv war. Jetzt wird die Änderung des Graphen für $b = -1$ untersucht.
Die Funktionsterme der Funktionen
f: $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ und h: $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Arguments.
Es gilt $h(x) = f(-x)$.
Der Funktionswert von h an der Stelle x ist also gleich dem Funktionswert von f an der Stelle $-x$. Damit erhält man den Graphen von h durch Spiegelung des Graphen von f an der y-Achse.

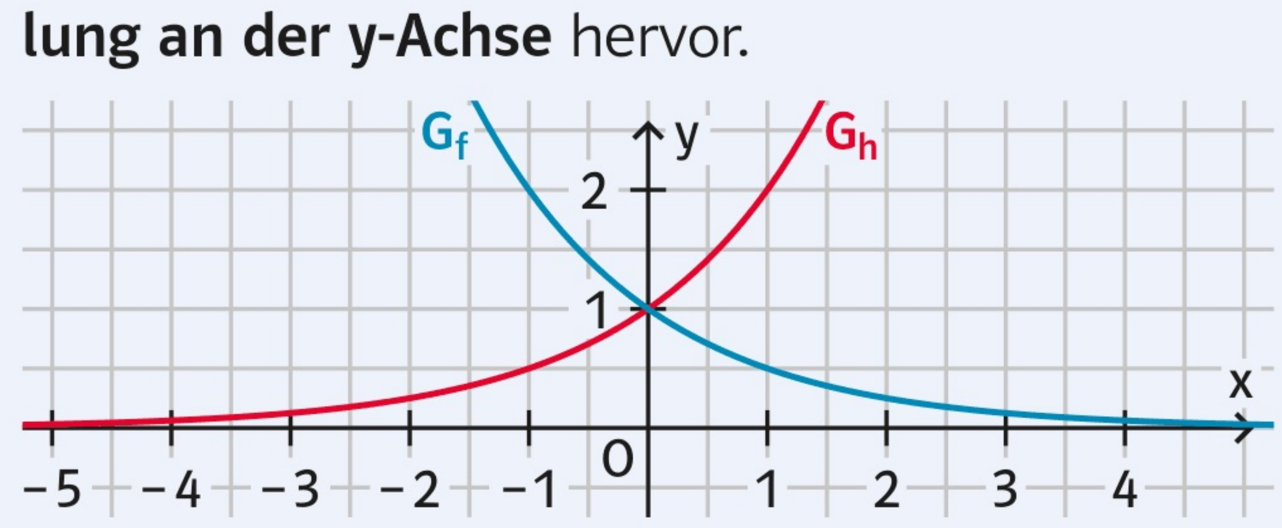


Zur Erinnerung:
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$

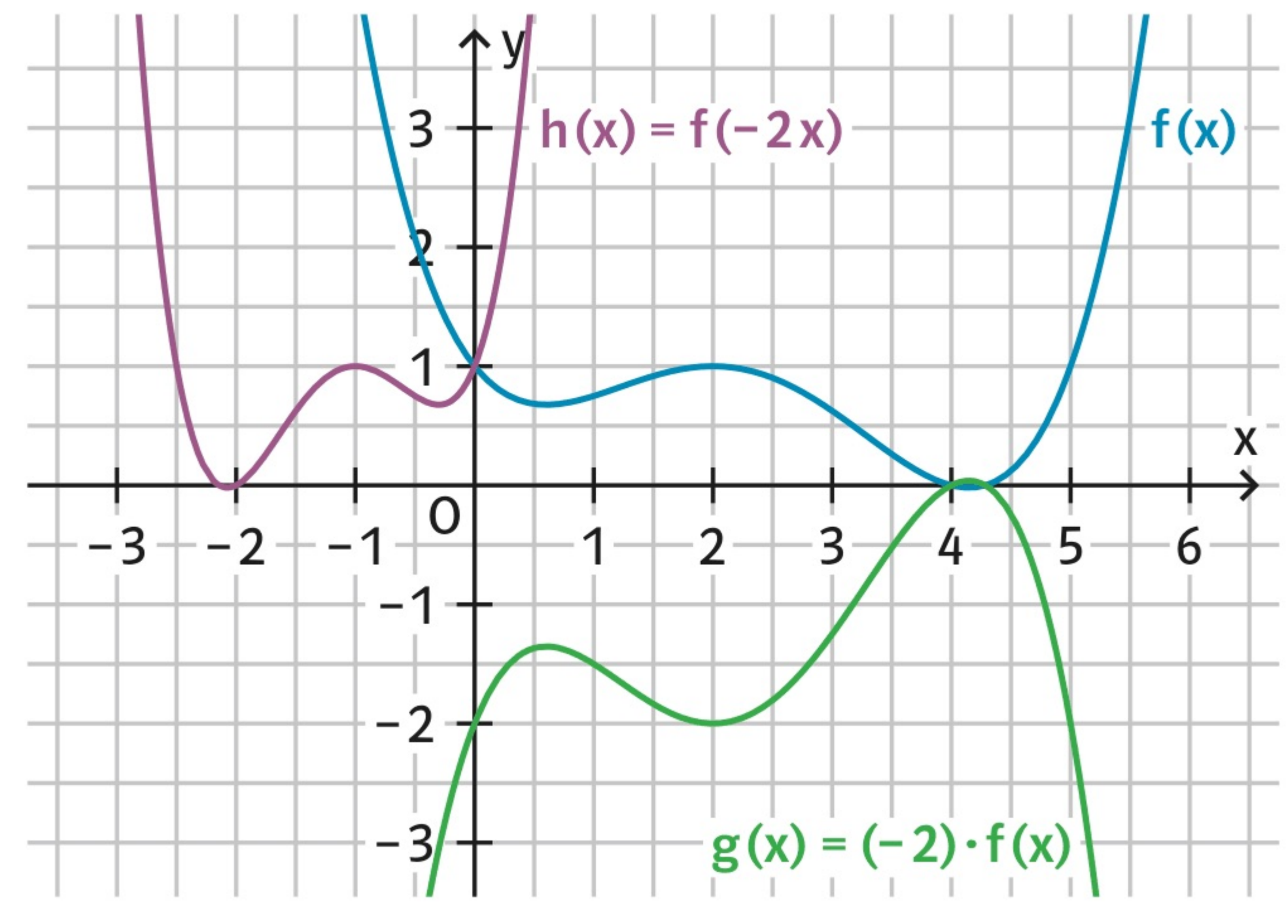
Der Graph der Funktion g mit $\mathbf{g(x) = -f(x)}$ geht aus dem Graphen von f durch **Spiegelung an der x-Achse** hervor.



Der Graph der Funktion h mit $\mathbf{h(x) = f(-x)}$ geht aus dem Graphen von f durch **Spiegelung an der y-Achse** hervor.

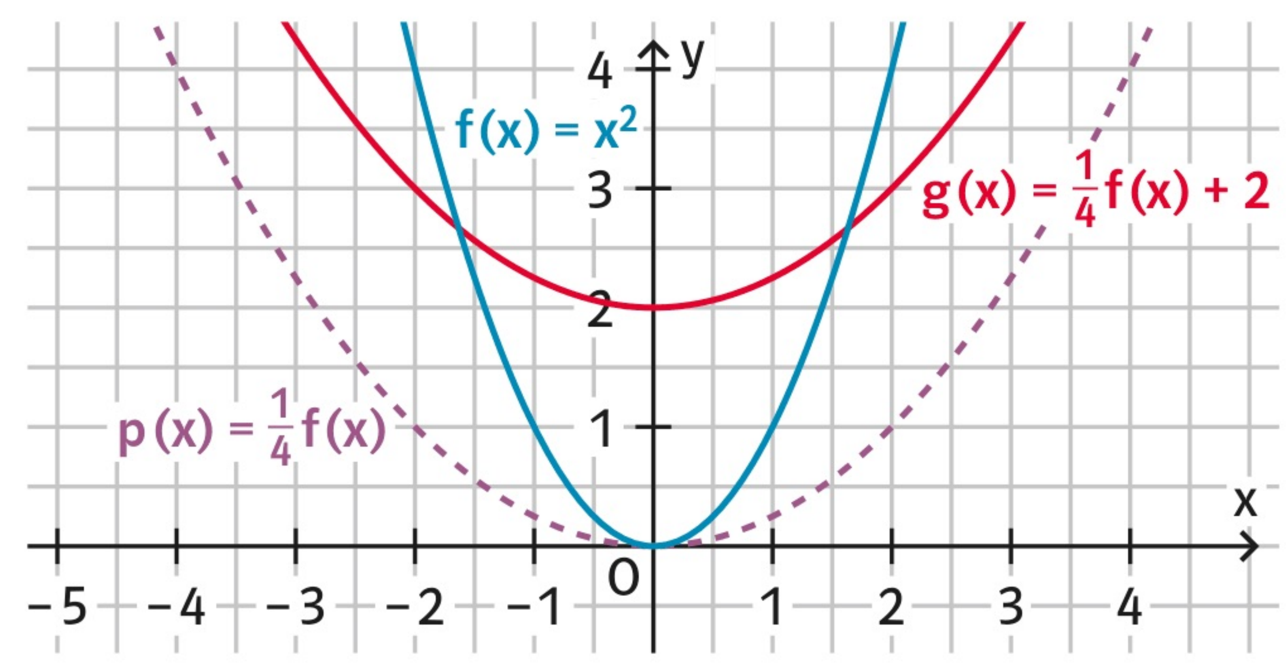


Bemerkung:
Ist ein Streckfaktor negativ, so liegt zusätzlich zur Streckung eine Spiegelung vor.
So bedeutet $g(x) = (-2) \cdot f(x)$: G_g entsteht aus G_f durch Spiegelung von G_f an der x-Achse und zusätzliche Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung.
Es bedeutet $h(x) = f(-2x)$: G_h entsteht aus G_f durch Spiegelung von G_f an der y-Achse und zusätzliche Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung.



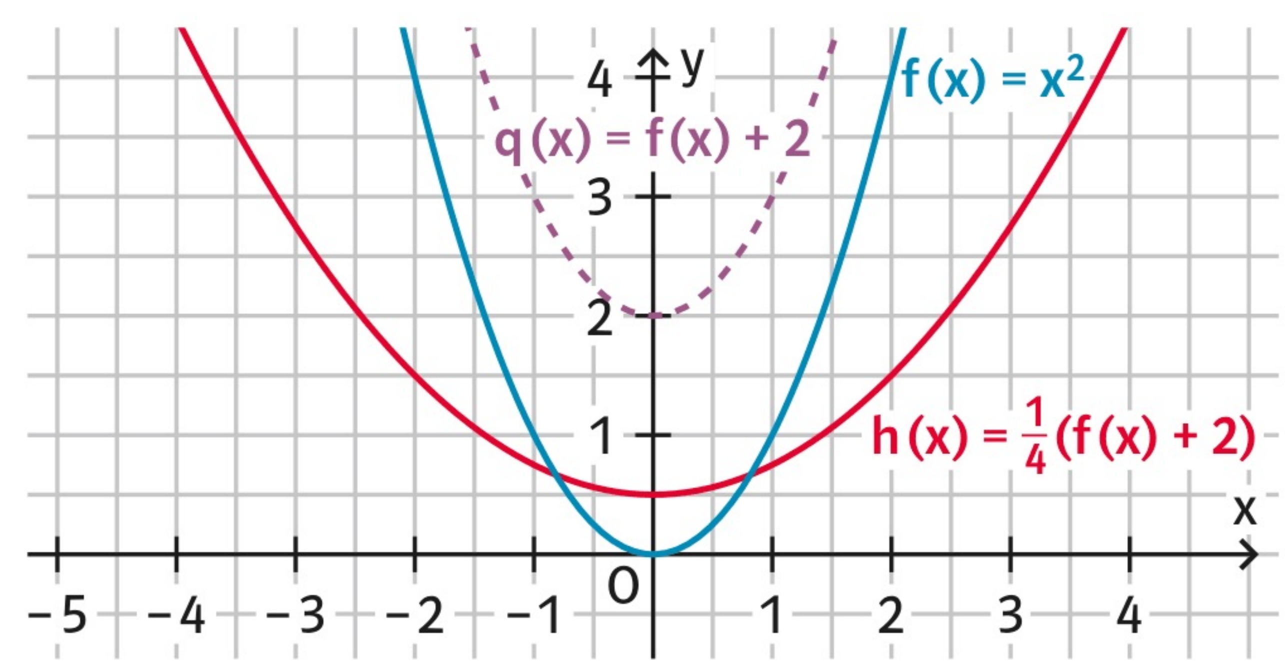
Vertauschen der Reihenfolge von Streckung und Verschiebung
Der Graph der Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{4}f(x) + 2$ geht aus dem Graphen von $f: x \mapsto x^2$ in zwei Schritten hervor:
(1) Streckung von G_f in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$. Man erhält G_p mit $p: x \mapsto \frac{1}{4}f(x)$.
(2) Verschiebung von G_p in y-Richtung um 2. Man erhält G_g mit $g: x \mapsto p(x) + 2$.

$g(x) = p(x) + 2 = \frac{1}{4}f(x) + 2 = \frac{1}{4}x^2 + 2.$



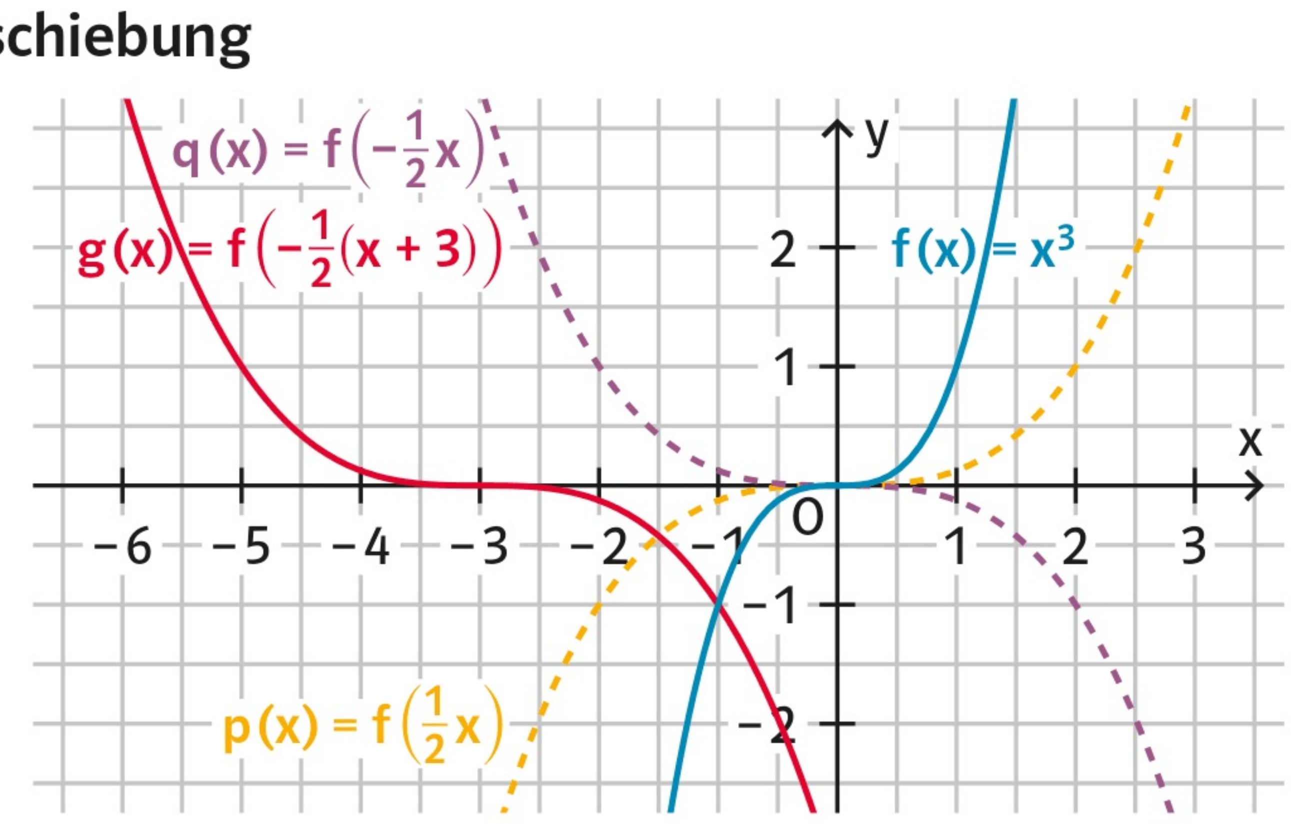
Vertauscht man die Reihenfolge von Streckung und Verschiebung, so ergibt sich ein anderer Graph.
(1) Verschiebung von G_f in y-Richtung um 2. Man erhält G_q mit $q: x \mapsto f(x) + 2$.
(2) Streckung von G_q in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$. Man erhält G_h mit $h: x \mapsto \frac{1}{4}q(x)$.

$h(x) = \frac{1}{4}q(x) = \frac{1}{4}(f(x) + 2) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}.$



Das Vertauschen der Reihenfolge von Streckung und Verschiebung in y-Richtung führt somit zu unterschiedlichen Graphen und Funktionstermen. Entsprechendes gilt für Streckung und Verschiebung in x-Richtung.

Kombination von Streckung, Spiegelung und Verschiebung
Der Graph der Funktion $g: x \mapsto f\left(-\frac{1}{2}(x + 3)\right)$ entsteht aus dem Graphen von $f: x \mapsto x^3$ in drei Schritten:
(1) Streckung von G_f in x-Richtung mit dem Faktor 2. Man erhält G_p mit $p: x \mapsto f\left(\frac{1}{2}x\right)$.
(2) Spiegelung von G_p an der y-Achse. Man erhält G_q mit $q: x \mapsto p(-x)$; $q(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.
(3) Verschiebung von G_q um −3 in x-Richtung. Man erhält G_g mit $g: x \mapsto q(x + 3)$.



$g(x) = q(x + 3) = f\left(-\frac{1}{2}(x + 3)\right) = \left(-\frac{1}{2}(x + 3)\right)^3 = -\frac{1}{8}(x^3 + 3x^2 + 9x + 27).$

Da $p(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ ist, gilt $p(-x) = f\left(\frac{1}{2}(-x)\right)$.
Da $q(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ ist, gilt $q(x + 3) = f\left(-\frac{1}{2}(x + 3)\right)$.

Die ersten beiden Schritte können in der Reihenfolge vertauscht werden. Der dritte Schritt muss unbedingt am Ende stehen, da sonst ein Graph entsteht, der nicht zu g gehört. Entsprechende Überlegungen können auf die y-Richtung übertragen werden. Erst strecken oder spiegeln, dann verschieben.
Liegt der Term einer Funktion g in Abhängigkeit vom Term f(x) einer Funktion f in der Form $g(x) = a \cdot f(b(x + c)) + d$ vor, dann erhält man den Graphen von g, indem man den Graphen zunächst streckt oder spiegelt und anschließend verschiebt.



Erst strecken oder spiegeln, dann verschieben.

Beispiel 1

Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht.

a) $g: x \mapsto -f(x+1)$ b) $g: x \mapsto f(-2x) - 1$

c) $f: x \mapsto \frac{4}{x}$; $g: x \mapsto \frac{-4}{x} + 2$ d) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto -x^2 + 2x - 1$

Lösung

a) G_f wird an der x-Achse gespiegelt und dann um −1 in x-Richtung verschoben.

b) G_f wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung gestreckt, an der y-Achse gespiegelt und dann um −1 in y-Richtung verschoben.

c) Da $g: x \mapsto -f(x) + 2$ gilt, wird G_f an der x-Achse gespiegelt und dann um 2 in y-Richtung verschoben.
Alternativ gilt hier $g: x \mapsto f(-x) + 2$. Das heißt, in diesem speziellen Fall erzeugt eine Spiegelung von G_f an der x-Achse bzw. an der y-Achse den gleichen Graphen.

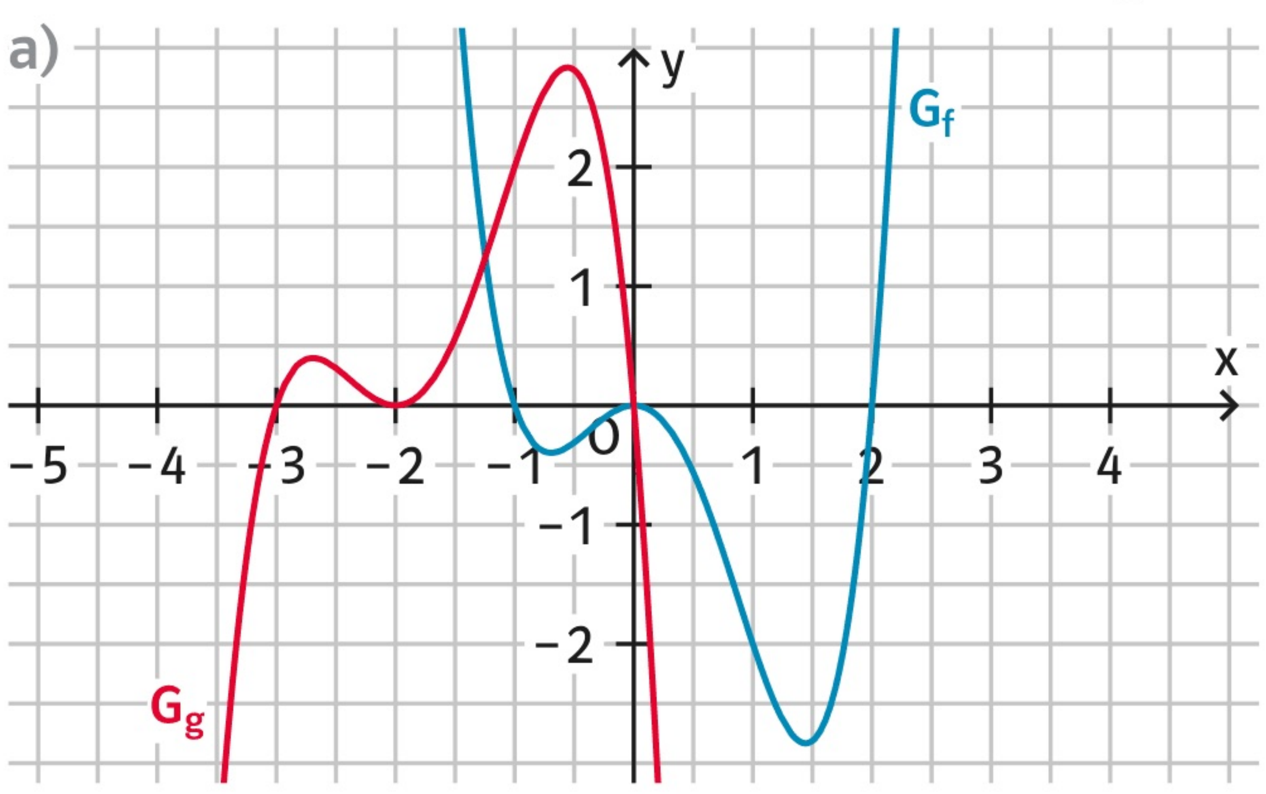
d) Da $g(x) = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$ gilt, wird G_f an der x-Achse gespiegelt und dann um 1 in x-Richtung verschoben.

„Um −1 in x-Richtung verschieben" ist gleichwertig zu „um 1 in negative x-Richtung verschieben".

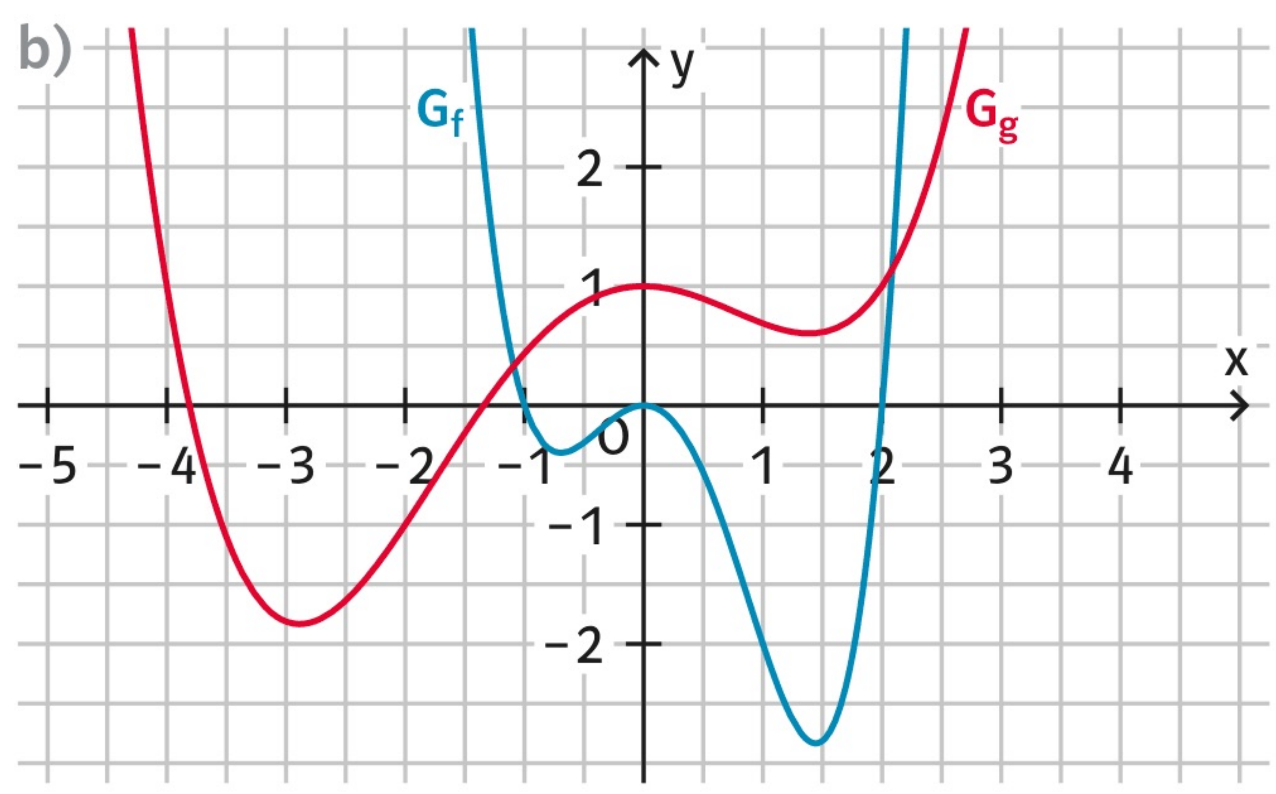
Beispiel 2

Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^4 - x^3 - 2x^2$ hervor. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g.

a)



b)



Lösung

a) G_f wird an der x-Achse gespiegelt und anschließend um −2 in x-Richtung verschoben.
Also gilt $g(x) = -f(x+2) = -((x+2)^4 - (x+2)^3 - 2(x+2)^2)$.

b) G_f wird an der y-Achse gespiegelt, mit dem Faktor 2 in x-Richtung gestreckt und anschließend um 1 in y-Richtung verschoben.
Also gilt $g(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right) + 1 = \left(-\frac{1}{2}x\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + 1 = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Aufgaben

1 Geben Sie zu der Funktion f jeweils Funktionsterme der Funktionen g bzw. h an, deren Graphen durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse bzw. an der y-Achse entstehen.

a) $f: x \mapsto \frac{1}{x-2}$ b) $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 3x + 5$ c) $f: x \mapsto 2^x$

d) $f: x \mapsto \sin(x)$ e) $f: x \mapsto (x-1)^2 \cdot (x^2 - 1)$ f) $f: x \mapsto 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$.

a) Ermitteln Sie gemeinsam die Funktionsterme der Funktionen $g: x \mapsto -f(x)$, $h: x \mapsto g(-x)$, $k: x \mapsto -h(x)$ und $t: x \mapsto k(-x)$ und erklären Sie sich gegenseitig, wie jeweils der zugehörige Graph aus dem vorhergehenden entsteht.

b) Zeichnen Sie mit einem Funktionenplotter die Graphen von f, g, h, k und t und überprüfen Sie damit Ihre Erklärungen aus Teilaufgabe a).

3 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion

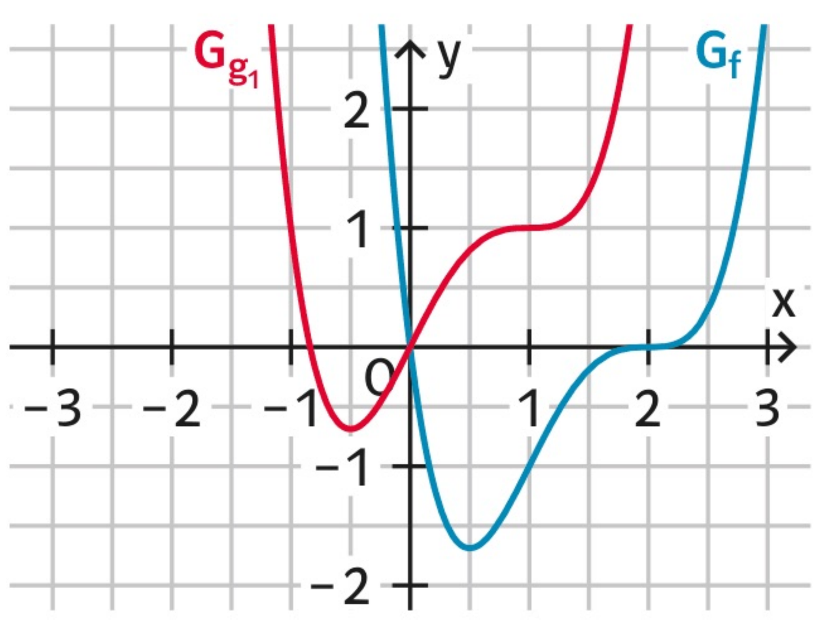
a) $h: x \mapsto (-2)\sin(x + \pi)$ aus dem Graphen der Sinusfunktion hervorgeht,

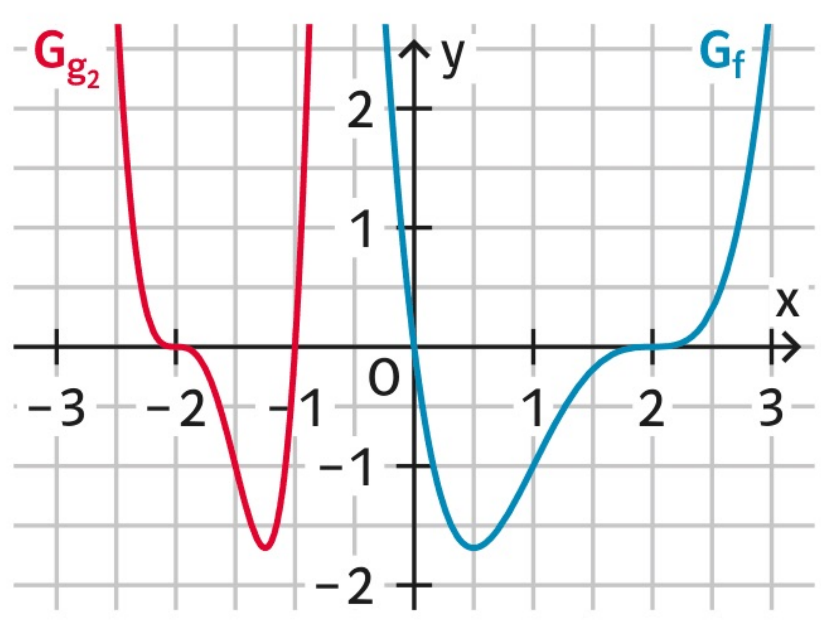
b) $k: x \mapsto 0{,}5 \cdot \cos(-2(x+1))$ aus dem Graphen der Kosinusfunktion hervorgeht,

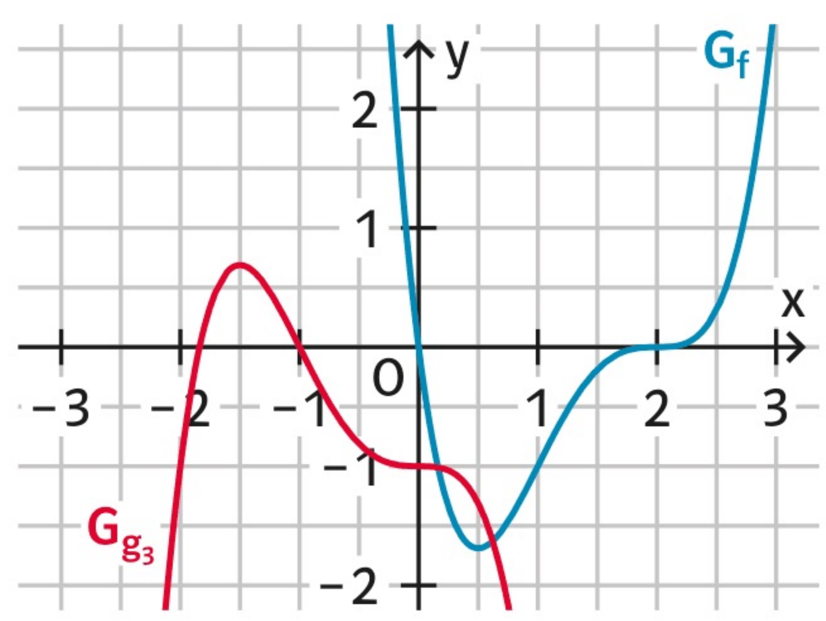
c) $l: x \mapsto -0{,}5 \cdot 2^{x+3}$ aus dem Graphen der Funktion q mit $q: x \mapsto 2^x$ hervorgeht.

4 Der Graph von g geht aus dem der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x-2} + 1$ hervor. Skizzieren Sie G_f und G_g. Geben Sie einen Funktionsterm von g und die Gleichungen der Asymptoten von G_g an. G_f wird zuerst
a) an der x-Achse gespiegelt und anschließend um −2 in x-Richtung verschoben,
b) an der y-Achse gespiegelt und anschließend um 2 in x-Richtung verschoben,
c) an der x-Achse gespiegelt, mit dem Faktor 2 in x-Richtung gestreckt und anschließend um −3 in x-Richtung verschoben.

5 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto x \cdot (x-2)^3$ und $g: x \mapsto a \cdot f(b(x+c)) + d$ mit den reellen Parametern a, b, c und d.
a) Ändern Sie in einer dynamischen Mathematiksoftware mithilfe von Schiebereglern die Werte eines jeden einzelnen Parameters und beschreiben Sie, wie sich dabei der Graph von g ändert.
b) Bestimmen Sie mithilfe von Schiebereglern die Werte der Parameter so, dass die abgebildeten Graphen jeweils zu einer der Funktionen g_1, g_2 oder g_3 gehören.







Test 1

Lösungen | Seite 197

6 Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto 2^x$ hervor. Skizzieren Sie G_f und G_g. Geben Sie einen Funktionsterm von g an. G_f wird
a) an der x-Achse gespiegelt,
b) an der y-Achse gespiegelt und anschließend um 3 in x-Richtung verschoben,
c) an der y-Achse gespiegelt und mit dem Faktor 2 in x-Richtung gestreckt.

7 a) Erläutern Sie an einer selbst gewählten Funktion f mit $x \mapsto f(x)$, dass die Reihenfolge, in der der Graph von f mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und um −1 in y-Richtung verschoben wird, zu unterschiedlichen Graphen G_g und G_h führt. Geben Sie die Funktionsterme von g und h an.
b) Erläutern Sie an einer selbst gewählten Funktion f mit $x \mapsto f(x)$, dass die Reihenfolge, in der der Graph von f an der y-Achse gespiegelt und um −2 in x-Richtung verschoben wird, zu unterschiedlichen Graphen G_p und G_q führt. Geben Sie die Funktionsterme von p und q an.

8 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^3 - 4x + 1$.
Erklären Sie sich gegenseitig, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen von f durch Strecken, Spiegeln oder Verschieben hervorgeht. Überprüfen Sie Ihre Erläuterungen gegenseitig mit einem Funktionenplotter.
a) $g: x \mapsto x^3 - 4x - 1$
b) $g: x \mapsto -x^3 + 4x - 1$
c) $g: x \mapsto -x^3 + 4x + 1$
d) $g: x \mapsto 8x^3 - 8x + 1$
e) $g: x \mapsto -2x^3 + 8x - 2$
f) $g: x \mapsto (x+1)^3 - 4(x+1)$

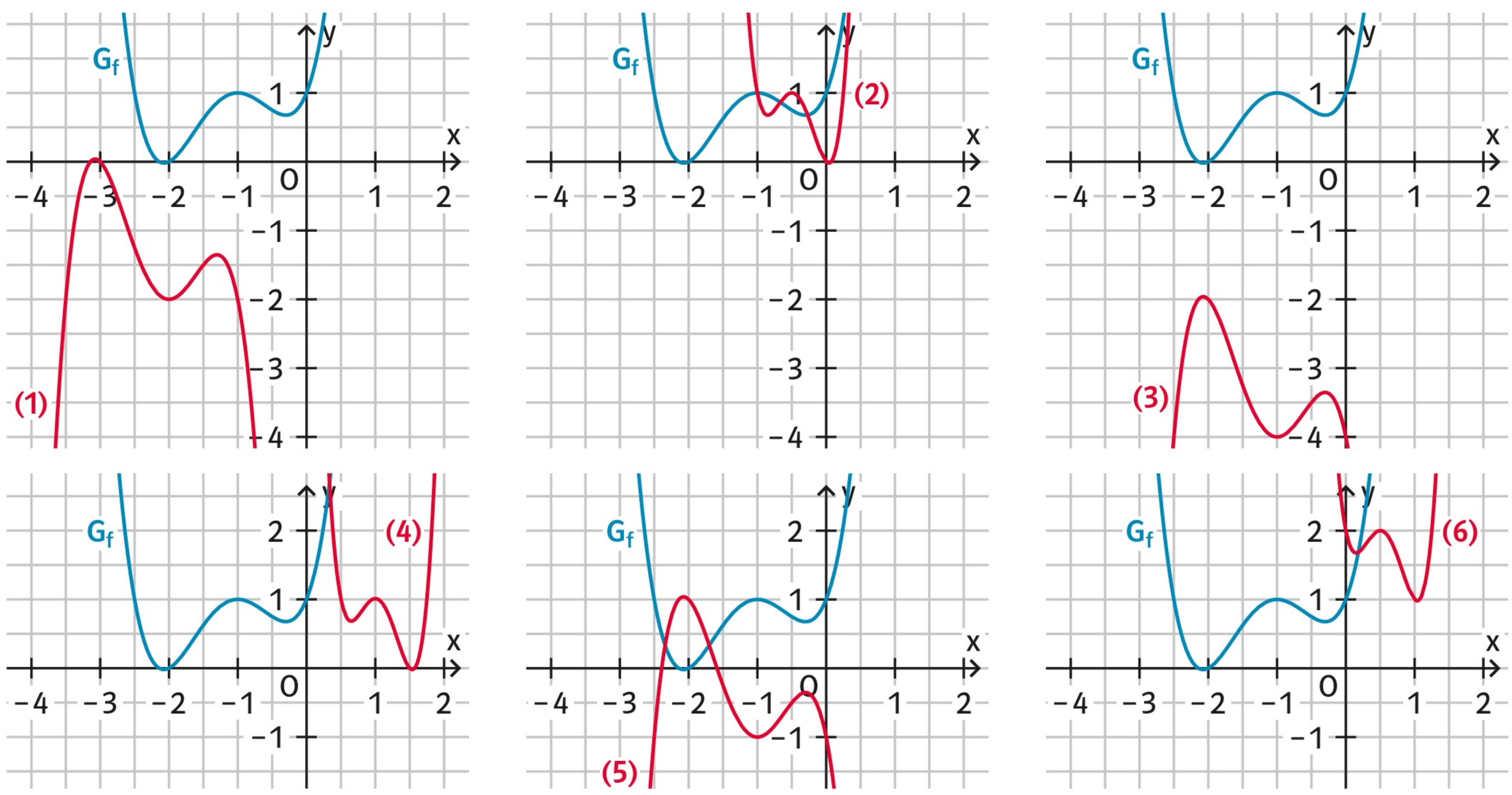
9 Zeigen Sie, dass der Graph von
a) $g: x \mapsto -x^3 - 2x^2 - x$ aus dem Graphen von $f: x \mapsto x^2(x-1)$ durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um −1 in x-Richtung hervorgeht,
b) $g: x \mapsto -\frac{2}{x}$ aus dem Graphen von $f: x \mapsto \frac{1}{x-1}$ durch Spiegelung an der x-Achse, Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und Verschiebung um −1 in x-Richtung hervorgeht,
c) $g: x \mapsto \left(\frac{1}{9}\right)^x - 1$ aus dem Graphen von $f: x \mapsto 3^x$ durch Spiegelung an der y-Achse, Streckung mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung und Verschiebung um −1 in y-Richtung hervorgeht.

10 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^4 + 4{,}5x^3 + 6x^2 + 2{,}5x + 1$.

a) Beschreiben Sie, wie die Graphen der Funktionen aus dem Graphen von f hervorgehen, und ordnen Sie jedem roten Graphen eine dieser Funktionen zu.

$g: x \mapsto -2f(x) + 1$ $h: x \mapsto -2(f(x) + 1)$ $k: x \mapsto f(-2x) + 1$

$l: x \mapsto f(-2(x + 1))$ $m: x \mapsto -2f(x + 1)$ $n: x \mapsto f(-2x + 1)$



b) 💻 Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a) mit einem Funktionenplotter.

Zur Erinnerung:
$a \cdot f(x)$ oder $f(b \cdot x)$ kann man in eine dynamische Mathematiksoftware direkt eingeben, wenn $f(x)$ bereits eingegeben wurde.

11 💻 Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ durch eine Spiegelung an der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ hervor. Die beschriebene Spiegelung von G_f kann durch eine Spiegelung von G_f an der y-Achse mit einer anschließenden Verschiebung ersetzt werden. Bestimmen Sie mithilfe dieser Überlegung einen Funktionsterm von g und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem Funktionenplotter.

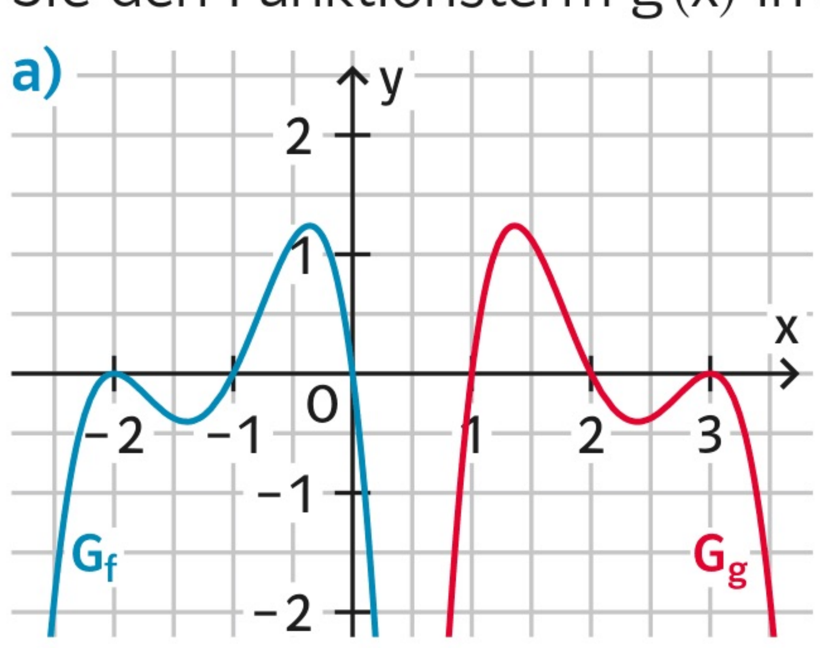
Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Test 2

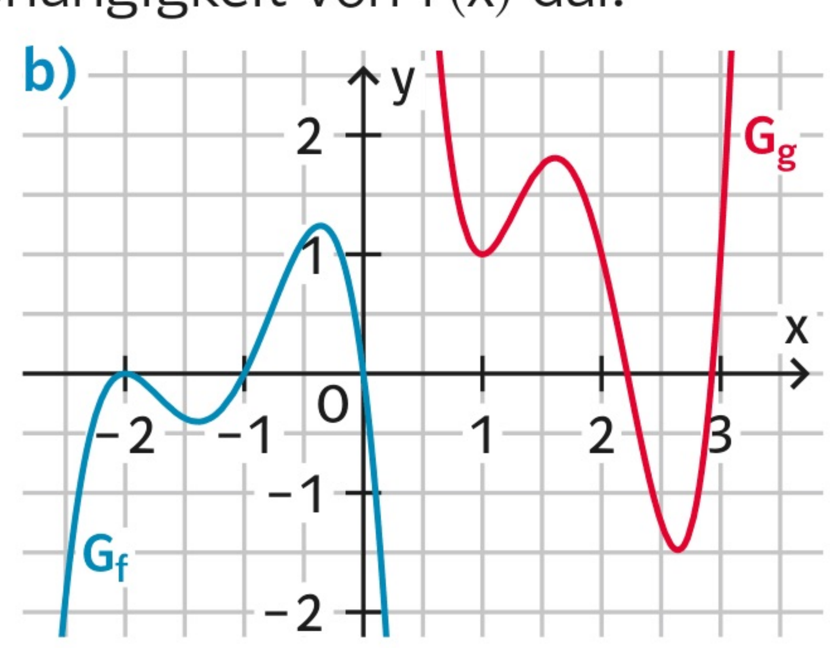
Lösungen | Seite 197

12 Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von $f: x \mapsto f(x)$ hervorgeht, und stellen Sie den Funktionsterm $g(x)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ dar.

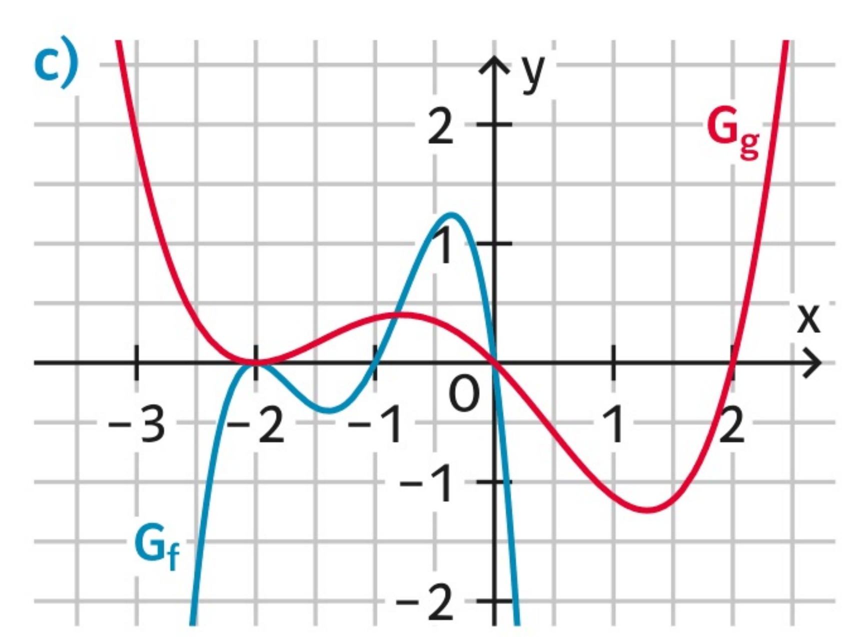
a)



b)



c)



13 Der Graph von h entsteht aus dem Graphen von f durch eine Spiegelung an einer Parallelen zur y-Achse mit der Gleichung $x = a,\ a > 0$. Begründen Sie, dass $h: x \mapsto f(-(x - 2a))$ gilt.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 198

G 14 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Hypotenuse $c = 8\,\text{cm}$ und die Kathete $b = 5\,\text{cm}$ lang.

a) Berechnen Sie die Länge der anderen Kathete.

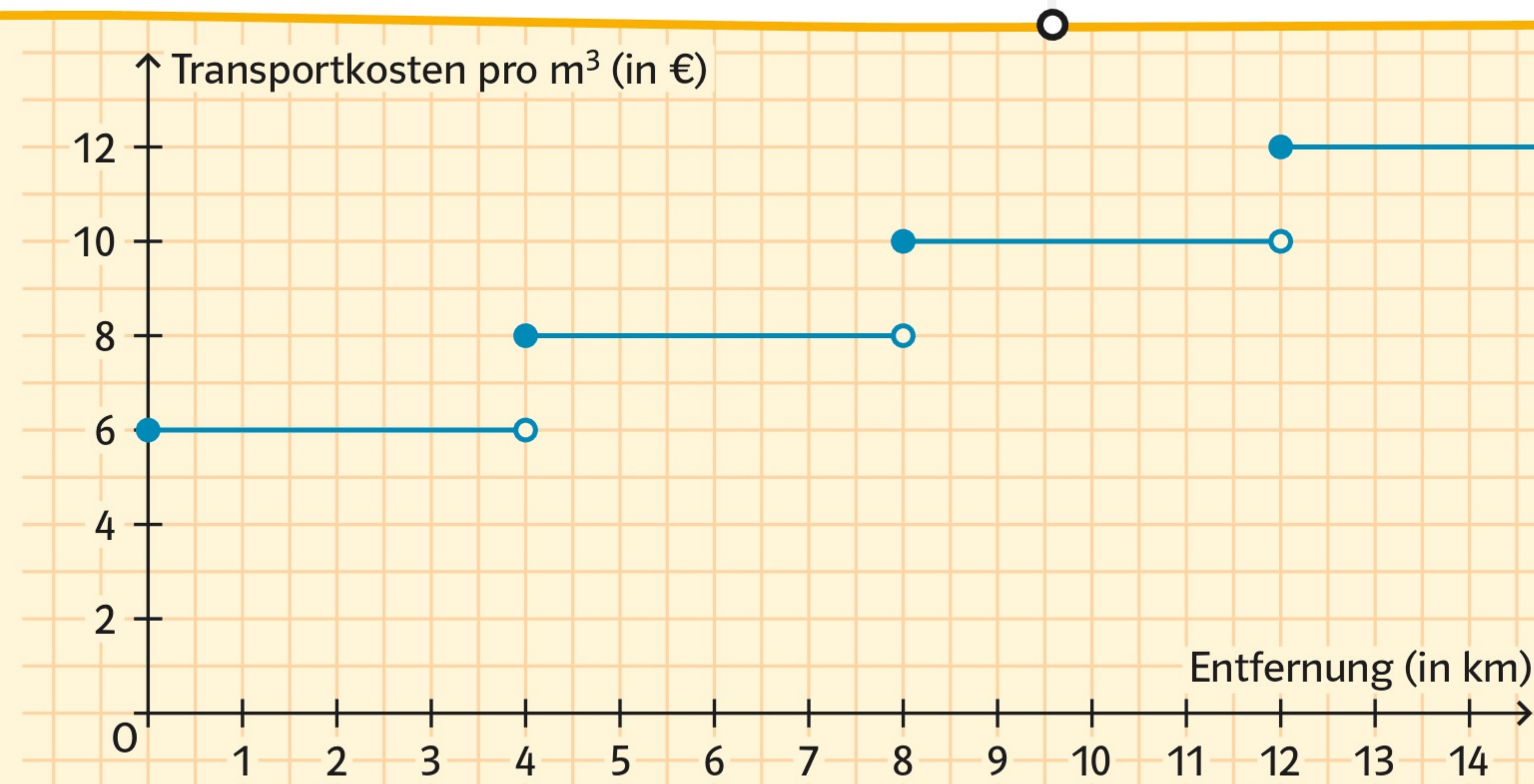
b) Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks auf jeweils zwei Dezimalen genau.

5 Stetigkeit

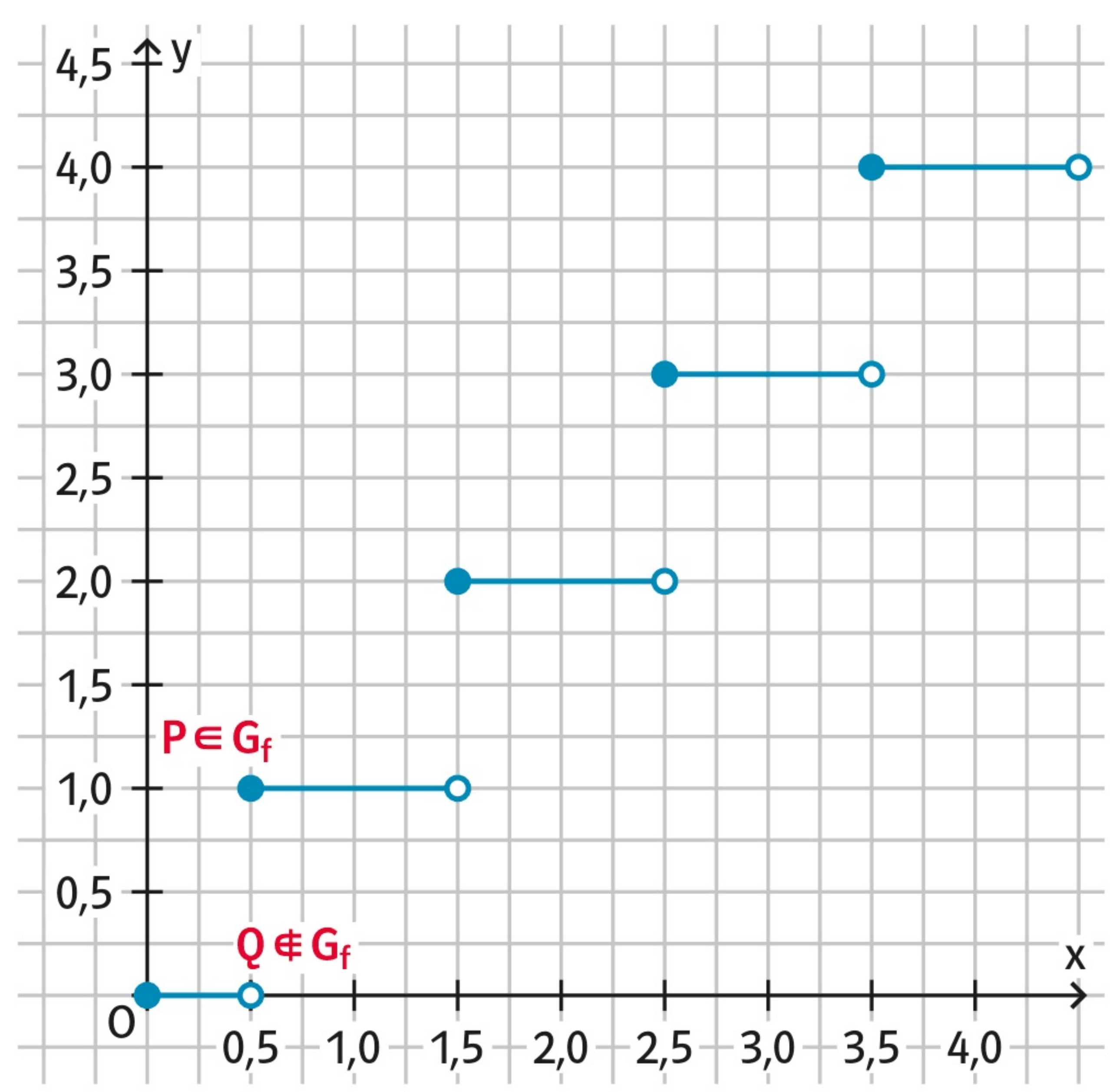
Ein Unternehmen verkauft Kies und bringt diesen als Lkw-Ladung zum Kunden. Die Transportkosten können dem Diagramm entnommen werden.

a) Bestimmen Sie die Transportkosten für 6,5 m³ Kies bei einem Transportweg von 7 km.

b) Beschreiben Sie das Preismodell des Unternehmens für den Transport.

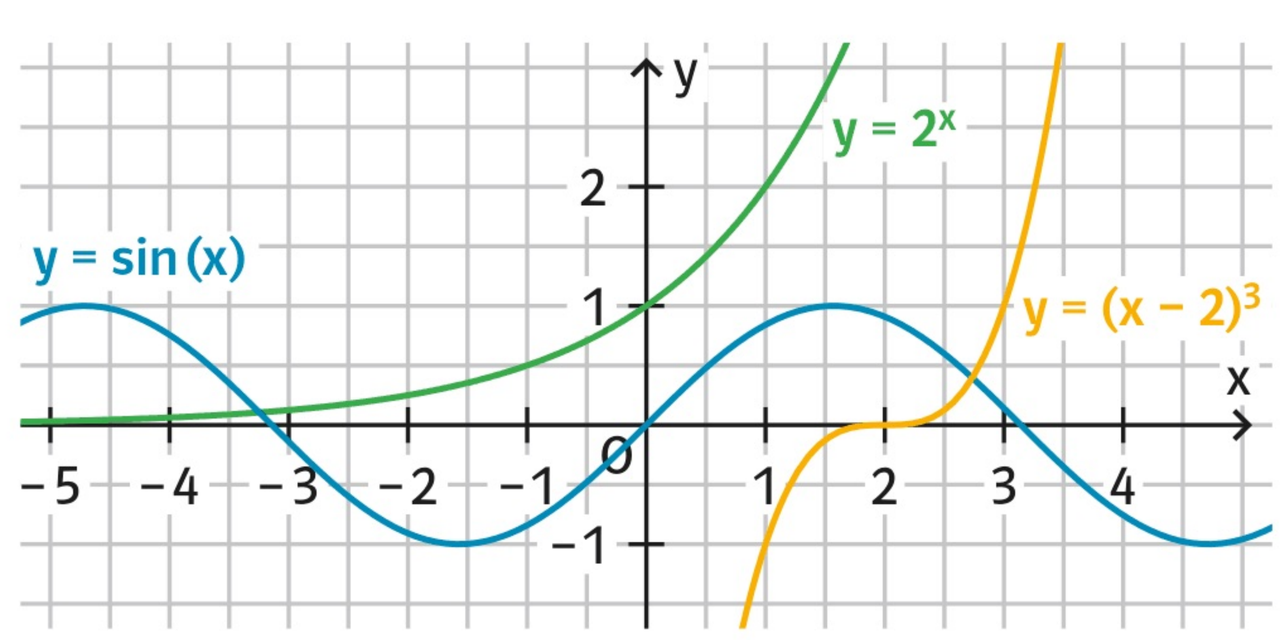


Stellt man das Runden von positiven Zahlen auf ganze Zahlen mittels einer Funktion f dar, dann weist der Graph der Funktion an den Stellen $x = 0{,}5$, $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$ usw. Sprünge auf. Man sagt: Bei $x = 0{,}5$, $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$ usw. hat der Graph **Sprungstellen** und die Funktion f ist an diesen Stellen **unstetig**.
Da $f(0{,}5) = 1$ ist, liegt $P(0{,}5\,|\,1)$ auf dem Graphen, was der ausgefüllte Kreis zum Ausdruck bringt. Im Gegensatz dazu liegt $Q(0{,}5\,|\,0)$ nicht auf dem Graphen, was der nicht ausgefüllte Kreis ausdrückt.
Beim Zeichnen des Graphen mit einem Stift muss man an den Sprungstellen absetzen und an anderer Stelle neu ansetzen.

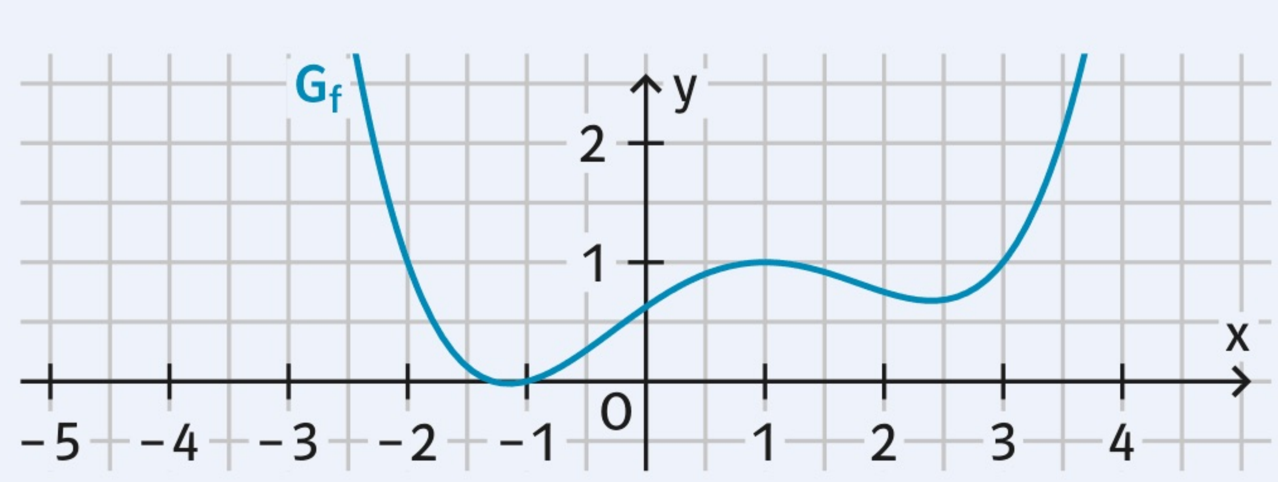


Ein ausgefüllter Kreis gehört zum Graphen. Ein nicht ausgefüllter Kreis gehört nicht zum Graphen.

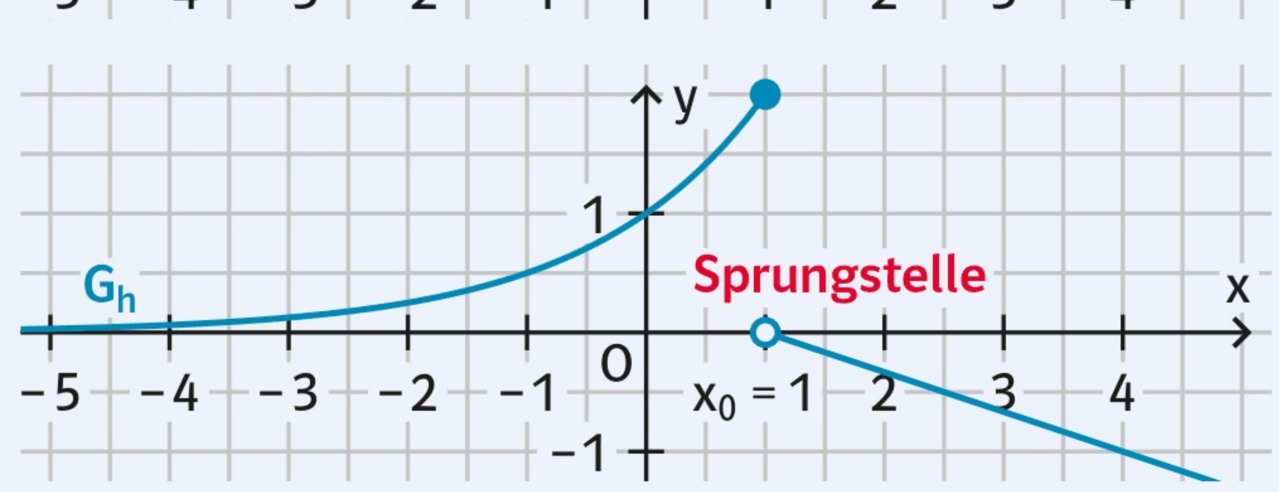
Im Gegensatz dazu kann man die Graphen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen oder trigonometrischen Funktionen auf jedem vorgegebenen Intervall ohne abzusetzen durchzeichnen.
Daher bezeichnet man diese Funktionen als **stetig** in ℝ.



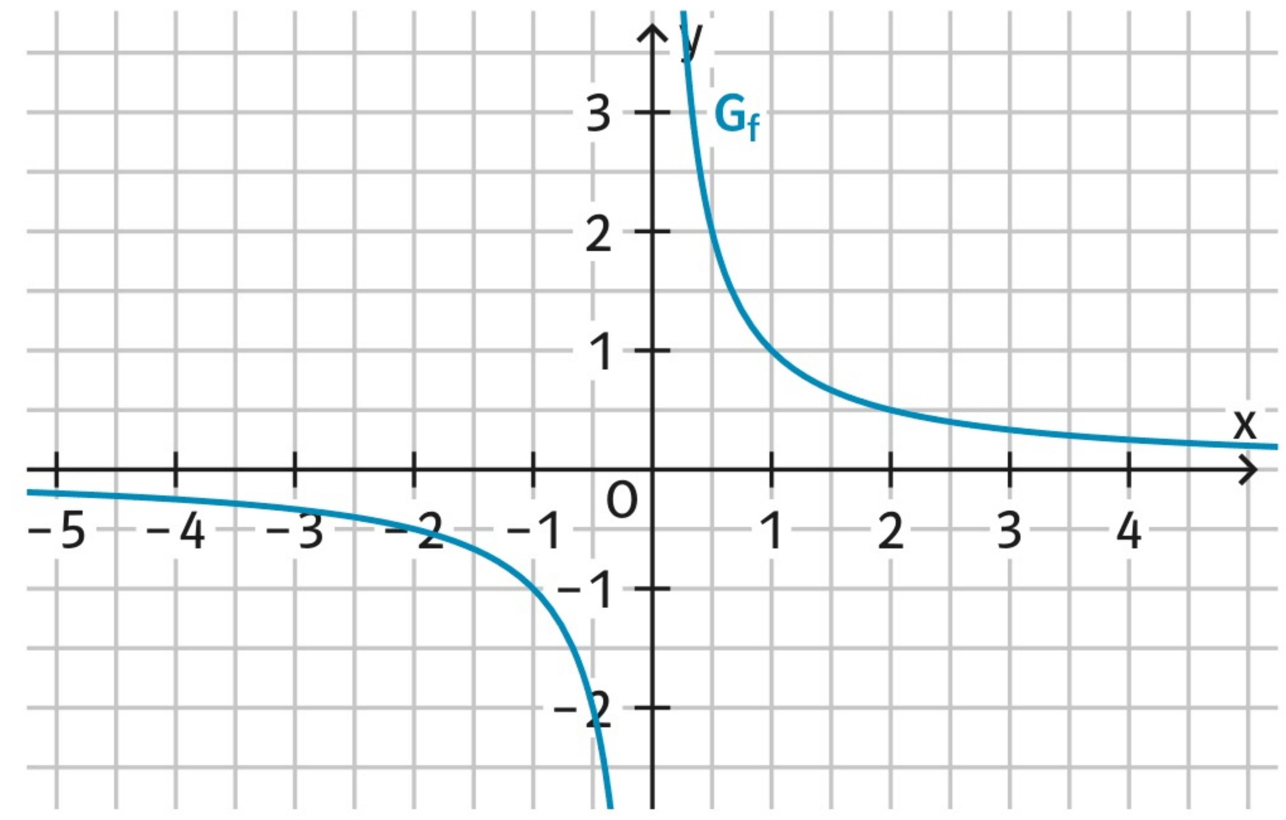
Ist eine Funktion f auf einem Intervall definiert und kann ihr Graph auf diesem Intervall ohne abzusetzen durchgezeichnet werden, dann nennt man f auf dem Intervall **stetig**.



Macht der Graph einer Funktion h an einer Stelle der Definitionsmenge einen „Sprung“, so nennt man die Funktion h an dieser Stelle **unstetig**. Diese Stelle, an der der Graph einen „Sprung“ macht, bezeichnet man als **Sprungstelle**.



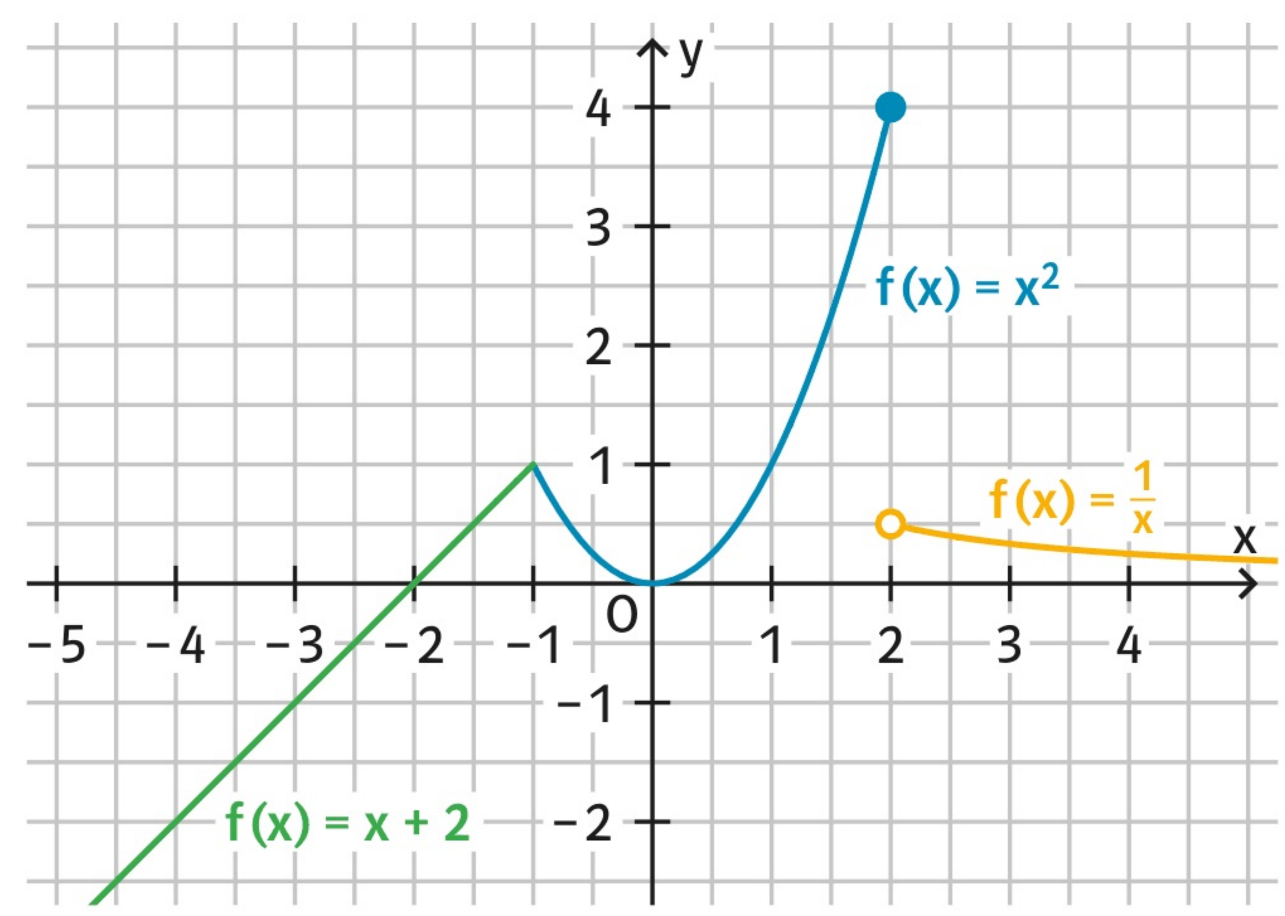
Bemerkung:
Die Stetigkeit einer Funktion kann nur an den Stellen untersucht werden, an denen die Funktion auch definiert ist.
Die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist in ihrer Definitionsmenge stetig, auch wenn man an der Stelle $x = 0$ den Stift absetzen muss. Die Stelle $x = 0$ gehört jedoch nicht zur Definitionsmenge. Ansonsten kann der Graph durchgezeichnet werden.



Abschnittsweise definierte Funktion
Ist die Definitionsmenge einer Funktion in mehrere Intervalle zerlegt, wobei zu jedem Intervall ein anderer Funktionsterm gehört, so spricht man von einer **abschnittsweise definierten Funktion**. Ein Beispiel ist die

Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} x + 2 & \text{für} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{für} \quad -1 < x \leq 2. \\ \frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$

Die Funktion f ist an der Stelle $x = -1$ stetig und an der Stelle $x = 2$ unstetig.



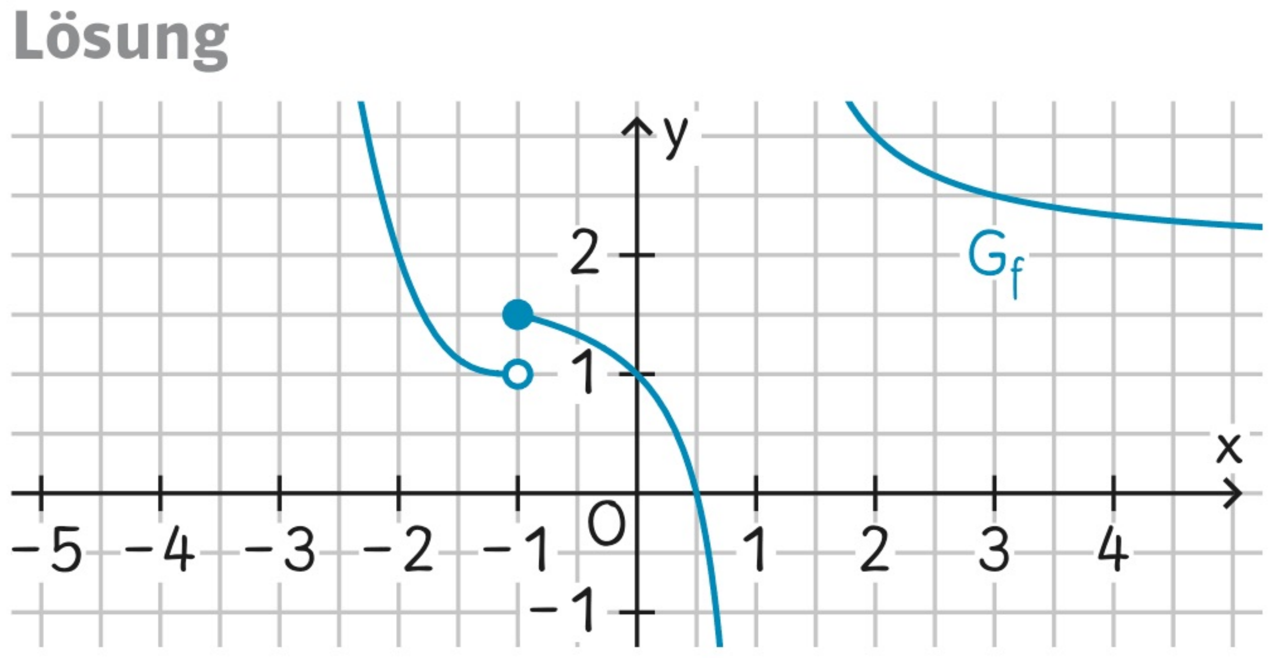
In einer Mathematiksoftware kann man mit einem Befehl wie „Funktion(<Funktion>, <Startwert>,<Endwert>)“ die Definitionsmenge einer Funktion vorgeben. Der Graph einer abschnittsweise definierten Funktion besteht dann aus den Graphen mehrerer einzelner Funktionen.

Setzt man die „Nahtstelle“ $x = -1$ in die Terme $x + 2$ bzw. x^2 ein, die die Funktion links bzw. rechts von der „Nahtstelle“ beschreiben, so erhält man $-1 + 2 = 1$ bzw. $(-1)^2 = 1$. Die Termwerte sind gleich. Dies kann als ein rechnerischer Nachweis für die Stetigkeit an dieser Stelle betrachtet werden.
Setzt man die „Nahtstelle“ $x = 2$ in die Terme x^2 bzw. $\frac{1}{x}$ ein, die die Funktion links bzw. rechts von der „Nahtstelle“ beschreiben, so erhält man $2^2 = 4$ bzw. $\frac{1}{2}$. Die Termwerte sind ungleich. Dies kann als rechnerischer Nachweis für die Unstetigkeit an dieser Stelle gesehen werden.

Beispiel 1

Untersuchen Sie anhand des Graphen der Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} -(x + 1)^3 + 1 & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{1}{x - 1} + 2 & \text{für} \quad x \geq -1, \; x \neq 1 \end{cases}$ die Funktion auf Stetigkeit.

Lösung



Die Stelle $x = -1$ ist eine Sprungstelle, also ist die Funktion dort unstetig.
An der Stelle $x = 1$ ist die Funktion nicht definiert, also kann die Stetigkeit dort nicht untersucht werden.
Die Funktion f ist in ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ nur an der Stelle $x = -1$ unstetig.

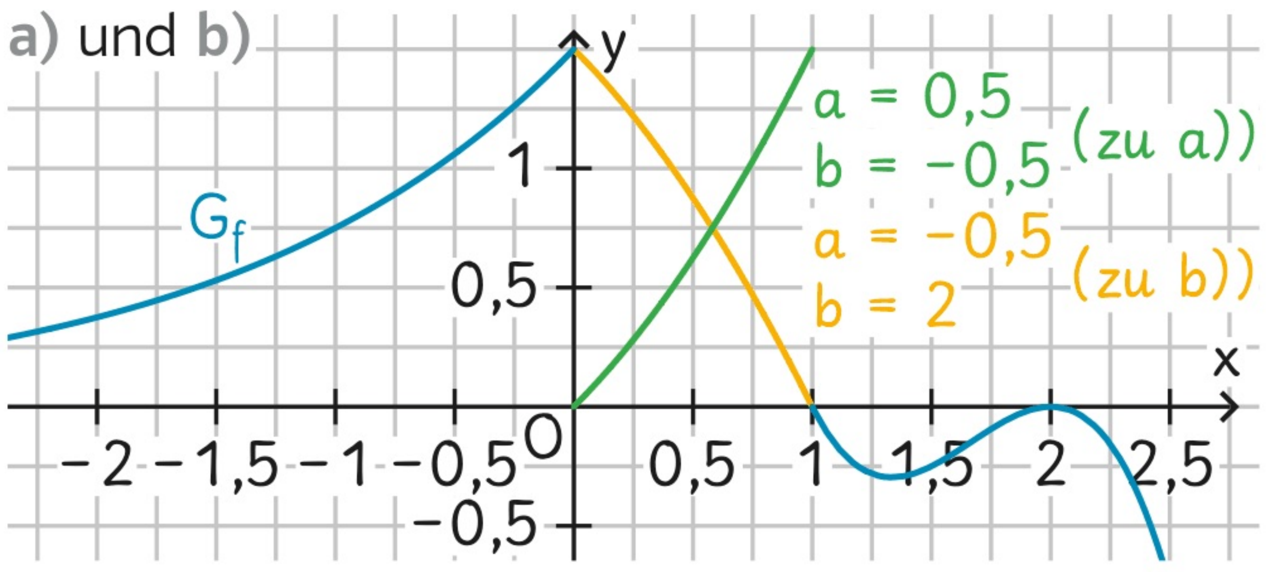
Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} 1{,}5 \cdot 2^x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ a \cdot (x + 1)^2 + b & \text{für} \quad 0 < x < 1 \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}. \\ -2x^3 + 10x^2 - 16x + 8 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) Zeichnen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung von Schiebereglern den Graphen von f für $a = 0{,}5$ und $b = -0{,}5$.
b) Stellen Sie die Schieberegler so ein, dass G_f stetig ist, und geben Sie die zugehörigen Werte von a und b an.
c) Zeigen Sie rechnerisch, dass f für die in Teilaufgabe b) bestimmten Parameterwerte stetig ist.

Lösung

a) und b)



c) Überprüfen, ob für $a = -0{,}5$ und $b = 2$ an den „Nahtstellen“ $x = 0$ und $x = 1$ entsprechende Termwerte gleich sind.

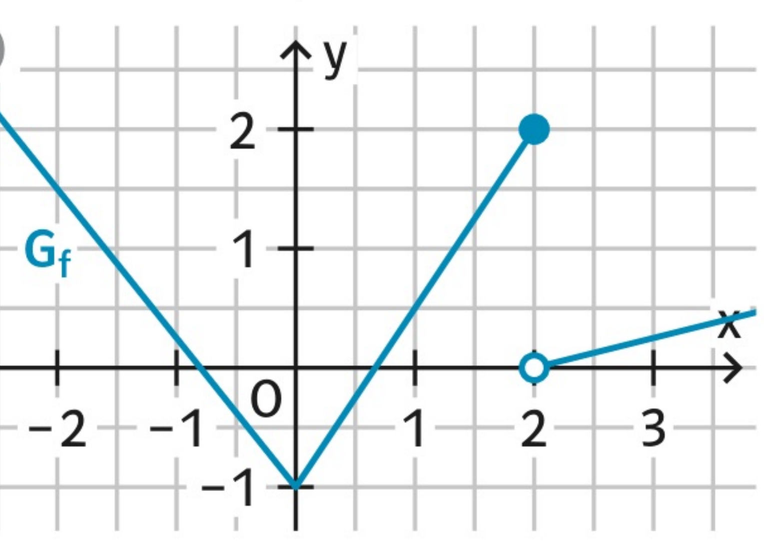
$x = 0$: $f(0) = 1{,}5 \cdot 2^0 = 1{,}5$
$\quad -0{,}5 \cdot (0+1)^2 + 2 = 1{,}5$

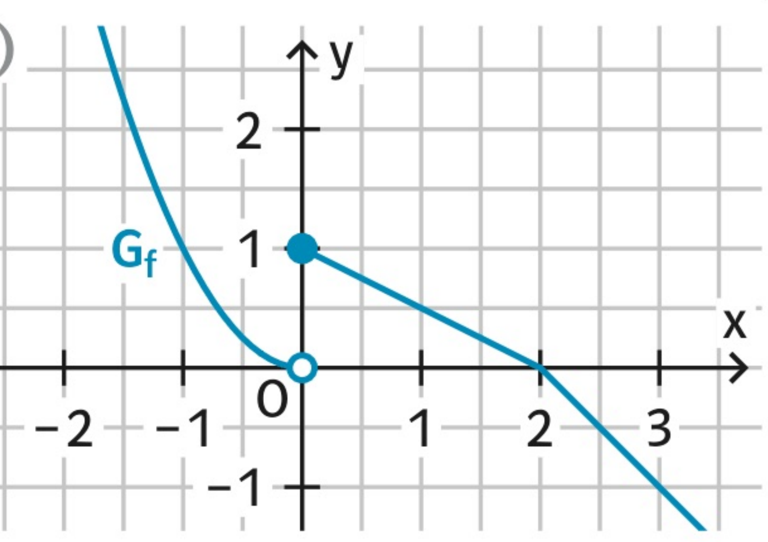
$x = 1$: $-0{,}5 \cdot (1+1)^2 + 2 = 0$
$\quad f(1) = -2 + 10 - 16 + 8 = 0$

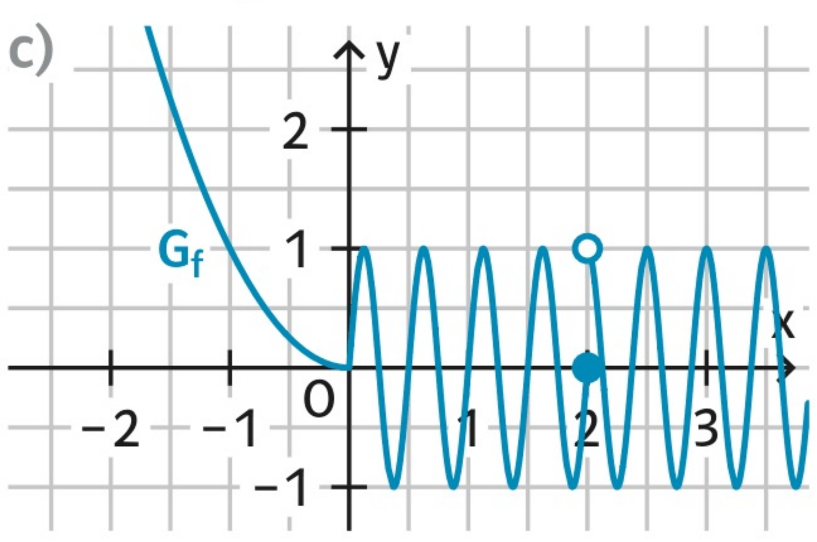
Bei einer dynamischen Mathematiksoftware werden die ausgefüllten bzw. nicht ausgefüllten Punkte meist nicht abgebildet.

Aufgaben

1 Erläutern Sie, ob die Funktion f an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$ jeweils stetig ist.

a)


b)


c)


2 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Begründen Sie, dass die Funktion an einer Stelle unstetig ist.

3 Ein Transportunternehmen verlangt für den Versand von Paketen innerhalb Deutschlands die in der Tabelle angegebenen Preise.

Gewicht	bis 2 kg	bis 5 kg	bis 10 kg	bis 31,5 kg
Preis	5 €	7,5 €	9,5 €	16,5 €

Stellen Sie den Sachverhalt mittels einer abschnittsweise definierten Funktion dar und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.

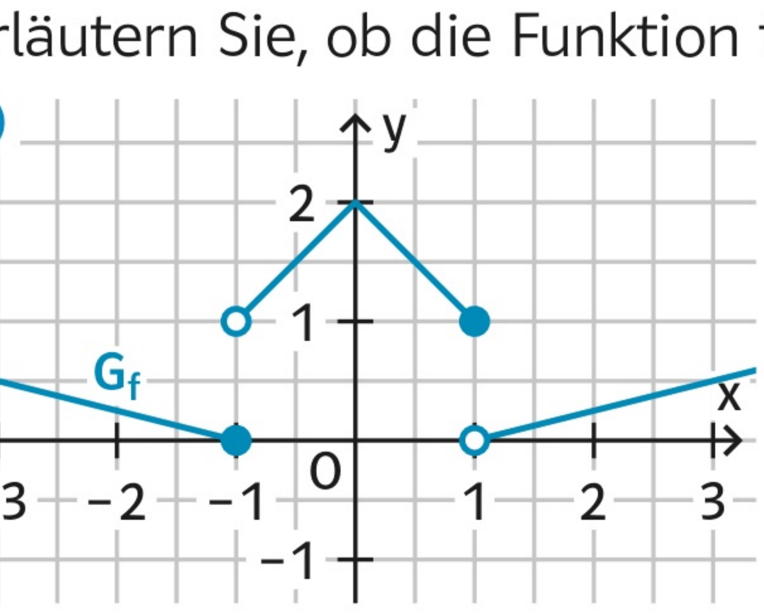
4 Geben Sie an, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie sich gegenseitig Ihre Angabe. „Jede gebrochen-rationale Funktion f der Form $x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$ ist an der Stelle $x = -b$ unstetig.“

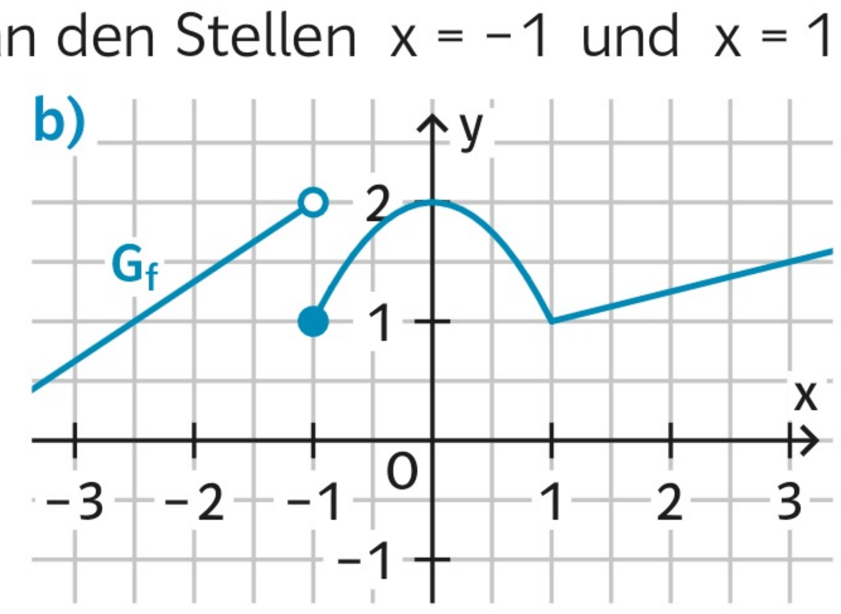
5 Begründen Sie, dass die Funktion $g\colon x \mapsto \begin{cases} -\cos(\pi x) & \text{für } x < -2 \\ x + 1 & \text{für } -2 \leq x < 1 \\ 2\sin(0{,}5\pi x) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ stetig ist.

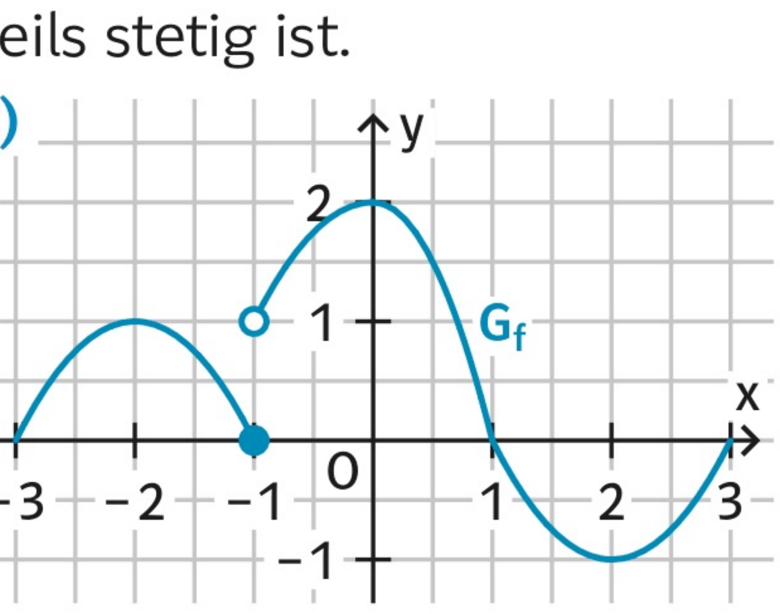
Test 1

Lösungen | Seite 198

6 Erläutern Sie, ob die Funktion f an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ jeweils stetig ist.

a)


b)


c)


7 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{für } x < -1 \\ ax + 1 - 2a & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass die Funktion f stetig ist.

8 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0 \\ a \cdot x^2(x+b)+c & \text{für } 0 < x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung von Schiebereglern den Graphen von f für die Parameterwerte $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$.
b) Geben Sie an, welche Werte für a, b und c eingestellt werden müssen, damit f stetig ist.
c) Zeigen Sie rechnerisch, dass f für die in Teilaufgabe b) bestimmten Parameterwerte stetig ist.
d) Erstellen Sie eine abschnittsweise definierte Funktion mit mindestens einem Parameter. Ihre Sitznachbarin bzw. Ihr Sitznachbar bestimmt den bzw. die Parameter so, dass die Funktion stetig ist.

9 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} 2^x & \text{für } x < 1{,}6 \\ -\frac{1}{2}x(x-1{,}6)^2 + 3 & \text{für } x \geq 1{,}6 \end{cases}$. Zeichnen Sie mit einem Funktionenplotter den Graphen von f und machen Sie plausibel, dass f unstetig ist.

10 Die jährliche Kraftfahrzeugsteuer für einen Pkw mit Benzinmotor, der nach dem 01.01.2021 zugelassen wurde, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen.
Anteil für den Hubraum: Pro angefangene 100 cm^3 Hubraum werden 2 € berechnet.
Anteil für die CO_2-Emission: Grundlage ist die in den Fahrzeugpapieren eingetragene CO_2-Emission des Fahrzeugs in Gramm pro Kilometer, z. B. $125\,\frac{g}{km}$. Von dieser CO_2-Emission sind $95\,\frac{g}{km}$ steuerfrei. Vom Rest, im Beispiel $125\,\frac{g}{km} - 95\,\frac{g}{km} = 30\,\frac{g}{km}$, muss je Gramm CO_2-Ausstoß pro Kilometer ein Betrag, gestaffelt nach der CO_2-Emission des Pkw (vgl. Tabelle), gezahlt werden.

x: CO_2-Emission (in $\frac{g}{km}$)	Steuersatz pro Gramm (in €)
$95 < x \leq 115$	2,00
$115 < x \leq 135$	2,20
$135 < x \leq 155$	2,50
$155 < x \leq 175$	2,90
$175 < x \leq 195$	3,40
$195 < x$	4,00

a) Berechnen Sie die CO_2-Emission in Kilogramm eines Pkw mit der Emission von $140\,\frac{g}{km}$ bei einer Reise von 1000 km Länge.
b) Berechnen Sie die Kfz-Steuer für einen neu zugelassen Benziner, der nach Fahrzeugpapieren einen Hubraum von 1240 cm^3 und eine CO_2-Emission von $140\,\frac{g}{km}$ hat.
c) Stellen Sie den Steueranteil für den Hubraum in einem Diagramm dar.
d) Stellen Sie den Steueranteil für die CO_2-Emission mithilfe einer abschnittsweise definierten Funktion und dem zugehörigen Graphen dar.
e) Erläutern Sie die Absicht des Gesetzgebers bei der Staffelung des Steuersatzes.

Test 2

Lösungen | Seite 198

11 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} a(x^3 - 4x^2 + 4x) + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ 1 & \text{für } 2 < x \leq 4 \\ bx - 1 - 2b & \text{für } x > 4 \end{cases}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware den Graphen G_f der Funktion für $a = 1$ und $b = 2$.
b) Ermitteln Sie den Wert von b, sodass f an der Stelle $x = 4$ stetig ist.
c) Begründen Sie, dass f an der Stelle $x = 2$ unabhängig von a stetig ist.

12 Untersuchen Sie die Dirichlet-Funktion $D: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ gemeinsam mithilfe einer Recherche auf Stetigkeit.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 bis 1859), deutscher Mathematiker

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 198

G 13 a) Eine Kugel mit Radius r und ein Zylinder mit Radius r und Höhe h haben das gleiche Volumen. Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Höhe h vom Radius r unterscheidet.
b) Eine Kugel mit Radius r und ein Zylinder mit Radius R und Höhe r haben das gleiche Volumen. Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich der Radius R vom Radius r unterscheidet.

Wiederholen

1 Geben Sie, soweit vorhanden, den Grenzwert der Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ sowie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen an und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem Funktionenplotter.

a) $f: x \mapsto 1{,}1^x$ **b)** $g: x \mapsto 3 \cdot \frac{1}{x-4} - 7$ **c)** $h: x \mapsto 0{,}75^x$ **d)** $i: x \mapsto \sin(0{,}5x)$

2 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f mit einer dynamischen Mathematiksoftware.

b) Die Geraden mit den Gleichungen $y = a$ und $y = -a$ mit $a > 0$ schließen einen Streifen um die x-Achse ein. Zeichnen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung eines Schiebereglers die Geraden für $a = 0{,}5$.

c) Bestimmen Sie grafisch mithilfe der dynamischen Mathematiksoftware die Stelle x_0, ab der der Graph von f einen Streifen der Breite 0,002, der symmetrisch zur x-Achse liegt, nicht mehr verlässt.

d) Ermitteln Sie den in Teilaufgabe c) grafisch bestimmten Wert rechnerisch.

3 Starten Sie mit der Funktion $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$. Durch die Anweisungen (1) bis (9) entsteht jeweils aus dem vorhergehenden Graphen der Graph einer neuen Funktion, die Sie auf einem der Kärtchen finden. Verwenden Sie bei den Termumformungen eine geeignete Mathematiksoftware. Die Buchstaben auf den Karten ergeben der Reihe nach ein Lösungswort.

(1) Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung
(2) Verschiebung um −1 in y-Richtung
(3) Verschiebung um −1 in x-Richtung
(4) Streckung mit Faktor $\frac{1}{8}$ in y-Richtung
(5) Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung
(6) Verschiebung um 1 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung
(7) Streckung mit Faktor 2 in x-Richtung
(8) Verschiebung um 1 in x-Richtung und um 9 in y-Richtung
(9) Streckung mit Faktor 4 in y-Richtung und Faktor 2 in x-Richtung

$f_1: x \mapsto x^3 + 2x^2 + x$ E
$f_2: x \mapsto 8x^3 + 16x^2 + 8x$ H
$f_3: x \mapsto 8x^3 + 8x^2 + 2x$ I
$f_4: x \mapsto 8x^3 - 8x^2$ E
$f_5: x \mapsto x^3 - 7x^2 + 16x - 1$ I
$f_6: x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x$ N
$f_7: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 7x^2 + 32x - 4$ S
$f_8: x \mapsto 8x^3 - 8x^2 + 1$ G
$f_9: x \mapsto 8x^3 - 16x^2 + 10x$ M

4 Untersuchen Sie die folgende Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt.
„Wenn eine ganzrationale Funktion einen konstanten Summanden besitzt, dann ist ihr Graph weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.“

5 Geben Sie die Kriterien dafür an, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

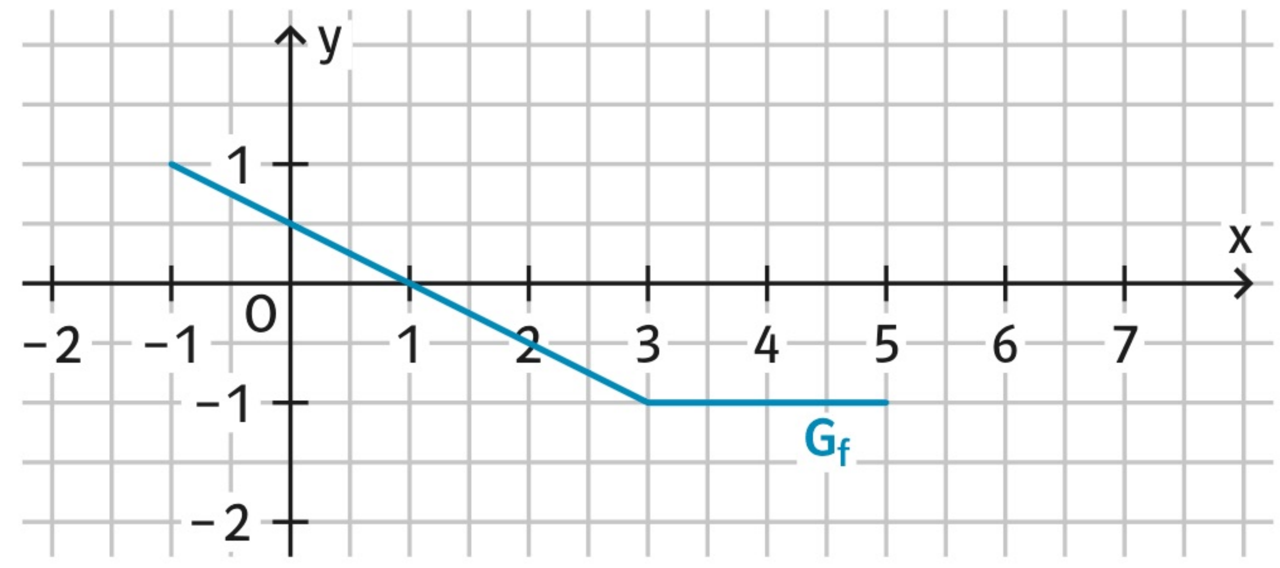
6 Beschreiben Sie sich gegenseitig, wie G_g aus G_f hervorgeht. Überprüfen Sie gegenseitig Ihre Beschreibung mithilfe eines Funktionenplotters, wobei Sie bei den Teilaufgaben a) und b) für f beispielhaft eine konkrete, selbst gewählte Funktion verwenden.

a) $g: x \mapsto -4f(x-1)$ **b)** $g: x \mapsto f(-4x) + 4$

c) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$; $g: x \mapsto \frac{3}{x} + 2$ **d)** $f: x \mapsto 3^x$; $g: x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$

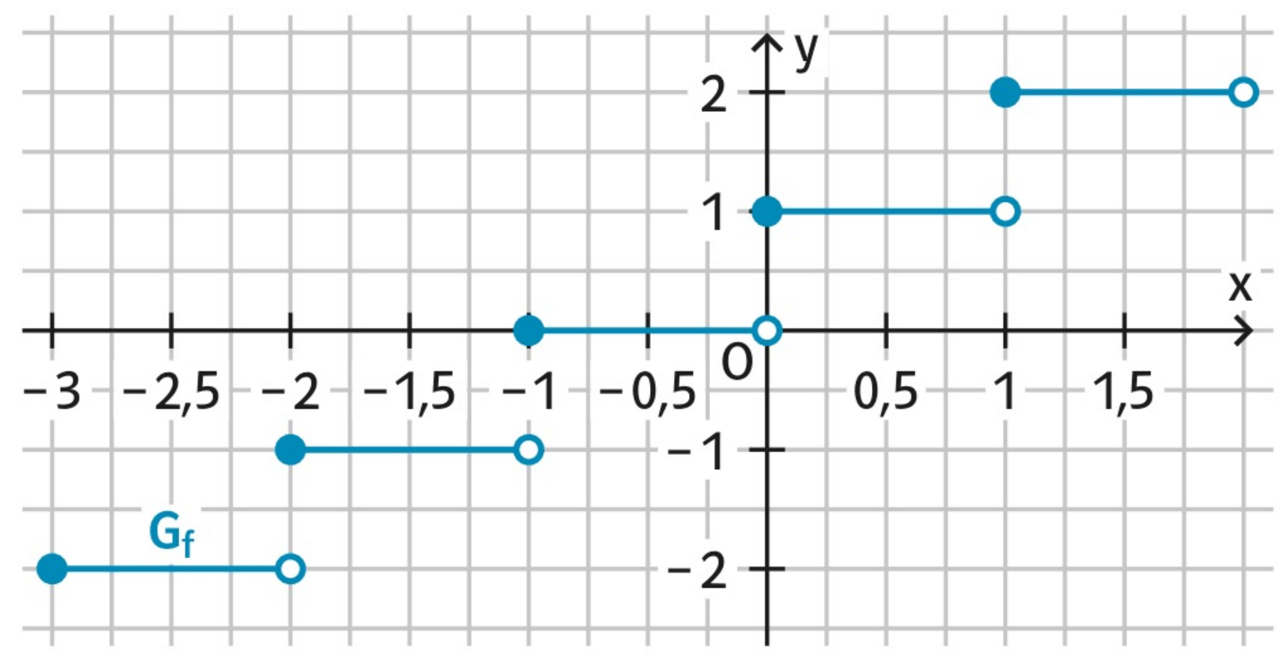
7 Geben Sie eine Funktion an, die bei $x = 1$ unstetig ist, und skizzieren Sie ihren Graphen.

8 Die Funktion f, deren Graph abgebildet ist, ist im Bereich $[-1; 5]$ definiert. Übertragen Sie den Graphen von f in Ihr Heft und zeichnen Sie dazu den Graphen der vorgegebenen Funktion.
Geben Sie auch an, in welchem Bereich diese Funktion definiert ist.



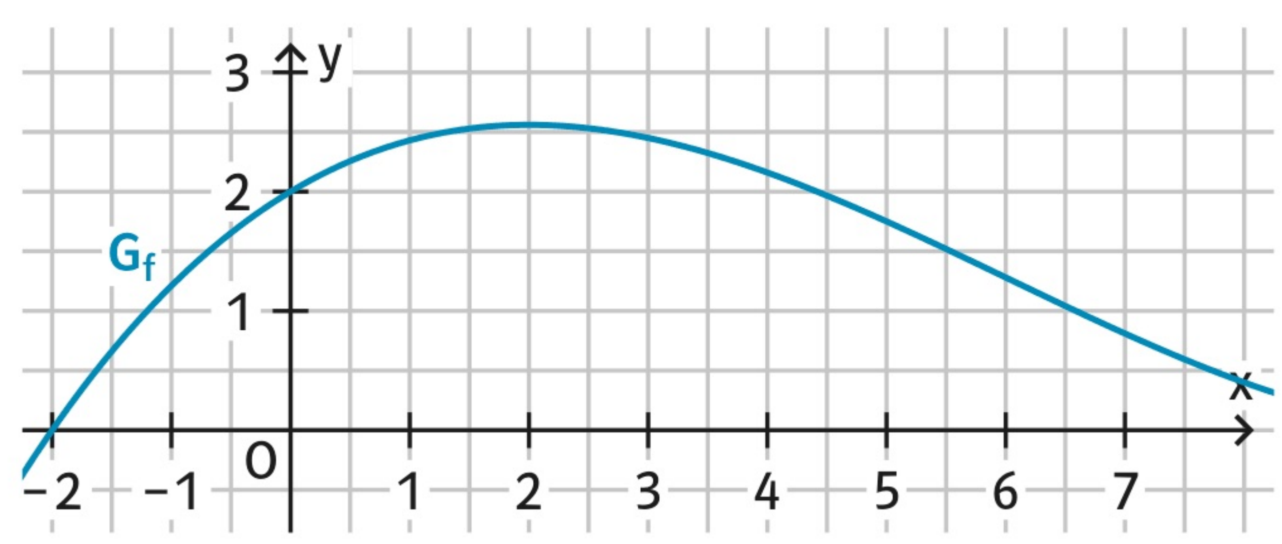
a) $g(x) = -2f(x)$ **b)** $h(x) = f(-2x) + 3$ **c)** $m(x) = -f(x + 2) - 1$
d) $n(x) = f\left(-\frac{1}{2}(x + 3)\right)$ **e)** $p(x) = -0{,}5f(-2x)$ **f)** $q(x) = -0{,}5f(0{,}5x)$

9 Zu dem abgebildeten Graphen gehört eine Funktion f.
a) Geben Sie die Funktionswerte von f an den Stellen $x = 1{,}7$, $x = -0{,}7$ und $x = -2$ an.
b) Erläutern Sie, was durch die zum Graphen gehörige Funktion beschrieben wird.



Vertiefen

10 Ben sagt: „Am Graphen der Funktion f erkennt man, dass der Grenzwert für x gegen plus unendlich null ist."
Beurteilen Sie die Aussage.



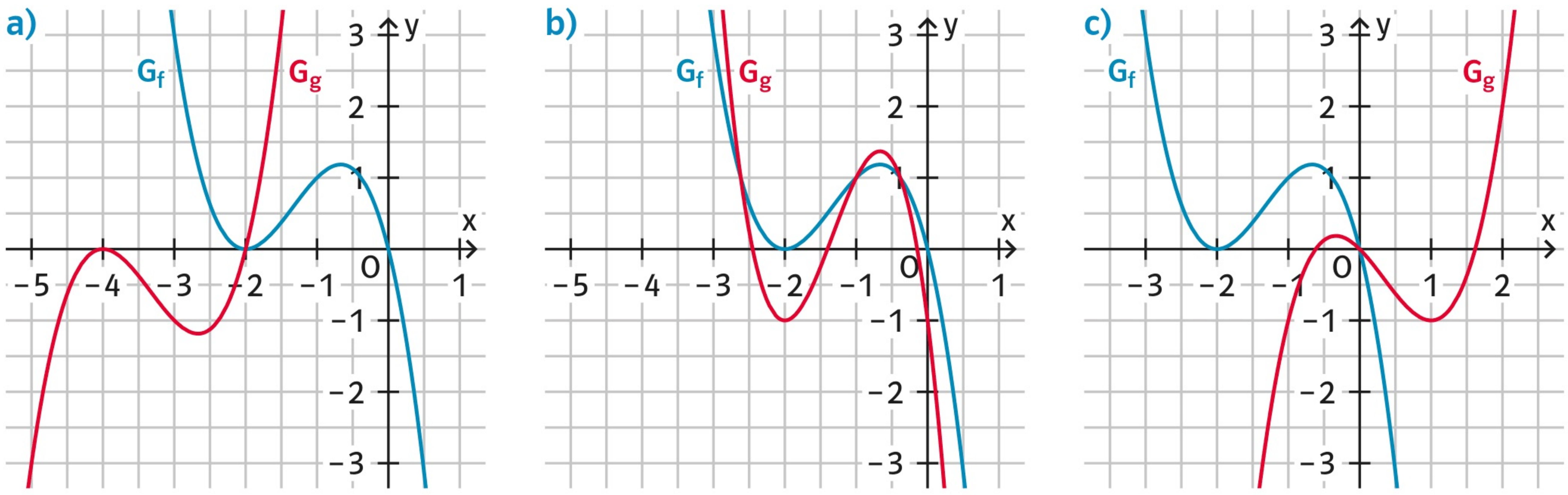
11 Der Graph einer Funktion wird in x- und y-Richtung verschoben sowie in y-Richtung gestreckt. Erläutern Sie sich gegenseitig anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass die Reihenfolge, in der verschoben und gestreckt wird, für den entstehenden Graphen von Bedeutung ist.

12 Der Graph einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$ wird an der x-Achse gespiegelt und in y-Richtung gestreckt. Begründen Sie, dass die Reihenfolge von Spiegelung und Streckung keinen Einfluss auf den entstehenden Graphen hat.

13 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto x$ und $g: x \mapsto 2x - 1$.
Eva sagt: „Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor, indem man zuerst den Graphen von f mit dem Faktor 2 in y-Richtung streckt und anschließend um −1 in y-Richtung verschiebt."
Matteo sagt. „Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor, indem man zuerst den Graphen von f um −1 in y-Richtung verschiebt und anschließend mit dem Faktor 2 in y-Richtung streckt."
Untersuchen Sie, ob beide Vorgehensweisen zum gleichen Ergebnis führen.

14 Aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^2$ geht der Graph der Funktion g durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ und anschließende Verschiebung in y-Richtung um 2 hervor. Vertauscht man die Reihenfolge von Streckung und Verschiebung, so wird der Graph von f zunächst um 2 in y-Richtung verschoben und anschließend mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in y-Richtung gestreckt. Dabei entsteht der Graph der Funktion h.
Begründen Sie, dass g(x) und h(x) unterschiedlich sind.

15 Ermitteln Sie gemeinsam eine Beschreibung, wie der Graph von g aus dem Graphen von $f: x \mapsto f(x)$ hervorgeht, und stellen Sie den Funktionsterm $g(x)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ dar.



16 Wird der Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x-3} + 2$ an der x-Achse gespiegelt, so entsteht der Graph von g. Wird der Graph von f an der y-Achse gespiegelt, so entsteht der Graph von h. Skizzieren Sie G_f, G_g und G_h. Geben Sie das Verhalten der Funktionen g und h für $x \to \pm\infty$ an.

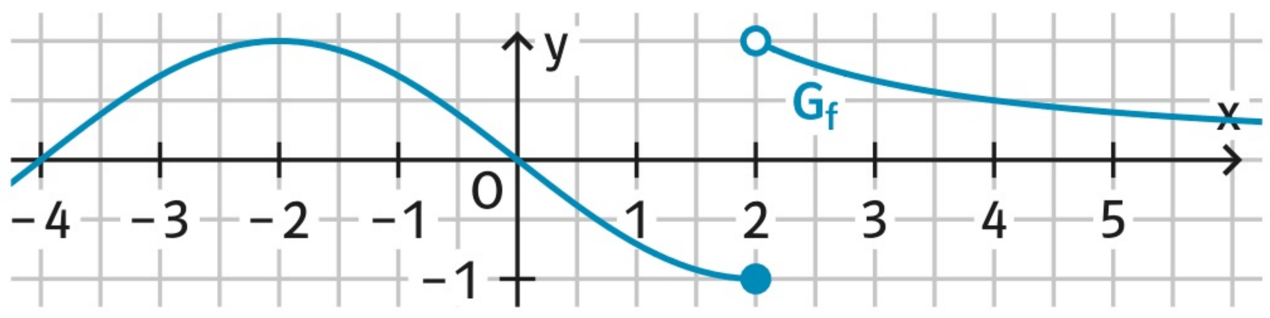
Vernetzen

17 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x-2} + 1$ mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ in x-Richtung gestreckt und anschließend um −2 in y-Richtung verschoben werden kann, um den Graphen von $g: x \mapsto \frac{6}{x-3} - 1$ zu erhalten. Beschreiben Sie, wie sich der Zusammenhang zwischen den Graphen von f und g auf deren Asymptoten auswirkt.

18 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} g(x) = x^2 - 4x - 16 & \text{für } x \le -2 \\ x + \frac{3}{2} & \text{für } -2 < x < 1. \\ h(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$

Zeichnen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware den Graphen von f und legen Sie dabei Schieberegler so an, dass Sie den Teil des Graphen, der zu $g(x)$ gehört, in y-Richtung verschieben und den Teil des Graphen, der zu $h(x)$ gehört, in y-Richtung strecken können. Stellen Sie die Schieberegler so ein, dass die stetige Funktion f^* entsteht. Geben Sie die zu f^* gehörenden Terme $g^*(x)$ und $h^*(x)$ an.

19 Der Graph der Funktion f wird an der y-Achse gespiegelt. Dabei entsteht der Graph der Funktion g. Erläutern Sie, dass g bei $x = -2$ unstetig ist.



20 Die Funktion f ist abschnittsweise definiert. Für $x \le 1$ ist der Funktionsterm ein Polynom vom Grad vier, das bei $x = -4$ und $x = 0$ jeweils eine doppelte Nullstelle besitzt. Für $x > 1$ ist der Graph von f eine Gerade mit der Gleichung $y = 1$. Bestimmen Sie das Polynom vom Grad vier so, dass die Funktion stetig ist.

Strategie | Seite 186
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

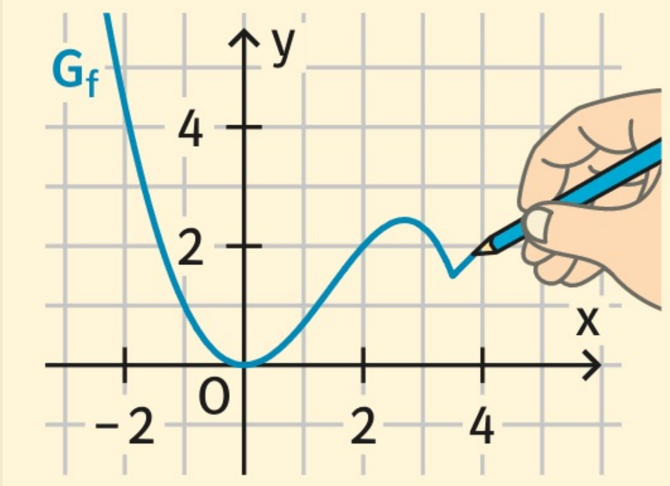
21 Das Briefporto eines Postdienstleisters für Briefe innerhalb Deutschlands ist vom Gewicht des Briefs abhängig.

a) Stellen Sie den Zusammenhang mit einem Funktionsgraphen dar.

b) Recherchieren Sie das aktuelle Briefporto und geben Sie es an. Geben Sie zudem an, welche weitere Größe neben dem Gewicht für das Porto von Bedeutung ist.

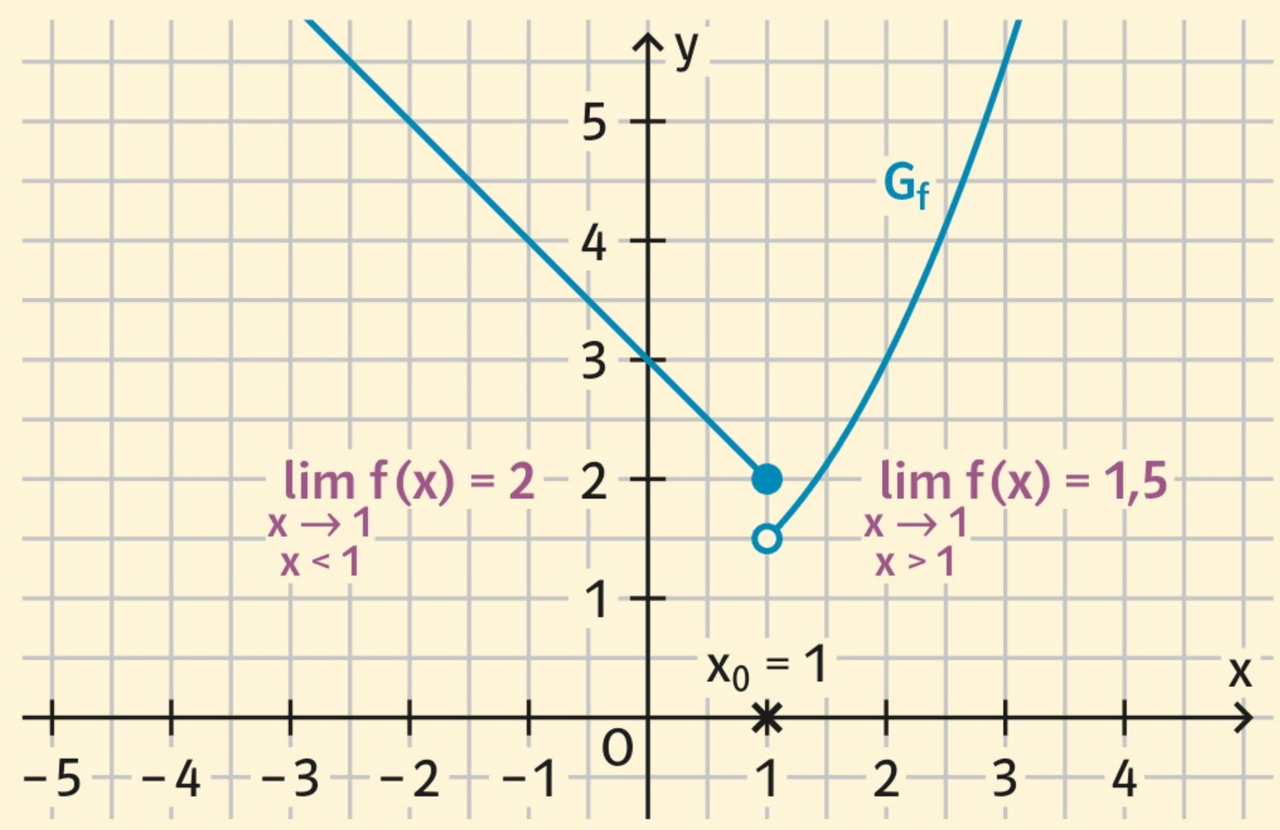
x: Gewicht (in g)	Porto (in €)
$0 < x \le 20$	0,80
$20 < x \le 50$	0,95
$50 < x \le 500$	1,55
$500 < x \le 1000$	2,90

Stetigkeit und Grenzwert



Die Stetigkeit einer Funktion auf einem Intervall wurde auf Seite 27 anschaulich definiert, indem man fordert, dass der Graph der Funktion auf dem betrachteten Intervall ohne abzusetzen gezeichnet werden kann. Diese anschauliche Definition kann durch eine formale Definition mithilfe sogenannter einseitiger Grenzwerte präzisiert werden.

Die abschnittsweise definierte Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} -x + 3 & \text{für } x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ ist an der Nahtstelle $x_0 = 1$ unstetig, da die Annäherung von links an $x_0 = 1$ zum Wert 2 führt und die Annäherung von rechts an $x_0 = 1$ zum Wert 1,5. Man spricht bei den Annäherungen von links bzw. von rechts an $x_0 = 1$ von **einseitigen Grenzwerten** und verwendet dafür folgende Schreibweisen:



Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (-x + 3) = 2.$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) = 1{,}5.$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ unterschiedlich sind, ist die Funktion bei $x_0 = 1$ unstetig.
Die anschauliche Definition der Stetigkeit kann mithilfe einseitiger Grenzwerte durch eine formale Definition ersetzt werden.
Formale Definition von Stetigkeit: Eine Funktion f ist auf einem Intervall I stetig, wenn für jede Stelle x_0 des Intervalls gilt, dass links- und rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle x_0 gleich dem Funktionswert von f an der Stelle x_0 sind.
In Kurzschreibweise:
Die Funktion f ist stetig auf dem Intervall I, wenn für alle $x_0 \in I$ gilt: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$

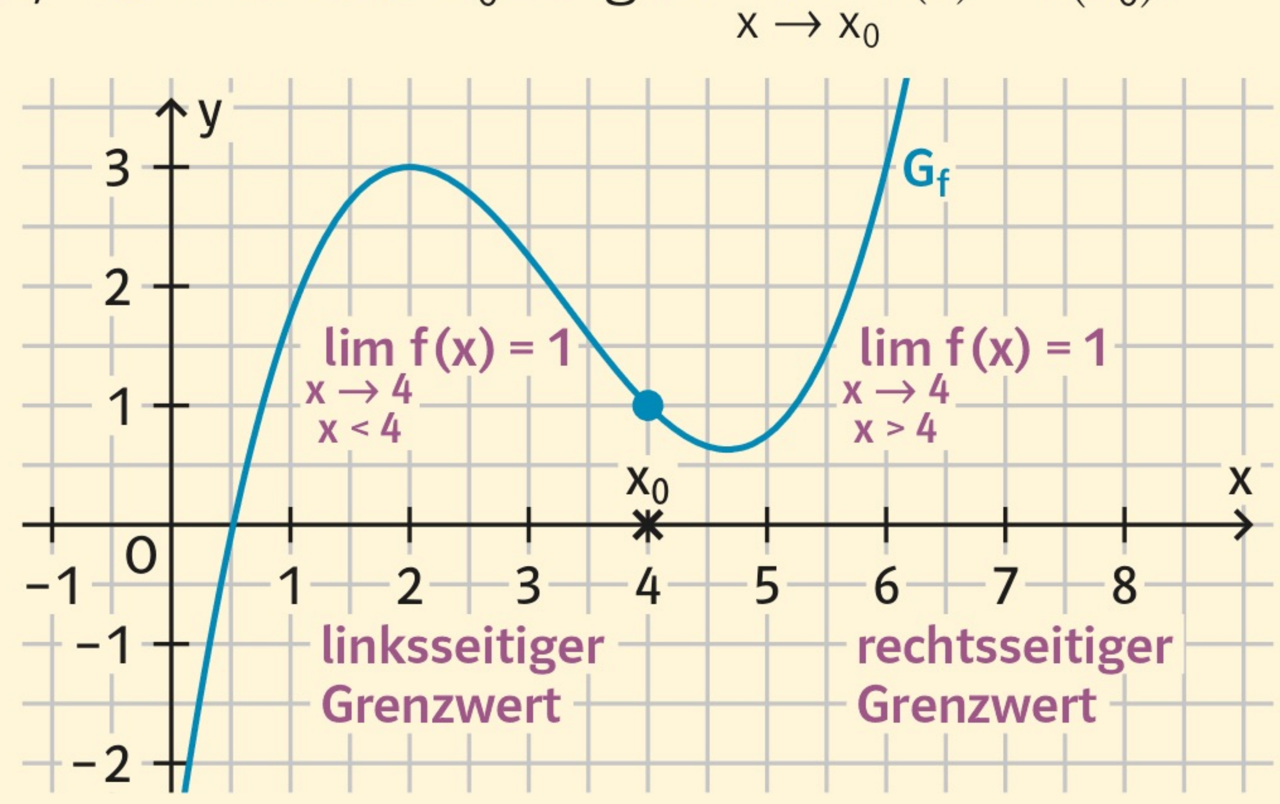
Grenzwert für $x \to x_0$

Stimmen an einer Stelle x_0 links- und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion f überein, dann hat die Funktion f hat an der Stelle x_0 einen Grenzwert und man schreibt dafür kurz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Neben Grenzwerten von Funktionen für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ gibt es somit auch Grenzwerte für $x \to x_0$.
Die formale Definition von Stetigkeit kann nun mithilfe des Grenzwertes für $x \to x_0$ beschrieben werden: Die Funktion f ist stetig auf dem Intervall I, wenn für alle $x_0 \in I$ gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

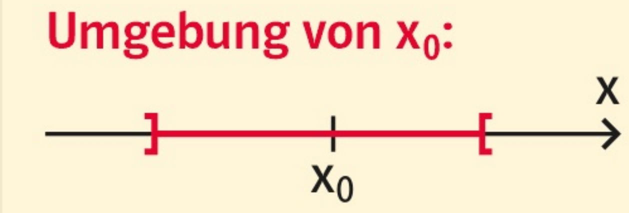
Bei stetigen Funktionen ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Liegt beispielsweise die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 3$ vor, so ist an jeder Stelle x_0 der Grenzwert von f für $x \to x_0$ gleich dem Funktionswert von f an der Stelle x_0. Es gilt

$$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \frac{1}{4}x_0^3 - \frac{5}{2}x_0^2 + 7x_0 - 3.$$

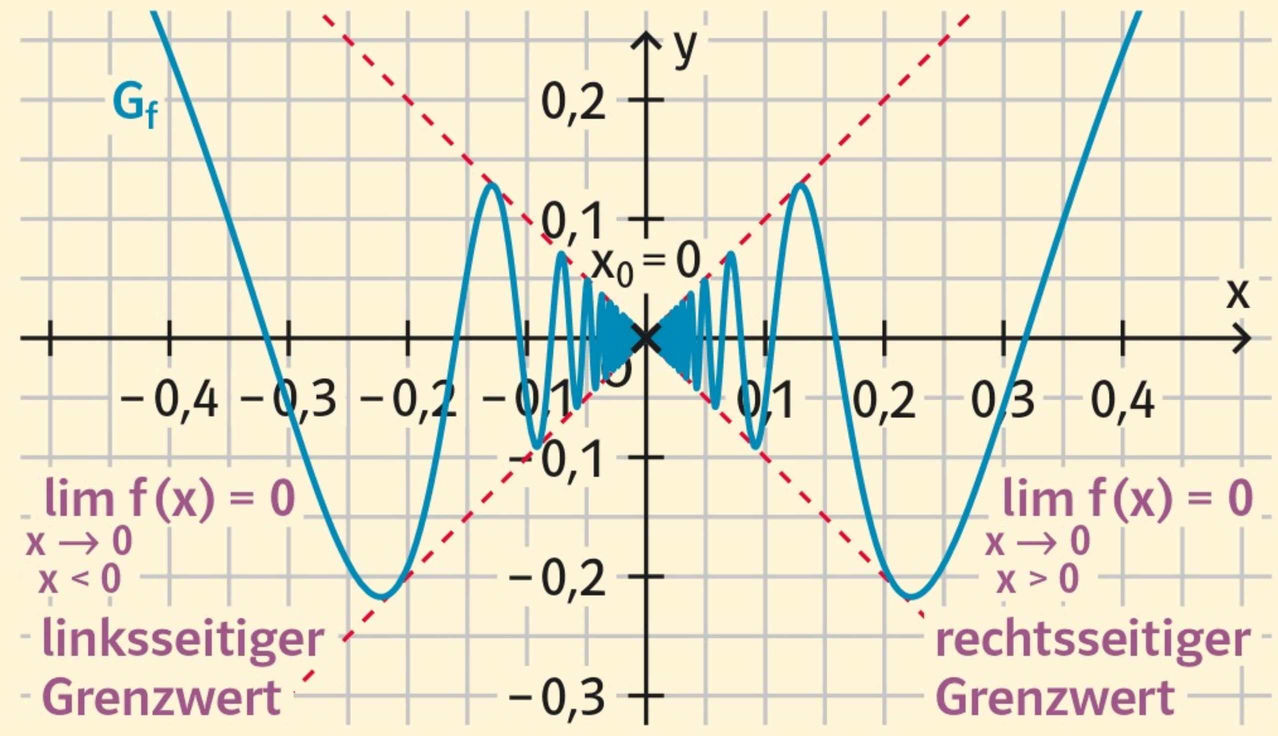


In der Definition des Grenzwertes für $x \to x_0$ wird nicht gefordert, dass x_0 im Definitionsbereich der Funktion liegen muss. Ist x_0 nicht Element des Definitionsbereichs, dann muss x_0 in einer Umgebung liegen, in der die Funktion definiert ist. Ansonsten ist die Bestimmung des Grenzwertes der Funktion für $x \to x_0$ nicht möglich.

Umgebung von x_0:

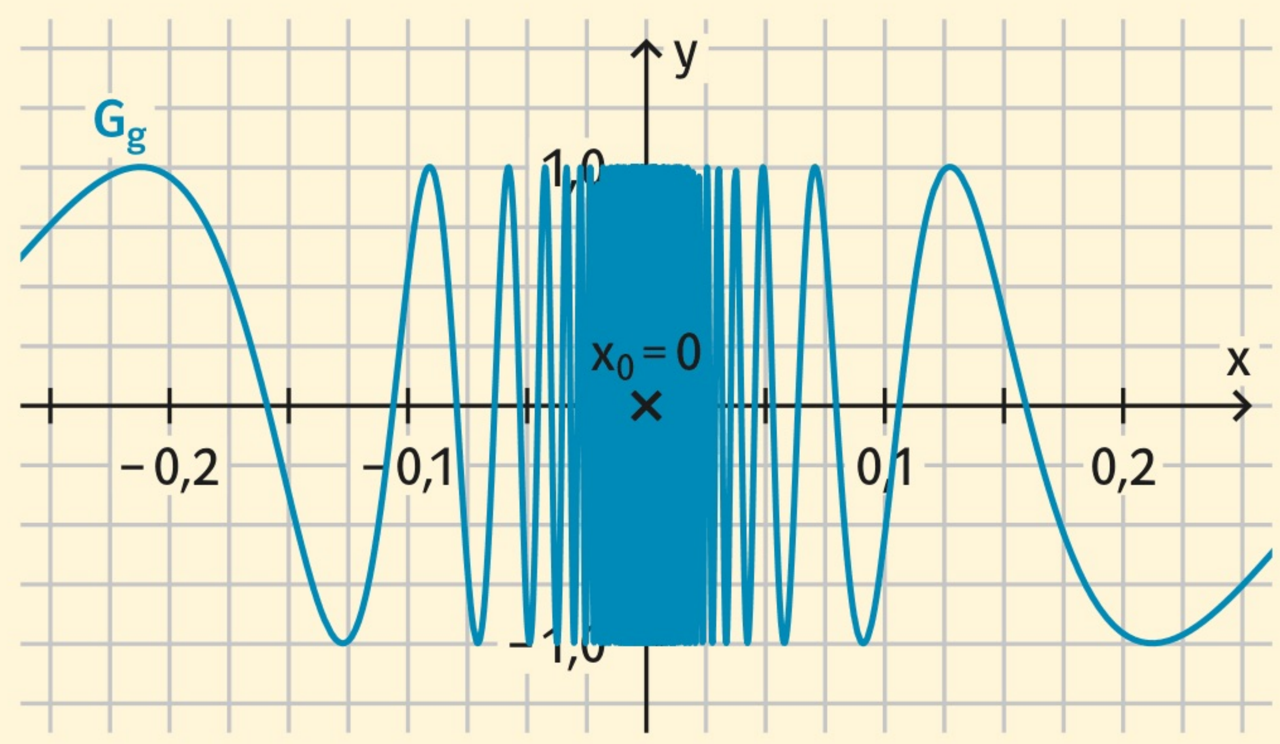


Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Trotzdem existiert ein Grenzwert von f für $x \to 0$.
Für den rechtsseitigen wie den linksseitigen Grenzwert gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$, da der Faktor $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nur Werte zwischen −1 und +1 annehmen kann und somit nur der Faktor x für die Annäherung $x \to 0$ entscheidend ist.

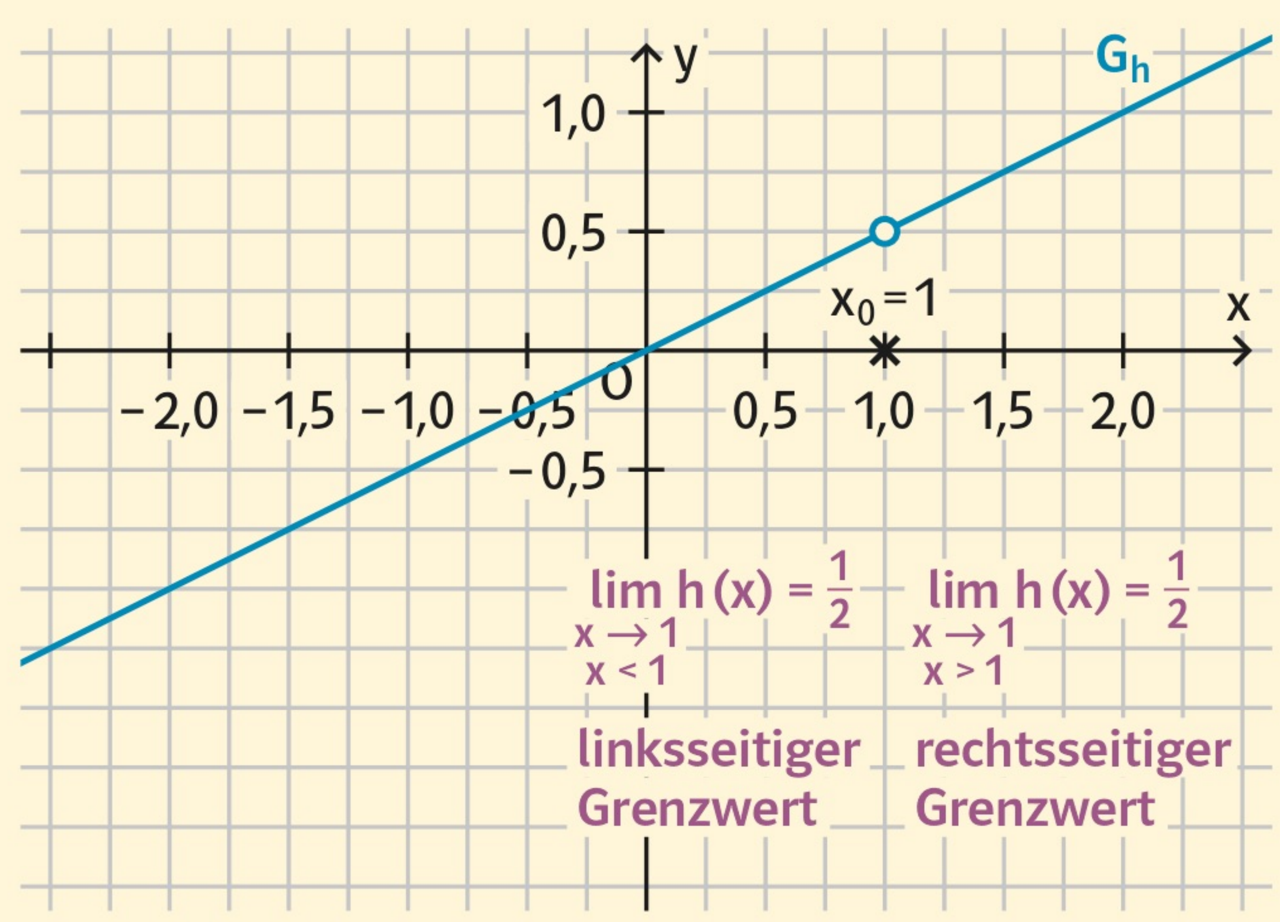


Es gilt $\left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < |x|$, da $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ ist.

Die Funktion g mit $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Der Grenzwert von f für $x \to 0$ existiert jedoch nicht. Betrachtet man noch so kleine Umgebungen von $x_0 = 0$, so nehmen die Funktionswerte von f jeden Wert zwischen −1 und +1 an. Aufgrund dessen lässt sich weder ein links- noch rechtsseitiger Grenzwert bestimmen. Also hat f für $x \to 0$ keinen Grenzwert.



Die Funktion h mit $h(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{x-1}{x-1}$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Sie besitzt an der Stelle $x_0 = 1$ einen endlichen Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = \frac{1}{2}$.
Dies erkennt man, wenn man im Funktionsterm h(x) kürzt. Der Funktionsterm $\frac{x}{2} \cdot \frac{x-1}{x-1}$ ist äquivalent zu $\frac{x}{2}$, wobei jedoch zu beachten ist, dass h an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert ist.
Es gilt $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.
G_h hat somit ein „Loch" bei $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.



Vergleichen Sie hierzu auch die Exkursion auf Seite 66 f.

1 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \begin{cases} 2^{-x} & \text{für } x \leq 1 \\ x^{-1} - \frac{1}{2} & \text{für } 1 < x < 3 \\ x^4 - 6x^3 + 9x^2 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$.

Untersuchen Sie die Stetigkeit von f an den Nahtstellen mithilfe der formalen Definition der Stetigkeit.

2 Gegeben ist die Funktion $k\colon x \mapsto x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von k mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion k für $x \to 0$ einen Grenzwert besitzt, und geben Sie diesen gegebenenfalls an.

c) Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Zeichnen Sie den Graphen von k mit einer geeigneten Mathematiksoftware und beschreiben Sie damit Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen von k und f.

3 Gegeben ist die Funktion $l\colon x \mapsto \begin{cases} 1{,}5^{x} & \text{für } x < -1 \\ \frac{1}{x-2} + 1 & \text{für } 1 < x < 1{,}5 \\ x^2 - 4x + a & \text{für } x > 1{,}5 \end{cases}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass l an der Stelle $x_0 = -1$ einen Grenzwert besitzt, und geben Sie diesen an.

b) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von l für $x \to 1{,}5$ in Abhängigkeit des Parameters a.

Rückblick

Grenzwerte von Funktionen

Kommen die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f für beliebig groß werdende x-Werte einer Zahl g beliebig nahe, so heißt g **Grenzwert** von f für $x \to +\infty$.

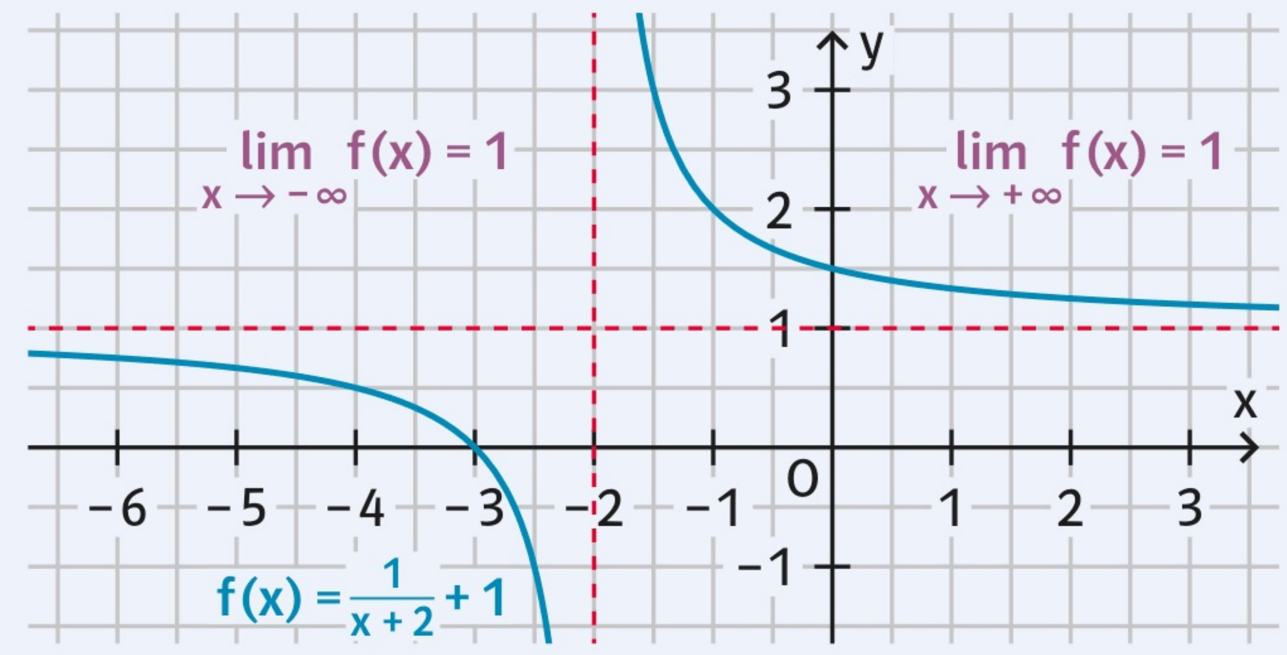
Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$

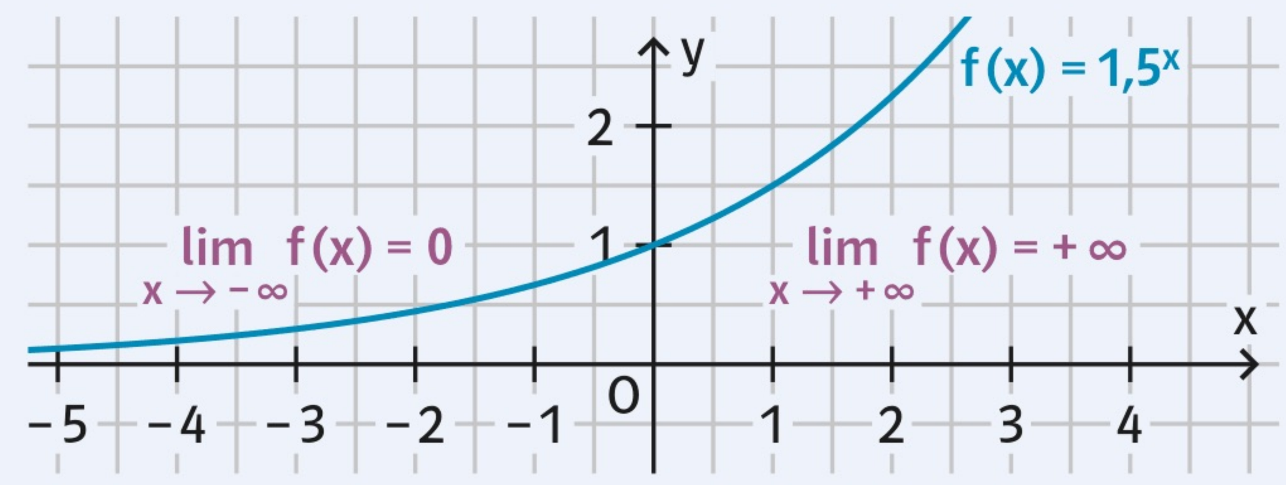
Entsprechend ist der Grenzwert einer Funktion für $x \to -\infty$ definiert.

Funktionen, die für $x \to +\infty$ oder für $x \to -\infty$ einen Grenzwert besitzen, bezeichnet man dort als **konvergent**.

Funktionen, die für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ keinen Grenzwert besitzen, bezeichnet man dort als **divergent**.

Zudem werden die Schreibweisen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ verwendet.

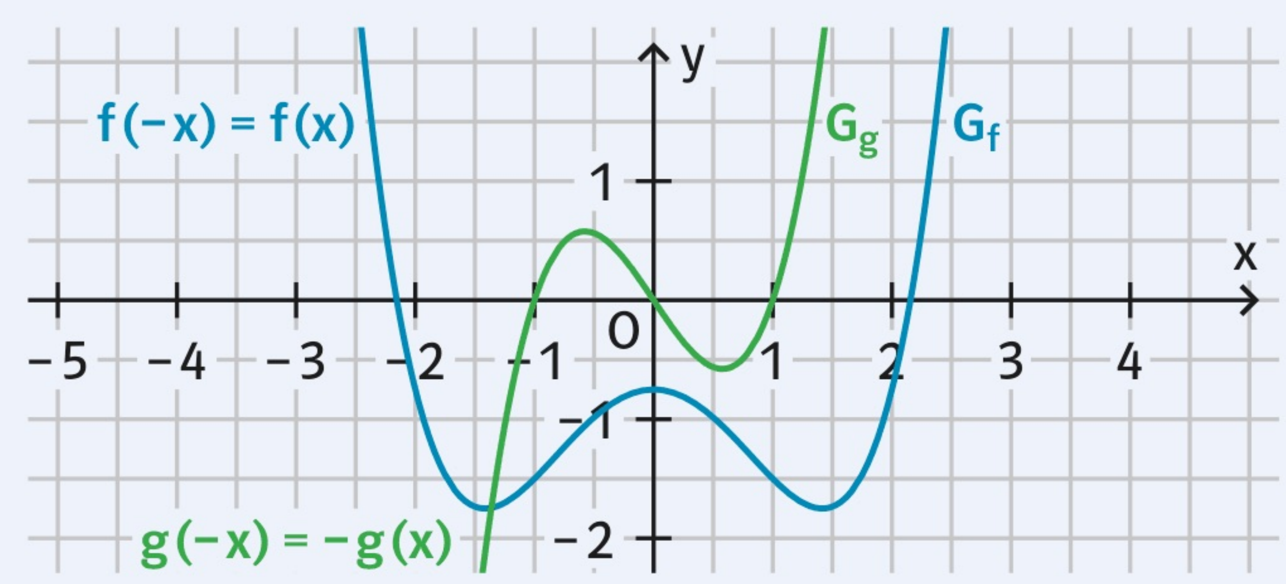




Symmetrie von Funktionsgraphen

Der Graph einer Funktion f ist genau dann

- **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.
- **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

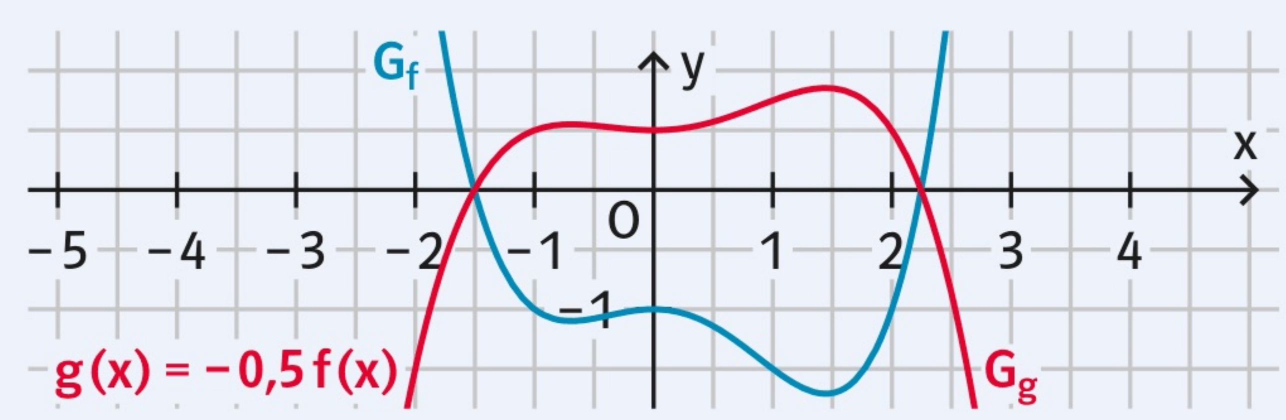


Verschieben, Strecken und Spiegeln von Funktionsgraphen

Der Graph der Funktion g geht aus dem der Funktion f hervor.

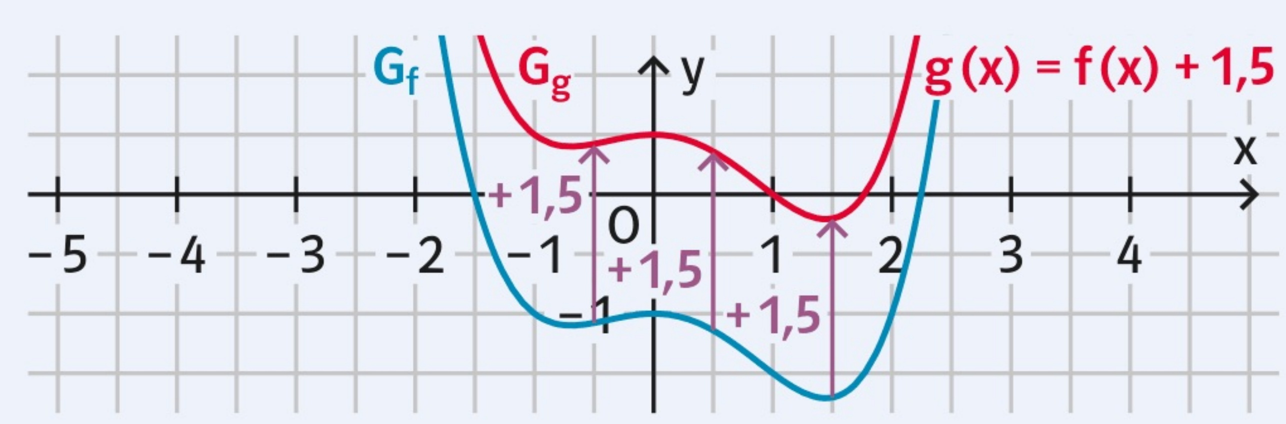
$$\mathbf{g(x) = a \cdot f(x)}$$

Strecken des Graphen von f in **y-Richtung** mit dem Faktor $|a|$.
Falls $a < 0$ ist, wird zudem an der x-Achse gespiegelt.



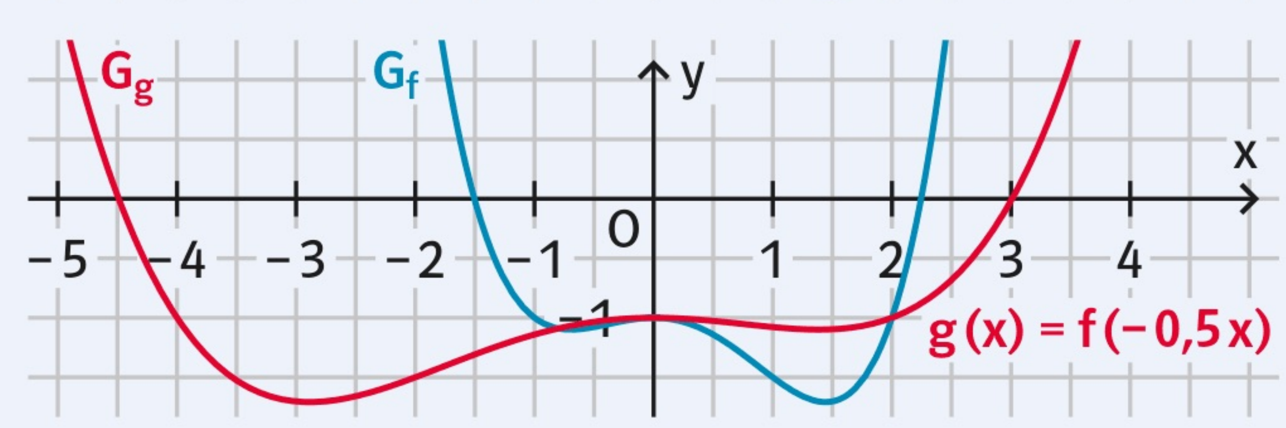
$$\mathbf{g(x) = f(x) + d}$$

Verschieben des Graphen von f um d in **y-Richtung**.



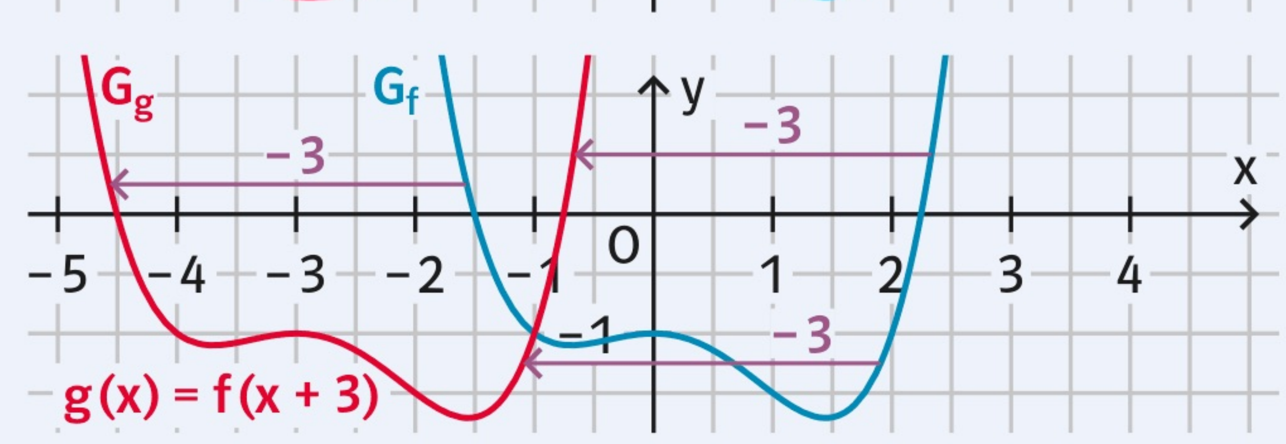
$$\mathbf{g(x) = f(b \cdot x)}$$

Strecken des Graphen von f in **x-Richtung** mit dem Faktor $\left|\frac{1}{b}\right|$.
Falls $b < 0$ ist, wird zudem an der y-Achse gespiegelt.



$$\mathbf{g(x) = f(x + c)}$$

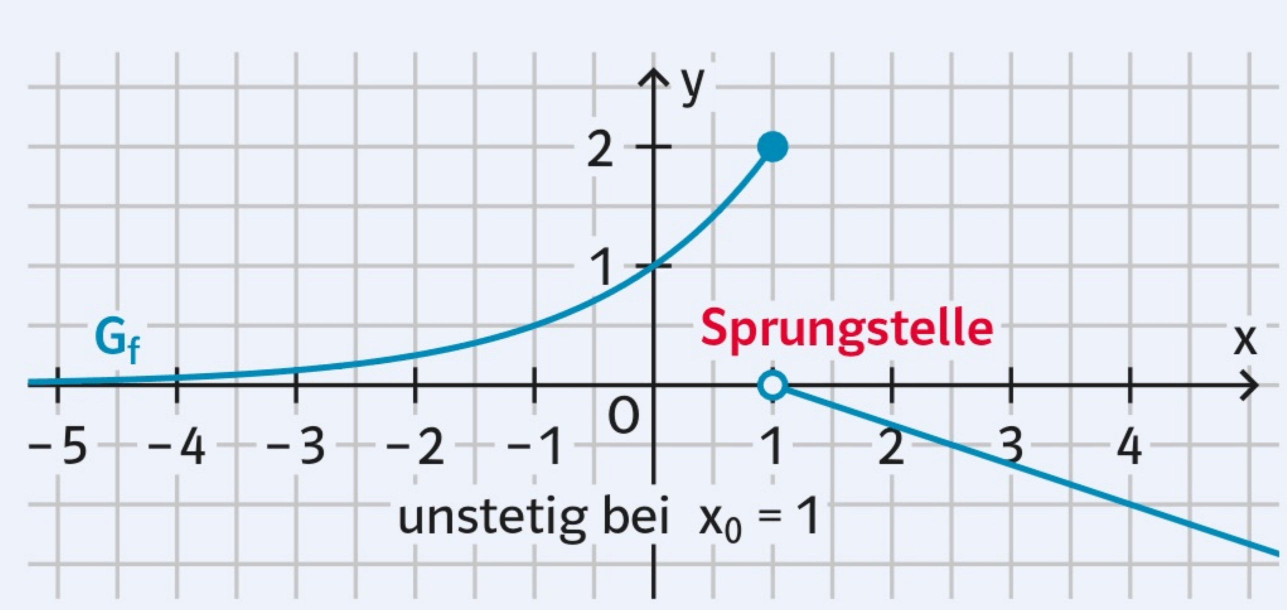
Verschieben des Graphen von f um $-c$ in **x-Richtung**.



Stetigkeit von Funktionen

Ist eine Funktion f in einem Intervall definiert und kann ihr Graph auf diesem Intervall ohne abzusetzen durchgezeichnet werden, dann nennt man f auf dem Intervall **stetig**.

Macht der Graph einer Funktion h an einer Stelle der Definitionsmenge einen „Sprung", so nennt man die Funktion an dieser Stelle **unstetig**.



Lösungen | Seite 198

1 Geben Sie den Grenzwert der Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an, sofern dieser existiert. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen an und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f: x \mapsto -\frac{1}{x-1} + 2$ **b)** $g: x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **c)** $h: x \mapsto \sin(\pi x)$ **d)** $i: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3$

2 Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{-2}{x-1}$ durch eine Verschiebung hervor, wobei der Graph von g die Asymptoten mit den Gleichungen $x = -4$ und $y = 3$ hat. Geben Sie die zugehörige Verschiebung in x- und y-Richtung an sowie den Funktionsterm der Funktion g.

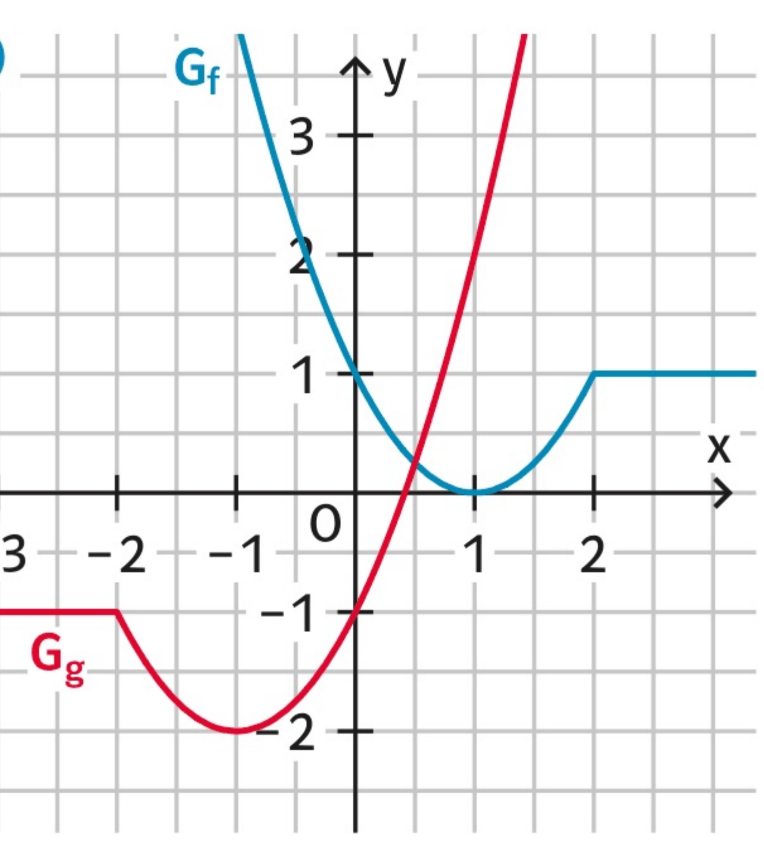
3 Der Graph der Funktion g entsteht aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto -x(x^2 + 2)$ durch eine Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und anschließende Verschiebung um 3 in y-Richtung. Der Graph von h entsteht aus dem von f, indem die angegebene Reihenfolge von Streckung und Verschiebung vertauscht wird. Begründen Sie, dass die Funktionsterme von g und h unterschiedlich sind.

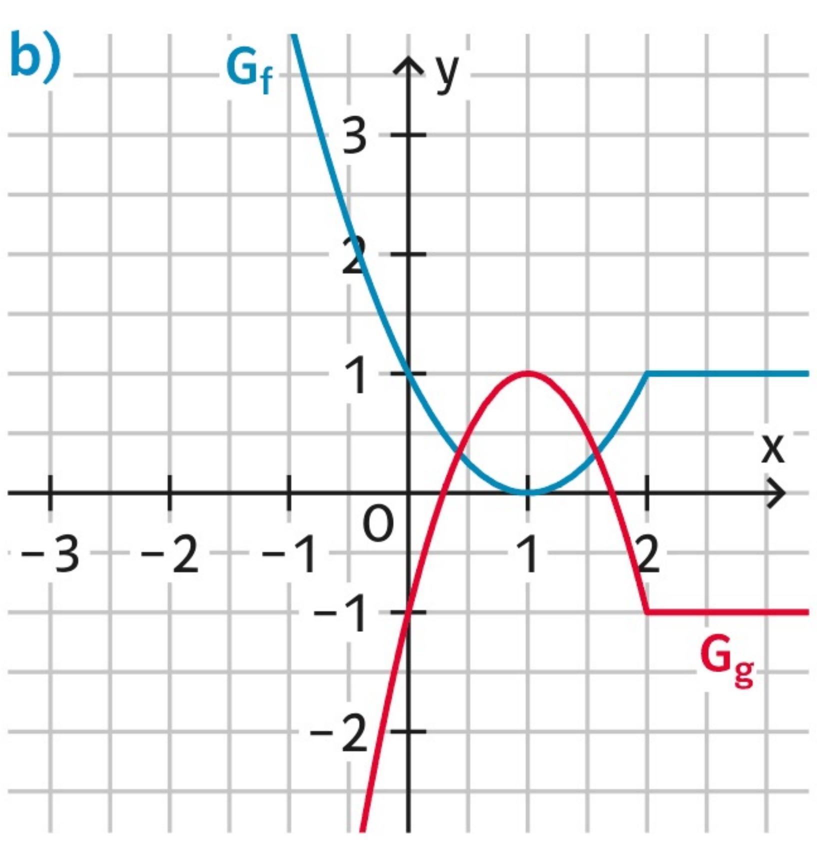
4 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion bezüglich Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung.

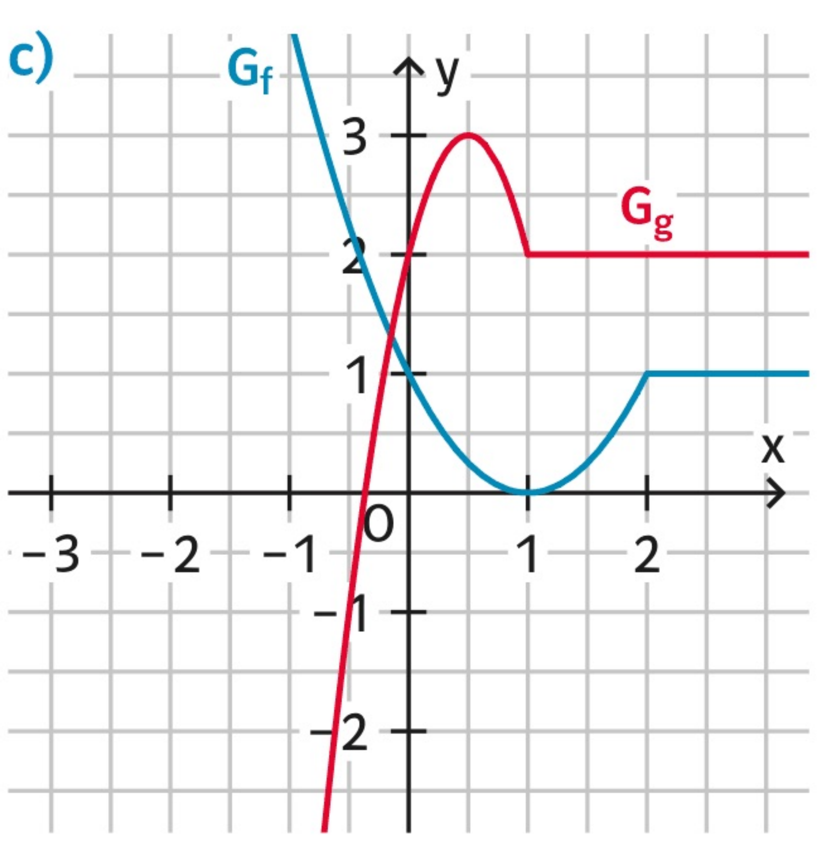
a) $f: x \mapsto -x^3 + 2x$ **b)** $g: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1$ **c)** $h: x \mapsto \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$

d) $i: x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **e)** $k: x \mapsto (x^2 - 1)\cdot(x^2 + 1)$ **f)** $l: x \mapsto -x(x + 1)^2$

5 Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g.
Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f durch Verschiebungen, Streckungen oder Spiegelungen hervorgeht, und geben Sie den Funktionsterm von g in Abhängigkeit des Funktionsterms von f an.

a)


b)


c)


6 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} -x - 2 & \text{für } x < -1 \\ g(x) & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$, wobei g(x) ein Polynom ist.
Bestimmen Sie g(x) so, dass f stetig ist und

a) g(x) ein Polynom vom Grad 1 ist und f bei $x = 1$ eine Nullstelle besitzt,
b) g(x) ein Polynom vom Grad 2 ist und f bei $x = 1$ eine doppelte Nullstelle besitzt,
c) g(x) ein Polynom vom Grad 3 ist und f bei $x = 1$ eine doppelte Nullstelle besitzt.

7 Die Parkgebühren in einem Parkhaus am Flughafen für den ersten Tag können der Tabelle entnommen werden.

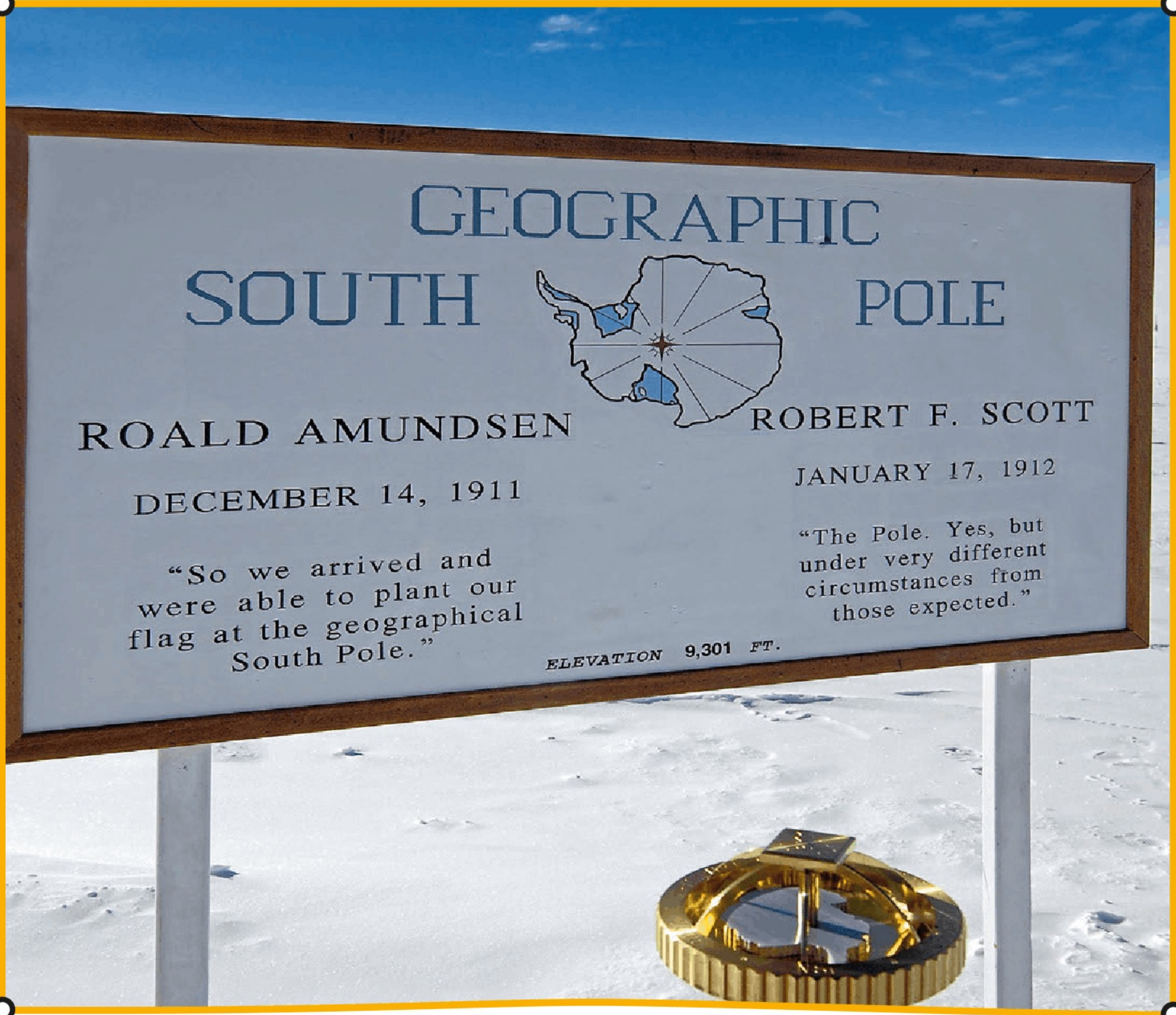
Parkdauer bis	15 Min.	1 Std.	2 Std	3 Std.	5 Std.	8 Std.	24 Std.
Gebühr (in €)	frei	5,00	8,00	10,00	14,00	18,00	27,00

a) Ein Geschäftsmann fährt um 7:14 Uhr in das Parkhaus und steckt sein Parkticket abends um 19:07 in den Parkscheinautomaten. Bestimmen Sie den Betrag, den er zu zahlen hat.
b) Stellen Sie die Parkgebühren für den ersten Tag in Abhängigkeit von der Parkzeit mit einem Funktionsgraphen dar und erläutern Sie, dass die zugehörige Funktion unstetig ist.

II Gebrochen-rationale Funktionen

„Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber bei dem Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher."

Dieses Zitat wird zwar Albert Einstein (1879 – 1955), deutsch-Schweizer-US-amerikanischer theoretischer Physiker, zugeschrieben, stammt aber ziemlich sicher nicht von ihm.



Das können Sie schon

- Eigenschaften elementarer gebrochen-rationaler Funktionen bestimmen
- Quadratische Gleichungen lösen
- Koordinaten von Schnittpunkten zweier Funktionsgraphen bestimmen
- Bruchgleichungen lösen
- Den charakteristischen Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion ermitteln
- Geeignete Software im Umgang mit Funktionen verwenden

Test

Check-in zu Kapitel II Seite 191



Das können Sie bald

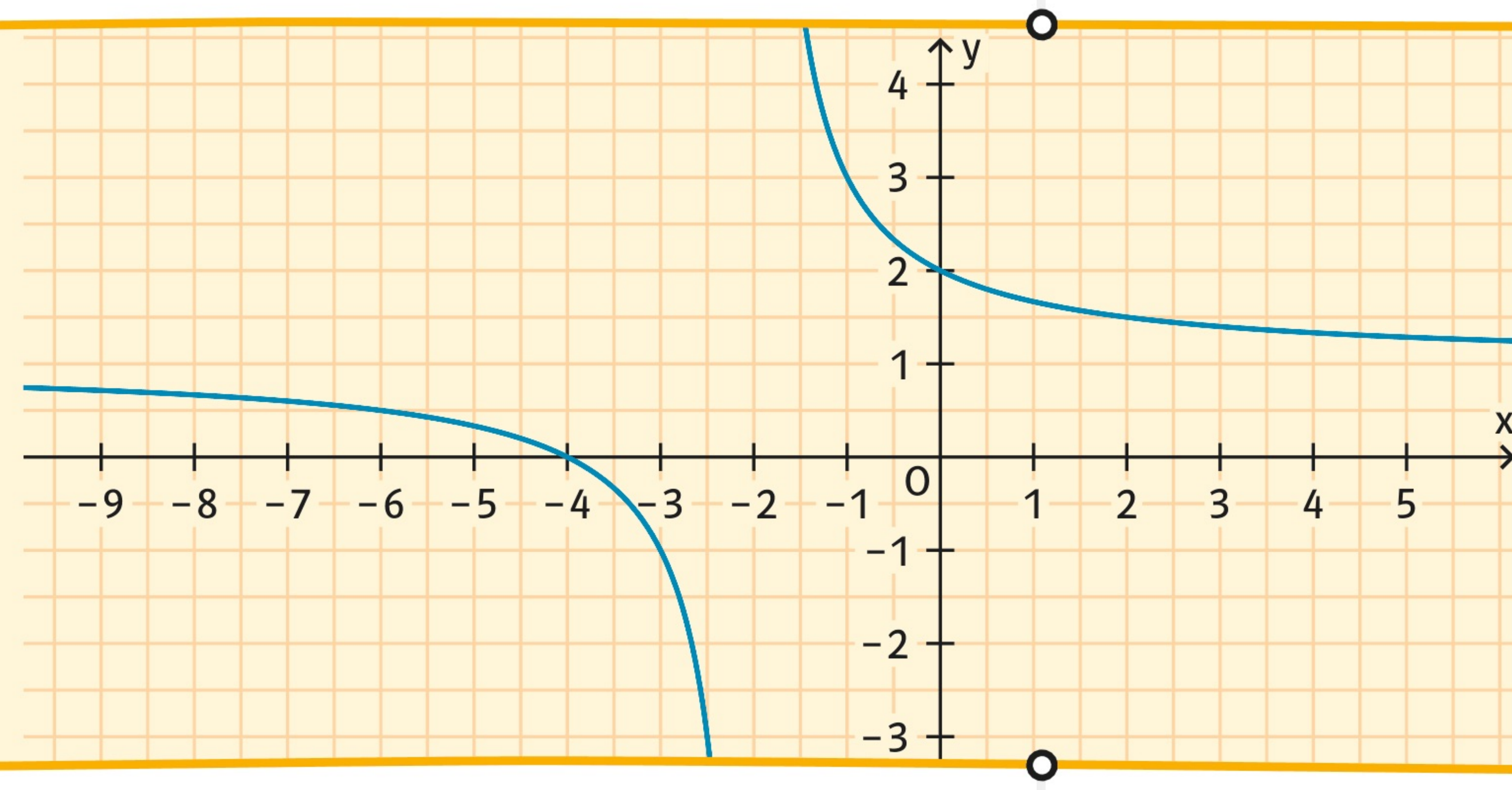
- Das Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ sowie in der Umgebung von Definitionslücken bestimmen
- Zusammenhänge zwischen dem Funktionsterm und dem Graphen einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion erkennen
- Koordinaten von Schnittpunkten der Graphen zweier einfacher gebrochen-rationaler Funktionen bestimmen

1 Definitionsmenge und Nullstellen

Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{2}{x+2} + 1$ und $g\colon x \mapsto \frac{x+4}{x+2}$.

a) Erläutern Sie anhand charakteristischer Eigenschaften, dass beide Funktionen durch den abgebildeten Graphen dargestellt werden.

b) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen identisch sind.



Gebrochen-rationale Funktionen wie g mit g(x) sind bereits bekannt. Eine alternative Darstellung von g(x) kann man durch Termumformungen erhalten. Es kann sich für den Funktionsterm von g ein Bruch ergeben, dessen Zähler und Nenner jeweils ein Polynom ist.

g mit $g(x) = \frac{1}{x+2} - 4$:

$$\frac{1}{x+2} - 4 = \frac{1}{x+2} - \frac{4(x+2)}{x+2} = \frac{1-4(x+2)}{x+2} = \frac{-4x-7}{x+2}$$

$$\Rightarrow\ g(x) = \frac{1}{x+2} - 4 = \frac{-4x-7}{x+2}$$

Definition: Eine Funktion heißt **gebrochen-rational**, wenn man sie in der Form $\mathbf{x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}}$ darstellen kann, wobei p(x) und q(x) Polynome sind und q(x) mindestens vom Grad 1 ist.

Beispiele:

$x \mapsto \frac{2x-1}{x+2}$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$,

$x \mapsto \frac{5}{x^2+4}$ mit $D = \mathbb{R}$,

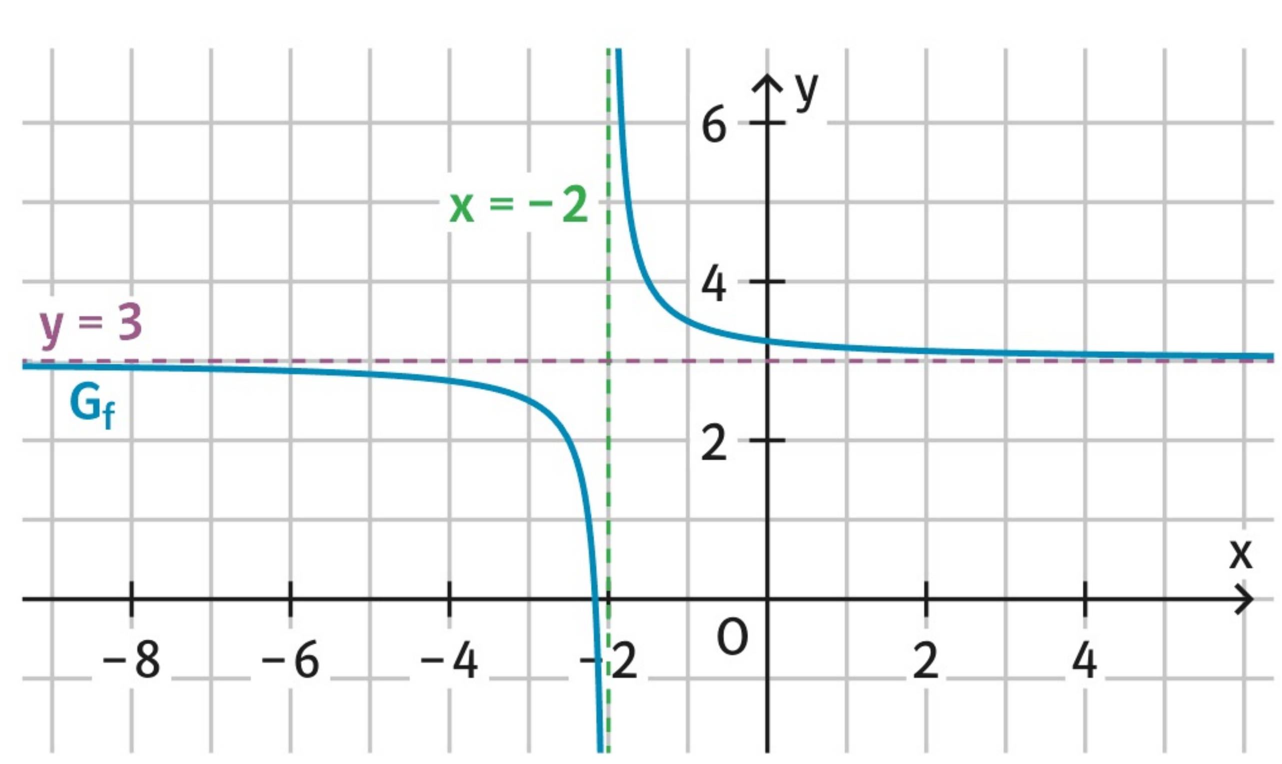
$x \mapsto \frac{x^2-3x+1}{x(2x-2)}$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{0; 1\}$

Zur Erinnerung:
1. Wenn nichts anderes angegeben ist, wird im Folgenden als Definitionsmenge $D = D_{max}$ verwendet.
2. Werte, für die der Nenner null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge. Man nennt sie **Definitionslücken**.

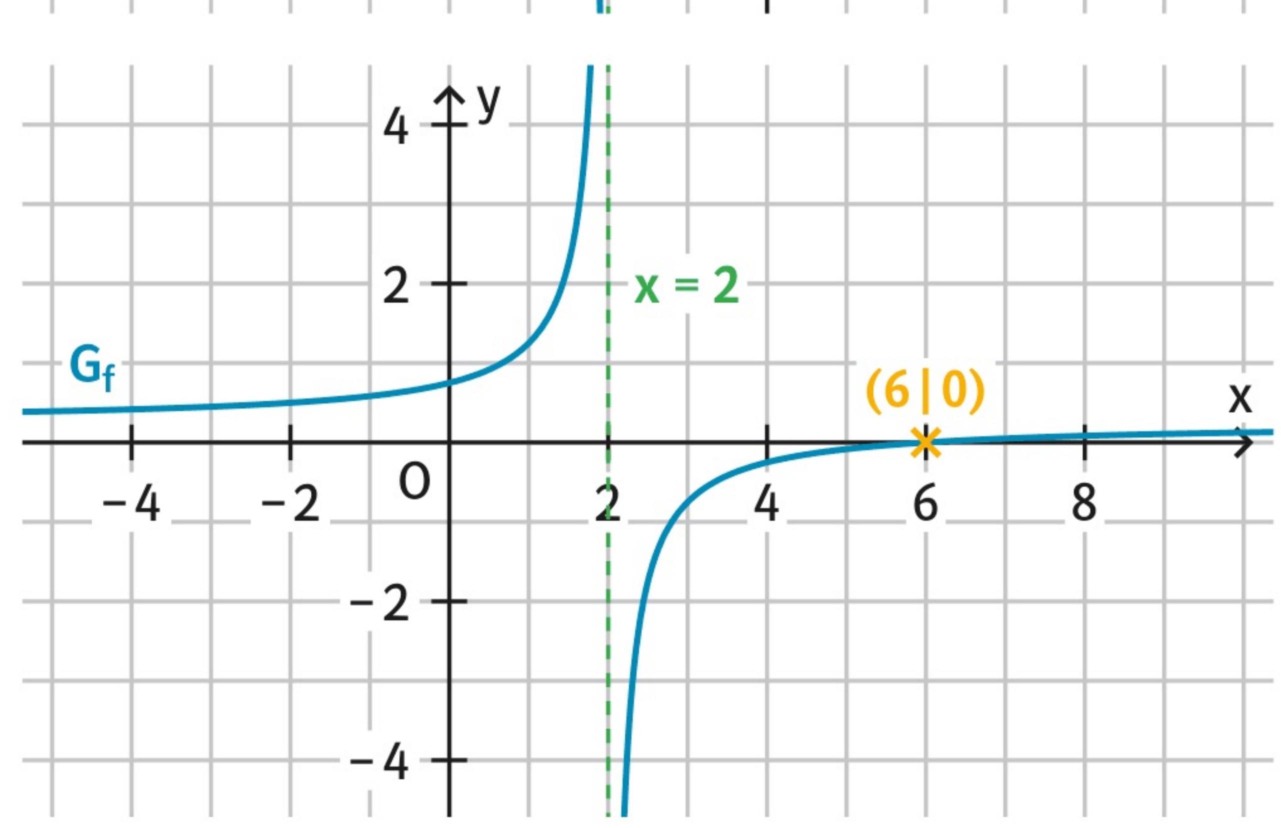
In diesem Buch werden in der Regel einfache gebrochen-rationale Funktionen betrachtet, bei denen das Zähler- und das Nennerpolynom jeweils höchstens Grad 2 aufweist und deren Funktionsterme in vollständig gekürzter Form vorliegen.

Bemerkungen:

– Ist der Term einer gebrochen-rationalen Funktion f in der Form $\frac{a}{x+b} + c$ gegeben, so kann man unmittelbar die Definitionsmenge D sowie die Gleichungen der Asymptoten von G_f angeben.
Für f mit $f(x) = \frac{0{,}5}{x+2} + 3$ ist $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ und G_f hat die Asymptoten mit den Gleichungen $x = -2$ und $y = 3$.



– Ist der Term einer gebrochen-rationalen Funktion f in der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ gegeben, lässt sich die Definitionsmenge D durch Lösen der Gleichung $q(x) = 0$ bestimmen und die Nullstellen von f durch Lösen der Gleichung $p(x) = 0$.
Für f mit $f(x) = \frac{0{,}5x-3}{2x-4}$ folgt aus $2x - 4 = 0$ $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ und aus $0{,}5x - 3 = 0$ die Nullstelle $x = 6$.



Hinweis:
Ein Bruch ist genau dann null, wenn sein Zähler null ist:
$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0.$

Beispiel 1

Formen Sie $f(x) = \frac{1}{x+2} + 3x - 1$ und $g(x) = \frac{-2}{x-1} - 1{,}5$ jeweils so um, dass beide Funktionsterme die Darstellung $\frac{p(x)}{q(x)}$ haben, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind.

Lösung

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + 3x - 1 = \frac{1}{x+2} + \frac{3x(x+2)}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} = \frac{1 + 3x^2 + 6x - x - 2}{x+2} = \frac{3x^2 + 5x - 1}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{-2}{x-1} - 1{,}5 = \frac{-2}{x-1} - \frac{1{,}5(x-1)}{x-1} = \frac{-2}{x-1} - \frac{1{,}5x - 1{,}5}{x-1} = \frac{-2 - (1{,}5x - 1{,}5)}{x-1} = \frac{-2 - 1{,}5x + 1{,}5}{x-1} = \frac{-1{,}5x - 0{,}5}{x-1}$$

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und alle Nullstellen der Funktion f.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 0{,}5}$ b) $f(x) = \frac{3}{x+4} + 5$ c) $f(x) = \frac{-4 + 0{,}25x}{x^2 + 4}$

Lösung

a) Definitionsmenge: $x + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-0{,}5\}$.
Nullstellen: $\frac{x^2-1}{x+0{,}5} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

b) Definitionsmenge: $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$.
Nullstellen: $\frac{3}{x+4} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x+4} = -5 \Leftrightarrow 3 = -5(x+4) \Leftrightarrow 3 = -5x - 20 \Leftrightarrow x = -\frac{23}{5}$.

c) Definitionsmenge: $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$. Diese Gleichung ist nicht lösbar; also ist $D = \mathbb{R}$.
Nullstellen: $\frac{-4 + 0{,}25x}{x^2+4} = 0 \Leftrightarrow -4 + 0{,}25x = 0 \Leftrightarrow 0{,}25x = 4 \Leftrightarrow x = 16$.

Aufgaben

1 Erläutern Sie, wie man die Definitionsmenge und die Nullstellen einer gebrochen-rationalen Funktion der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ bestimmen kann.

2 Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f.

a) $f: x \mapsto \frac{7}{2x - 4}$ b) $f: x \mapsto \frac{3}{x+3} + 3$ c) $f: x \mapsto \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$ d) $f: x \mapsto \frac{2x^2 - 3x}{4x}$

e) $f: x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 4}$ f) $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ g) $f: t \mapsto \frac{t^2}{t^2 - \frac{1}{9}}$ h) $f: s \mapsto \frac{4s - 1}{s^2 + 7s}$

3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g.

a) $g: x \mapsto \frac{-x + 2}{2x}$ b) $g: x \mapsto \frac{x+2}{x-2}$ c) $g: s \mapsto \frac{s(s - 17)}{s + 1}$ d) $g: x \mapsto \frac{0{,}4}{x+1} - 2$

e) $g: t \mapsto \frac{(2t - 4)(t + 7)}{(t - 1)(t + 4)}$ f) $g: s \mapsto \frac{s^2 - 4s + 4}{2s + 1}$ g) $g: x \mapsto \frac{4x^2 - 8x + 2}{x^2 - 3}$ h) $g: x \mapsto 2{,}5 + \frac{0{,}75}{x - 1}$

4 Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen der Funktion g an.

a) $g: x \mapsto \frac{-2}{x-4} + 2$ b) $g: x \mapsto \frac{4{,}25}{x+3} + 5$ c) $g: t \mapsto \frac{2}{t - 73} - 1{,}5$ d) $g: x \mapsto \frac{-2}{4x - 3} - 1$

Test 1

Lösungen | Seite 199

5 **Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Teil 1, Aufgabengruppe II, Aufgabe 1**
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Bestimmen Sie D sowie die Nullstelle von f.

6 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$ und $g(x) = \frac{1}{x-1} + 4$. Beurteilen Sie die Aussage.
a) Die Funktionen f und g haben die gleiche Definitionsmenge.
b) Zur Bestimmung der Nullstellen von f genügt es, die Gleichung $3x - 1 = 0$ zu lösen.

7 Formen Sie den Term f(x) so um, dass er die Darstellung $\frac{p(x)}{q(x)}$ hat, wobei p(x) und q(x) Polynome sind. Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

a) $f(x) = \frac{1}{x-4} + 2$ b) $f(x) = \frac{-2}{x+1{,}5} - 3$ c) $f(x) = \frac{2}{x} + 0{,}5x$ d) $f(x) = \frac{1}{x+2} - x + 2$

8 Erklären Sie sich abwechselnd, welche Eigenschaften der Funktion f und ihres Graphen G_f unmittelbar mithilfe des Funktionsterms f(x) bestimmt werden können.

a) $f\colon x \mapsto \frac{4x-1}{5x-10}$ b) $f\colon x \mapsto \frac{7}{x-3} + 3{,}8$

9 Faktorisieren Sie, falls möglich, Zähler und Nenner des Funktionsterms f(x) und geben Sie die Nullstellen sowie die Definitionsmenge der Funktion f an. Bestimmen Sie zudem mithilfe eines Funktionenplotters die Gleichung der waagerechten Asymptote.

a) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2+2x}$ b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-25}$ c) $f(x) = \frac{-4x-x^2}{2x^2-8}$ d) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-6x+9}$

10 Geben Sie einen Funktionsterm einer gebrochen-rationalen Funktion f an, die
a) die Nullstelle 3 und deren Graph die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = -2$ hat,
b) die Nullstellen 2 und −2 sowie die Definitionslücken 4 und −4 hat,
c) die keinen Schnittpunkt mit der x-Achse hat, aber die Definitionslücken −1 und 2.

11 Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f, die Koordinaten der Schnittpunkte ihres Graphen G_f mit den Koordinatenachsen und die Gleichungen aller Asymptoten von G_f. Skizzieren Sie dann G_f und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $f\colon x \mapsto \frac{1}{x+1} - 1$ b) $f\colon x \mapsto \frac{4x+2}{2x}$ c) $f\colon x \mapsto \frac{-2}{x-4} + 2{,}5$ d) $f\colon x \mapsto \frac{2(x+1)+1}{x+1}$

Test 2

Lösungen | Seite 199

12 Geben Sie eine gebrochen-rationalen Funktion f an, die
a) eine doppelte Nullstelle und die Definitionslücken 0 und 5 hat,
b) keine Definitionslücken hat und deren Funktionsterm die Darstellung $\frac{p(x)}{q(x)}$ hat, wobei die Polynome p(x) und q(x) vom Grad 2 sind.

13 Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h mit $g(x) = \frac{3}{x-2} + 2x - 1$ und $h(x) = \frac{2x^2-5x+5}{x-2}$ identisch sind. Bestimmen Sie dann die Definitionsmenge und die Nullstellen von g.

14 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
a) Zeichnen Sie G_f mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung von Schiebereglern. Stellen Sie dabei die Schieberegler mit $a = 2$, $b = 0{,}5$, $c = -2$ und $d = 1$ ein. Beschreiben Sie, wie sich die Veränderung des Parameters a bzw. b auf den Verlauf von G_f auswirkt.
b) Begründen Sie, welche Eigenschaften von f bzw. G_f unabhängig von d (mit $d \neq -0{,}5$) sind.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 199

G 15 Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie den Term gegebenenfalls.

a) $x^2 \cdot (2 + x^2 - 4x)$ b) $x^4 \cdot \left(-\frac{3}{x} + 2 + \frac{1}{x^3}\right)$ c) $x^3 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{3x^2} + x^{-3}\right)$

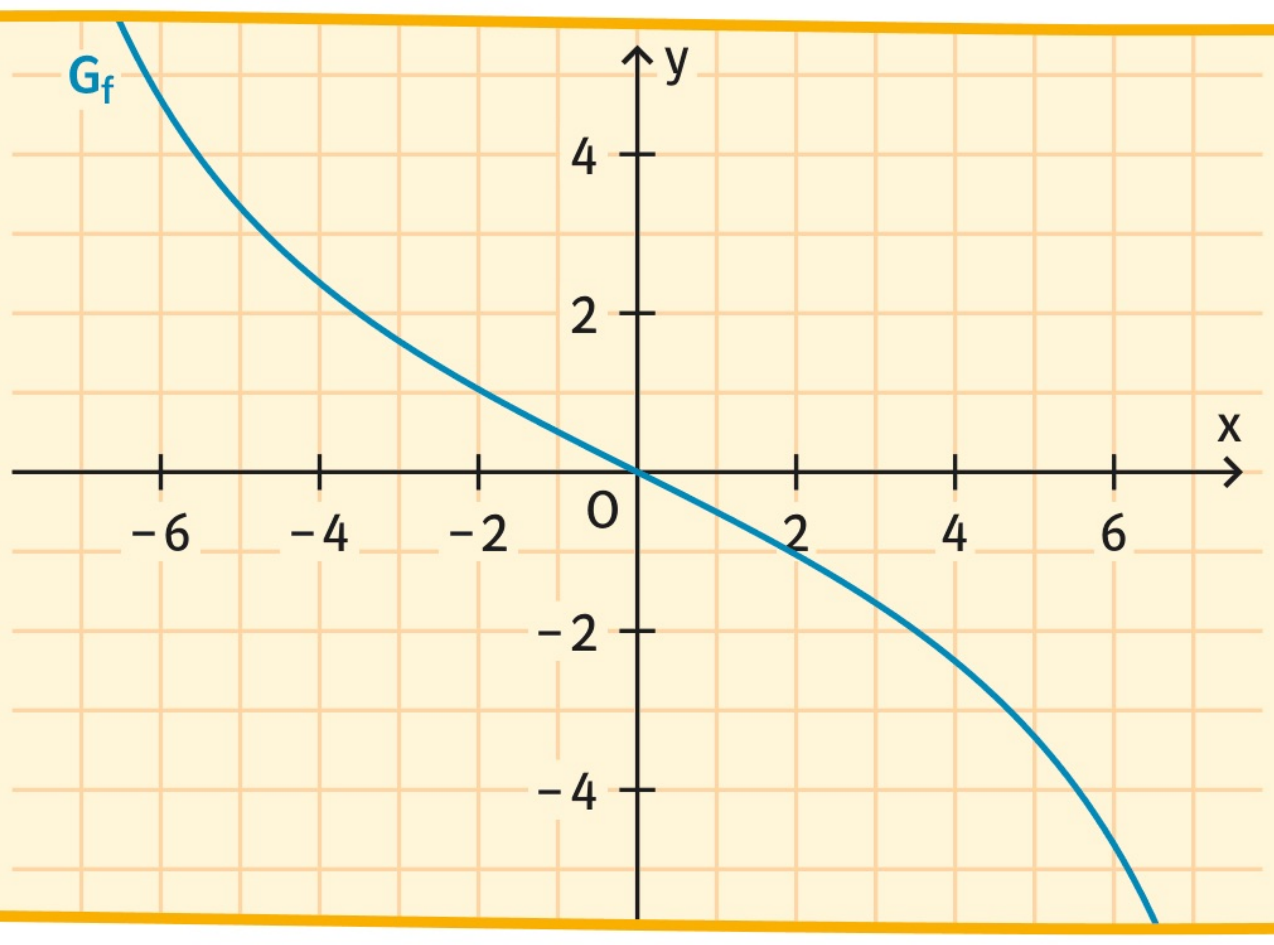
G 16 Klammern Sie die Potenz mit dem höchsten Exponenten aus. Führen Sie anschließend eine Probe durch, indem Sie wieder ausmultiplizieren und das Ergebnis mit dem ursprünglichen Term vergleichen.

a) $5x^2 - 4x + 6$ b) $5x^2 + x^3 - x + 1$ c) $3x - \frac{3}{2}x^2 - 7 + 0{,}25x^3$

Beispiel:
$7x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x - 5$
$= x^3 \cdot \left(\frac{7}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{5}{x^3}\right)$

2 Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

Marlene plottet den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{50x}{(x-10)(x+10)}$ und überlegt: „Die Funktion f müsste für $x \to +\infty$ gegen $-\infty$ divergieren."
Beurteilen Sie Marlenes Überlegung.

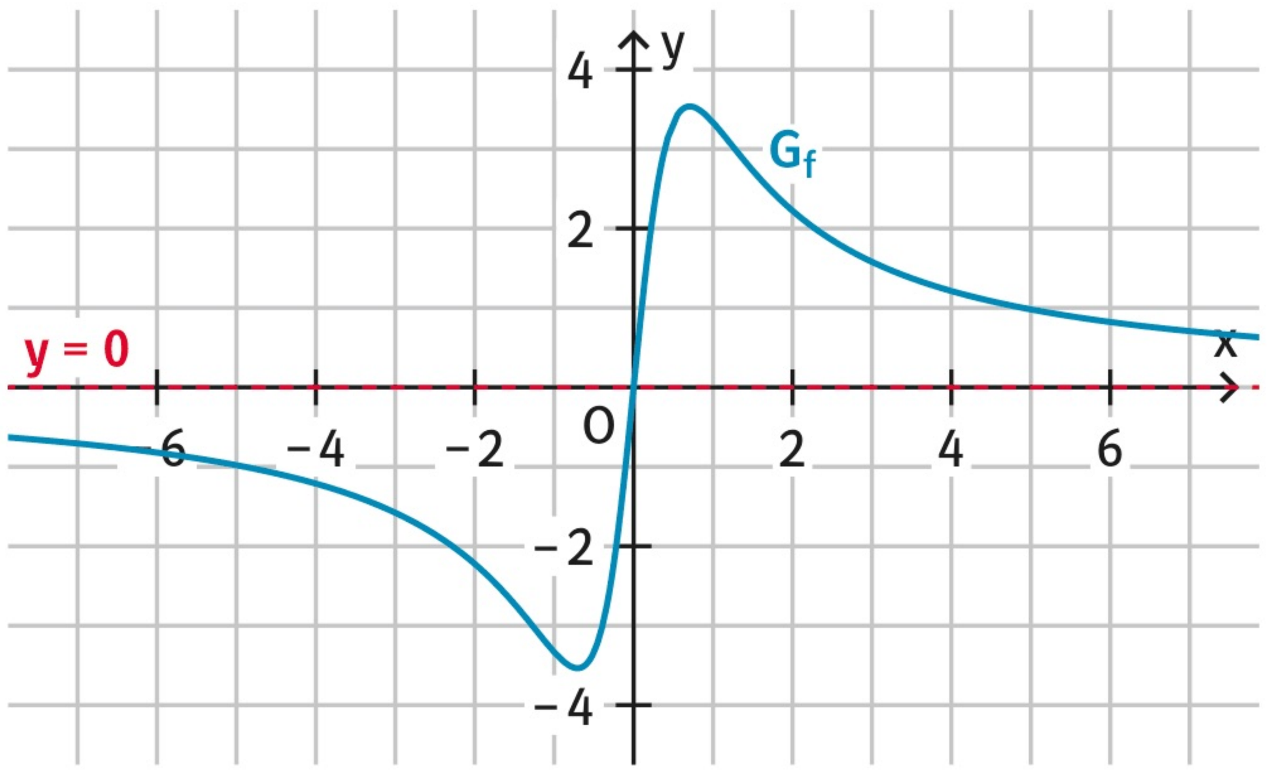


Eine gebrochen-rationale Funktion kann für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ konvergieren oder divergieren. Das Verhalten einer gebrochen-rationalen Funktion der Form $f: x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ hängt vom Grad des Zähler- und Nennerpolynoms ab:

1. Zählergrad z < Nennergrad n

Betrachtet man $f: x \mapsto \frac{10x}{2x^2+1}$, zeigt sich:

- Es gilt $z = 1 < 2 = n$.
- Der Graph nähert sich im Unendlichen der waagerechten Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ an.
- Die Funktion konvergiert für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0.
- Begründung des Verhaltens im Unendlichen mithilfe geeigneter Termumformungen:



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x}{2x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{10}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{10}{x}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2+0} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{10x}{2x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{10}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{10}{x}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2+0} = 0$$

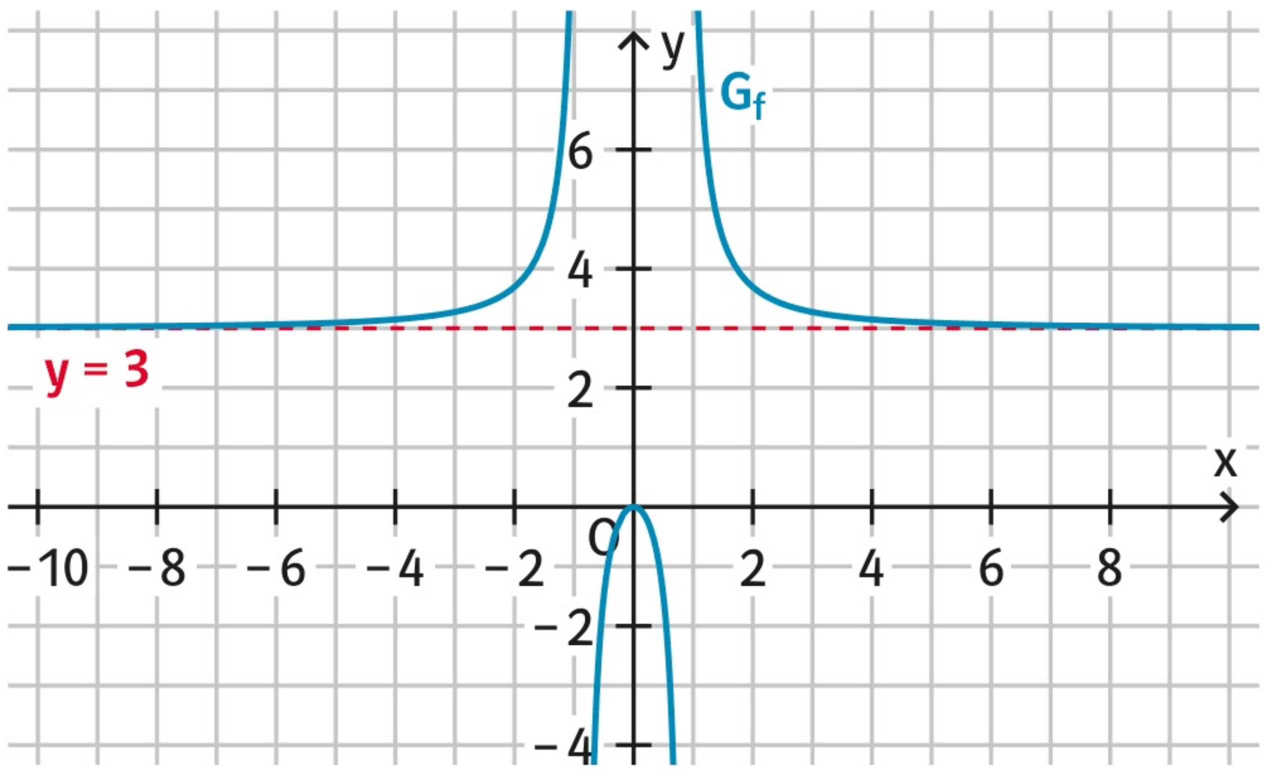
Zur Erinnerung:
Der höchste vorkommende Exponent von x eines Polynoms gibt den Grad dieses Polynoms an. So ist zum Beispiel $7x^4 + 2x + 8$ vom Grad 4.

Tipp:
Untersucht man das Verhalten einer gebrochen-rationalen Funktion im Unendlichen anhand ihres Funktionsterms, ist es vorteilhaft, die höchste Potenz von x des Nenners sowohl im Zähler als auch im Nenner auszuklammern.

2. Zählergrad z = Nennergrad n

Betrachtet man $f: x \mapsto \frac{6x^2}{2x^2-1{,}5}$, zeigt sich:

- Es gilt $z = n = 2$.
- Der Graph nähert sich im Unendlichen der waagerechten Asymptote mit der Gleichung $y = 3$ an.
- Die Funktion konvergiert für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 3.
- Begründung des Verhaltens im Unendlichen mithilfe geeigneter Termumformungen:



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2}{2x^2-1{,}5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot 6}{x^2\left(2-\frac{1{,}5}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{2-\frac{1{,}5}{x^2}} = \frac{6}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2}{2x^2-1{,}5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \cdot 6}{x^2\left(2-\frac{1{,}5}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{2-\frac{1{,}5}{x^2}} = \frac{6}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

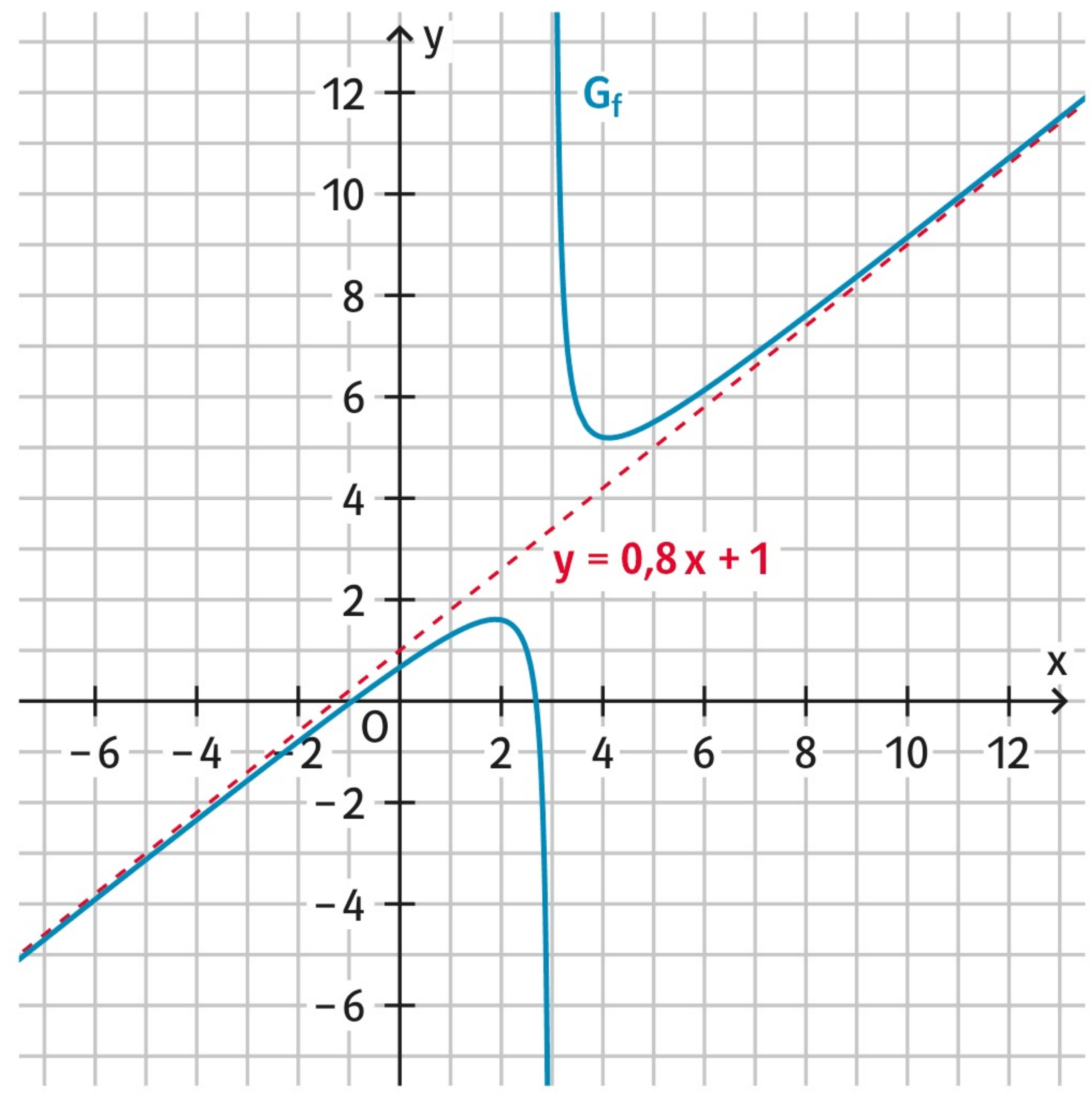
Hinweis:
Liegt der Term einer gebrochen-rationalen Funktion f in der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ vor, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom gleichen Grad sind, dann ist der Quotient der Leitkoeffizienten der Grenzwert von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

Der Koeffizient a_n der höchsten Potenz x^n eines Polynoms heißt **Leitkoeffizient**. Beispielsweise hat das Polynom $3x^2 - 6x + 10$ den Leitkoeffizienten 3.

3. Zählergrad z > Nennergrad n mit z = n + 1

Betrachtet man $f\colon x \mapsto \frac{0{,}8x^2 - 1{,}4x - 2}{x - 3}$, zeigt sich:

- Es gilt $z = 2 > 1 = n$.
- Der Graph nähert sich im Unendlichen einer **schrägen Asymptote** an. Liegt der Funktionsterm in einer günstigen Form vor, hier $f(x) = 0{,}8x + 1 + \frac{1}{x-3}$, kann man die Gleichung der schrägen Asymptote ablesen. Da für betragsmäßig größer werdende x-Werte sich $\frac{1}{x-3}$ dem Wert null annähert und kaum noch Bedeutung für die Berechnung der Funktionswerte f(x) hat, hat die schräge Asymptote die Gleichung $y = 0{,}8x + 1$.



- Die Funktion divergiert für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$.
- Begründung des Verhaltens im Unendlichen mithilfe geeigneter Termumformungen:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{0{,}8x^2 - 1{,}4x - 2}{x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(0{,}8x - 1{,}4 - \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{0{,}8x - 1{,}4 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{0{,}8x^2 - 1{,}4x - 2}{x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(0{,}8x - 1{,}4 - \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{0{,}8x - 1{,}4 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -\infty$$

$0{,}8x + 1 + \frac{1}{x-3}$
$= \frac{0{,}8x(x-3)}{x-3} + \frac{x-3}{x-3} + \frac{1}{x-3}$
$= \frac{0{,}8x^2 - 1{,}4x - 2}{x-3}$

Aus der günstigen Darstellung $f(x) = 0{,}8x + 1 + \frac{1}{x-3}$ folgt unmittelbar für das Verhalten von f im Unendlichen:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (0{,}8x + 1) = +\infty$
und
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (0{,}8x + 1) = -\infty$.

Satz: Ist p(x) ein Polynom vom Grad z, q(x) ein Polynom vom Grad n und $f\colon x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochen-rationale Funktion, dann gilt:

- Ist **z < n**, **konvergiert** f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0 und G_f hat die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.
- Ist **z = n**, **konvergiert** f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen einen festen Wert $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und G_f hat die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = c$.
- Ist **z = n + 1**, **divergiert** f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ und G_f hat eine schräge Asymptote mit der Gleichung $y = mx + t$.

Beispiel 1

Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{-1{,}4x - 2}{3 - 4{,}2x}$, $g\colon x \mapsto \frac{12x - 6}{0{,}01x^2 - 0{,}1x - 1}$ und $h\colon x \mapsto \frac{-2x^2 - 3}{2{,}5x - 0{,}5}$.

a) Beschreiben und begründen Sie den Verlauf der Funktionsgraphen G_f und G_g im Unendlichen.
b) Begründen Sie, dass G_h zwei Asymptoten besitzt.
c) Ermitteln Sie mithilfe geeigneter Termumformungen das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. der Funktion h für $x \to -\infty$.

Lösung

a) Funktion f:
Da $z = n$ gilt, konvergiert f für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ gegen $\frac{-1{,}4}{-4{,}2} = \frac{1}{3}$ und G_f nähert sich im Unendlichen der waagerechten Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}$ an.
Funktion g:
Da $z < n$ gilt, konvergiert g für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ gegen 0 und G_g nähert sich im Unendlichen der waagerechten Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ an.

b) G_h besitzt eine schräge Asymptote, da $z = n + 1$ gilt, und eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0{,}2$, da aus $2{,}5x - 0{,}5 = 0$ die Definitionslücke $x = 0{,}2$ folgt.

c) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1{,}4x - 2}{3 - 4{,}2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-1{,}4 - \frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{3}{x} - 4{,}2\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1{,}4 - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - 4{,}2} = \frac{-1{,}4 - 0}{0 - 4{,}2} = \frac{-1{,}4}{-4{,}2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 - 3}{2{,}5x - 0{,}5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-2x - \frac{3}{x}\right)}{x\left(2{,}5 - \frac{0{,}5}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x - \frac{3}{x}}{2{,}5 - \frac{0{,}5}{x}} = +\infty$$

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{0{,}4x^2}{2x+4}$, ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass der Term $0{,}2x - 0{,}4 + \frac{1{,}6}{2x+4}$ äquivalent zu $f(x)$ ist.

b) Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f.

Lösung

a) $0{,}2x - 0{,}4 + \frac{1{,}6}{2x+4} = \frac{0{,}2x(2x+4)}{2x+4} - \frac{0{,}4(2x+4)}{2x+4} + \frac{1{,}6}{2x+4} = \frac{0{,}4x^2 + 0{,}8x - (0{,}8x + 1{,}6) + 1{,}6}{2x+4} = \frac{0{,}4x^2}{2x+4} = f(x)$

b) Aus $2x + 4 = 0$ ergibt sich die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = -2$.
Aus $f(x) = \frac{0{,}4x^2}{2x+4} = 0{,}2x - 0{,}4 + \frac{1{,}6}{2x+4}$ ergibt sich die schräge Asymptote mit der Gleichung $y = 0{,}2x - 0{,}4$.

Aufgaben

1 Beschreiben Sie mithilfe der Begriffe Konvergenz und Divergenz das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ und begründen Sie dieses.

a) $f\colon x \mapsto \frac{0{,}5x}{2x-2}$ b) $f\colon x \mapsto \frac{3x-1}{1-7x}$ c) $f\colon x \mapsto \frac{4x-6}{0{,}2x^2}$ d) $f\colon x \mapsto \frac{2x^2-6x+1}{112x}$

e) $f\colon x \mapsto \frac{-8}{2x+3x^2}$ f) $f\colon x \mapsto \frac{-3x^2-5x+12}{-0{,}25x^2+6x}$ g) $f\colon x \mapsto \frac{x^2+2x}{-9x+3}$ h) $f\colon x \mapsto \frac{x(3-x)}{-8x-7}$

i) $f\colon x \mapsto \frac{2x(x+2{,}5)}{3x-1}$ j) $f\colon x \mapsto \frac{(x+2)(x-2)}{4x^2-2}$ k) $f\colon x \mapsto \frac{4}{x-2} - 3{,}5$ l) $f\colon x \mapsto 2x + \frac{3}{x^2+2}$

2 Geben Sie die Gleichung der schrägen Asymptote des Funktionsgraphen G_g an. Schließen Sie damit auf den Verlauf von G_g im Unendlichen.

a) $g(x) = 2x + \frac{1}{x-2}$ b) $g(x) = -x + 1 + \frac{4}{x-2}$ c) $g(t) = 2 + \frac{2}{4t-3}$ d) $g(s) = \frac{-3}{2s} - \frac{1}{2}s - 1$

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

3 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Funktionsgraphen der Funktion h an.

a) $h\colon x \mapsto \frac{4x+2}{2-0{,}5x}$ b) $h\colon x \mapsto \frac{3x-5}{x^2}$ c) $h\colon x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{1}{x+2}$ d) $h\colon x \mapsto \frac{12x-7}{x^2+1}$

e) $h\colon x \mapsto 3x - 2 + \frac{5}{x-3}$ f) $h\colon x \mapsto \frac{0{,}5x^2+4x-7}{4x^2-1}$ g) $h\colon r \mapsto \frac{-0{,}34}{-3r-6} - \frac{1}{2}$ h) $h\colon z \mapsto \frac{6(0{,}5z+1)}{4z-3}$

Tipp: Nicht jeder Graph einer gebrochen-rationalen Funktion hat auch senkrechte Asymptoten!

4 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1**
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie D und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.

b) Zeigen Sie, dass $f(x)$ zum Term $x + 7 + \frac{16}{x-1}$ äquivalent ist, und geben Sie die Bedeutung der Geraden g mit der Gleichung $y = x + 7$ für G_f an.

Test 1

Lösungen | Seite 200

5 Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{-3x+2x^2}{x^2+1}$, $g\colon x \mapsto \frac{10x-6}{5x^2-6}$ und $h\colon x \mapsto \frac{0{,}1x^2+3x-0{,}5}{24x-12}$.
Beurteilen Sie die Aussage.

a) Einer der Funktionsgraphen G_f, G_g und G_h hat die x-Achse als Asymptote.

b) Keiner der Funktionsgraphen G_f, G_g und G_h hat eine schräge Asymptote.

c) Die Funktionen f, g und h konvergieren für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

d) Die Graphen der Funktionen f und h haben gleich viele Asymptoten.

6 Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion an, deren Graph sich der Asymptote mit der angegebenen Gleichung nähert. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Lösung mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware.

a) $y = 0$ b) $y = \frac{5}{2}$ c) $x = \frac{3}{2}$ d) $y = 0{,}5x - 4$

7 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{x^2}{(x-3)^2}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware. Nehmen Sie zu der Aussage „Ein Funktionsgraph schneidet niemals seine Asymptote“ Stellung.

b) Bestimmen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware die Intervalle, in denen G_f oberhalb bzw. unterhalb der waagerechten Asymptote verläuft.

8 Ordnen Sie jedem Funktionsgraphen die zugehörige Funktion zu. Begründen Sie Ihre Zuordnungen anhand wesentlicher Eigenschaften der Funktionen.

$g\colon x \mapsto x - \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}$

$k\colon x \mapsto \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

$m\colon x \mapsto \frac{3x^2}{x^2+1}$

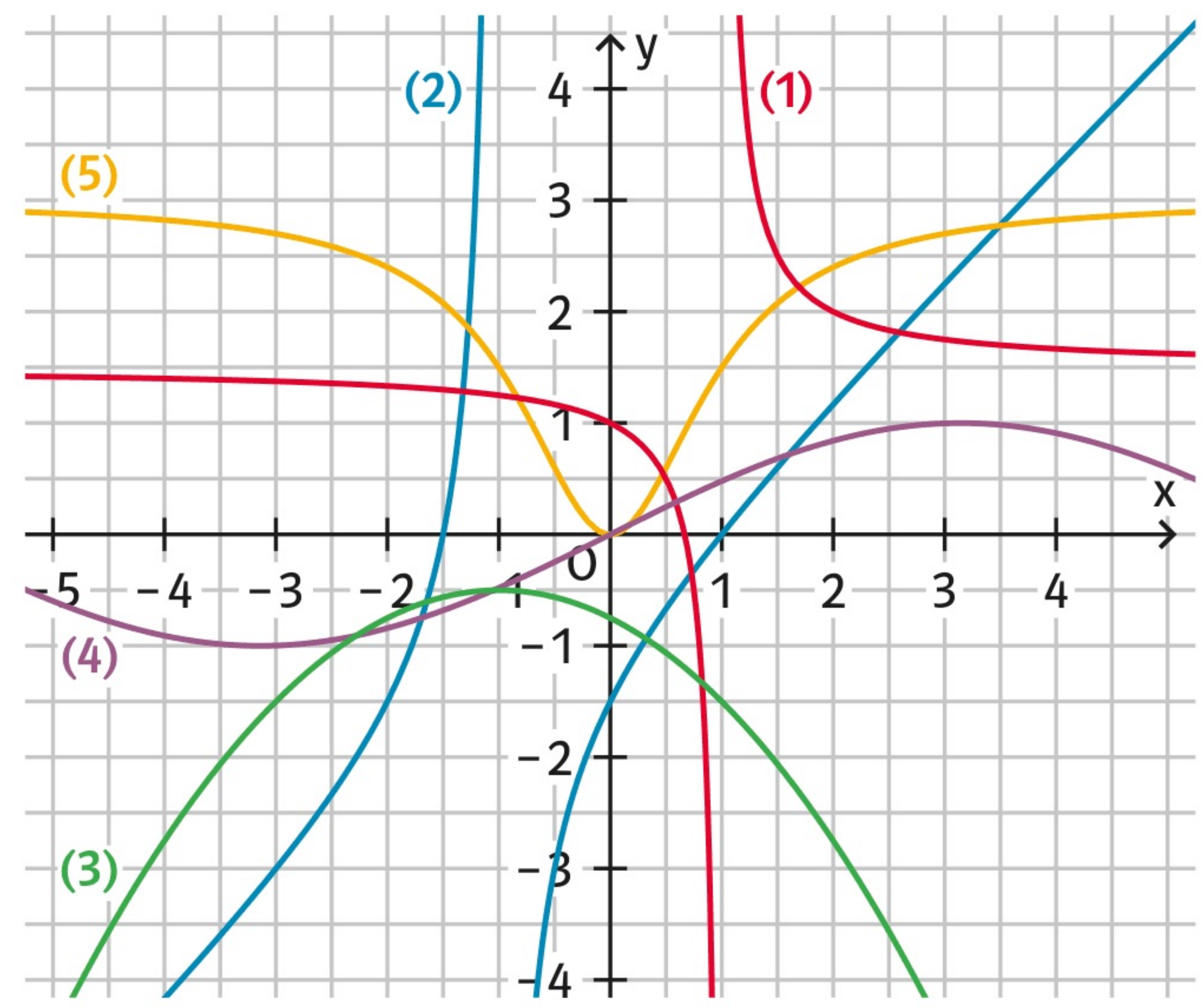
$r\colon x \mapsto \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{1}{2}$

$f\colon x \mapsto \frac{3x-2}{2x-2}$

$h\colon x \mapsto \frac{3}{1-x}$

$p\colon x \mapsto \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

$n\colon x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$



9 Untersuchen Sie rechnerisch das Symmetrieverhalten des Graphen G_g, erstellen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms oder eines Taschenrechners eine Wertetabelle zur Funktion g und zeichnen Sie anschließend G_g in ein Koordinatensystem. Ergänzen Sie dann die Asymptoten von G_g in der Zeichnung und geben Sie ihre Gleichungen an.

a) $g\colon x \mapsto \frac{2(x^2-2)}{0{,}5x^2}$ b) $g\colon x \mapsto \frac{x^2+1}{2x}$ c) $g\colon x \mapsto \frac{12x}{2x^2+2}$ d) $g\colon x \mapsto -\frac{x^2}{2x+4}$

10 Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen und die Gleichungen der Asymptoten von G_f. Skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Erkenntnisse G_f. Kontrollieren Sie dann Ihre Ergebnisse mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $f(x) = \frac{0{,}5x-1}{2x+1}$ b) $f(x) = \frac{2}{(x-2)^2} - 2$ c) $f(x) = \frac{4-8x}{4x+2}$ d) $f(x) = 3 - \frac{3}{(x+2)^2}$

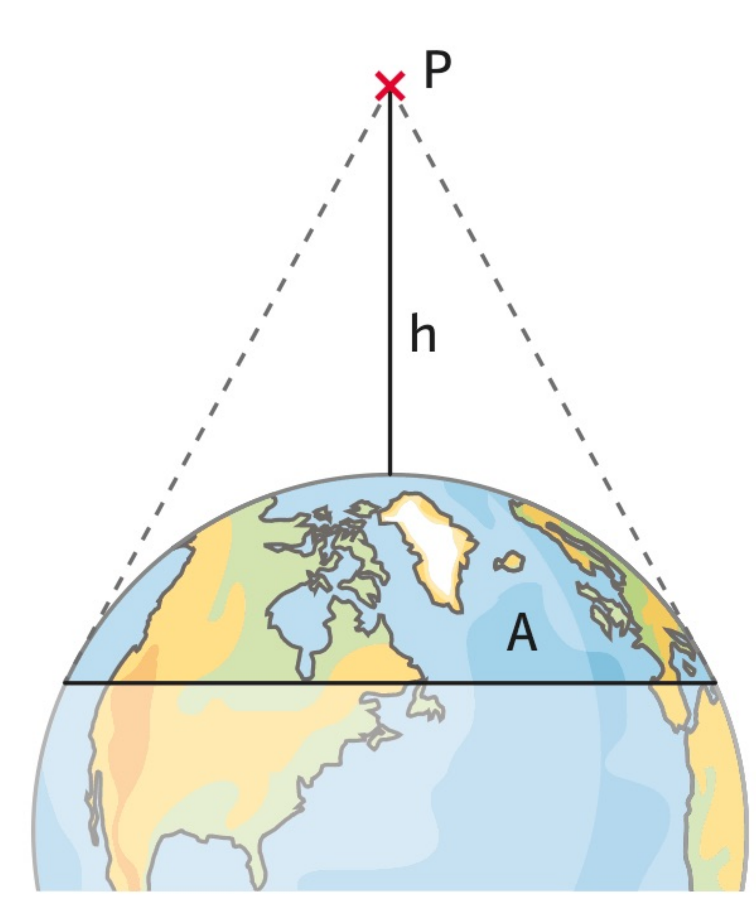
e) $f(x) = \frac{3x^2}{0{,}5x^2+2}$ f) $f(x) = \frac{-2x^2+8}{0{,}5x^2+2}$ g) $f(x) = -0{,}25x + \frac{1}{x}$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x - 0{,}5 - \frac{1}{x}$

11 Ermitteln Sie jeweils eine gebrochen-rationale Funktion der Form $f\colon x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, die bzw. deren Graph folgende Eigenschaften hat, und erläutern Sie sich gegenseitig Ihre Ergebnisse.

a) Die Funktion f divergiert für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ und der Funktionsgraph G_f hat die Asymptote mit der Gleichung $x = -3$.

b) Der Funktionsgraph G_f hat die Asymptote mit der Gleichung $x = 0{,}5$ und die Asymptote mit der Gleichung $y = 4 - 3x$.

12 Eine Astronautin, die in der Höhe h (in km) die Erde umkreist, kann zu jedem Zeitpunkt nur einen Teil der Erdoberfläche sehen. Für den Flächeninhalt (in km²) dieser sogenannten Kugelkappe gilt $A(h) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$ (Erdradius r: $r \approx 6371\,\text{km}$).



a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Kugelkappe, den die Besatzung der ISS-Weltraumstation sieht, wenn sie sich in einer Höhe von 400 km befindet. Ermitteln Sie, wie viel Prozent der Erdoberfläche sie aus dieser Position sehen kann.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{h \to +\infty} A(h)$ und erklären Sie Ihr Ergebnis anhand einer Skizze im Sachzusammenhang.

13 Im Folgenden wird das Verhalten der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{-4x^2 + 2{,}1x - 2}{x - 1}$ für $x \to -\infty$ ermittelt. Erläutern Sie das Vorgehen und beschreiben Sie den Fehler, der dabei unterlaufen ist.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^2 + 2{,}1x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-4x + 2{,}1 - \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x + 2{,}1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

14 Ermitteln Sie mithilfe geeigneter Termumformungen das Verhalten der Funktion g für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

a) $g\colon x \mapsto \frac{2x - 1}{3 - 4x}$ b) $g\colon x \mapsto \frac{12x - 6}{4x^2}$ c) $g\colon x \mapsto \frac{3x^2 + 5}{x + 2x^2}$ d) $g\colon x \mapsto \frac{-6x + 1}{0{,}5x^2 - 24x + 1}$

e) $g\colon x \mapsto \frac{0{,}5x^2}{10 + 10x}$ f) $g\colon x \mapsto \frac{1 - 0{,}25x^2}{4x - 1}$ g) $g\colon x \mapsto \frac{0{,}5x^2 + 2{,}4x - 6}{0{,}2x^2 - 1{,}2x + 3}$ h) $g\colon x \mapsto \frac{-2x^2 + 6x - 1}{1 - 2x}$

15 Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{6x^2 + 5}{2x}$ und $g\colon x \mapsto \frac{-2x^2 - 2x + 5}{x}$. Formen Sie die Funktionsterme $f(x)$ und $g(x)$ jeweils in eine Summe um und bestimmen Sie dann die Gleichungen der schrägen Asymptoten der Funktionsgraphen G_f und G_g.

16 Ein bekannter Smartphone-Hersteller bestimmt näherungsweise die Herstellungskosten $K(x)$ pro Gerät in \$ in Abhängigkeit von der Stückzahl x mithilfe der Funktion K mit $K(x) = 100 \cdot \frac{12x + 1400}{2x + 3}$ mit $x \in [50; \infty[$.

a) Vergleichen Sie die Herstellungskosten pro Gerät für eine Stückzahl von 100, 1000 und 10 000 produzierten Geräten miteinander.

b) Ermitteln Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms, ab welcher Stückzahl die Herstellungskosten pro Gerät unter 650 \$ liegen.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to +\infty} 100 \cdot \frac{12x + 1400}{2x + 3}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Test 2

Lösungen | Seite 200

17 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{5x^2 - 11{,}25}{2{,}25 + 2x^2}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Begründen Sie, dass G_f keine senkrechte Asymptote hat.

b) Zeigen Sie, dass G_f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

d) Ermitteln Sie mithilfe geeigneter Termumformungen das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

e) Skizzieren Sie G_f unter Beachtung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

18 Zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters den Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{0{,}9x^2 + 0{,}6x - 1{,}1}{x - 1}$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Funktionsgraphen G_g an und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 200

G 19 Aus einer Urne mit zehn grünen und sechs blauen Kugeln wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen.

a) Zeichnen Sie ein mit Wahrscheinlichkeiten beschriftetes Baumdiagramm, das den Sachverhalt darstellt.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass genau eine grüne Kugel gezogen wird bzw. dass mindestens eine blaue Kugel gezogen wird.

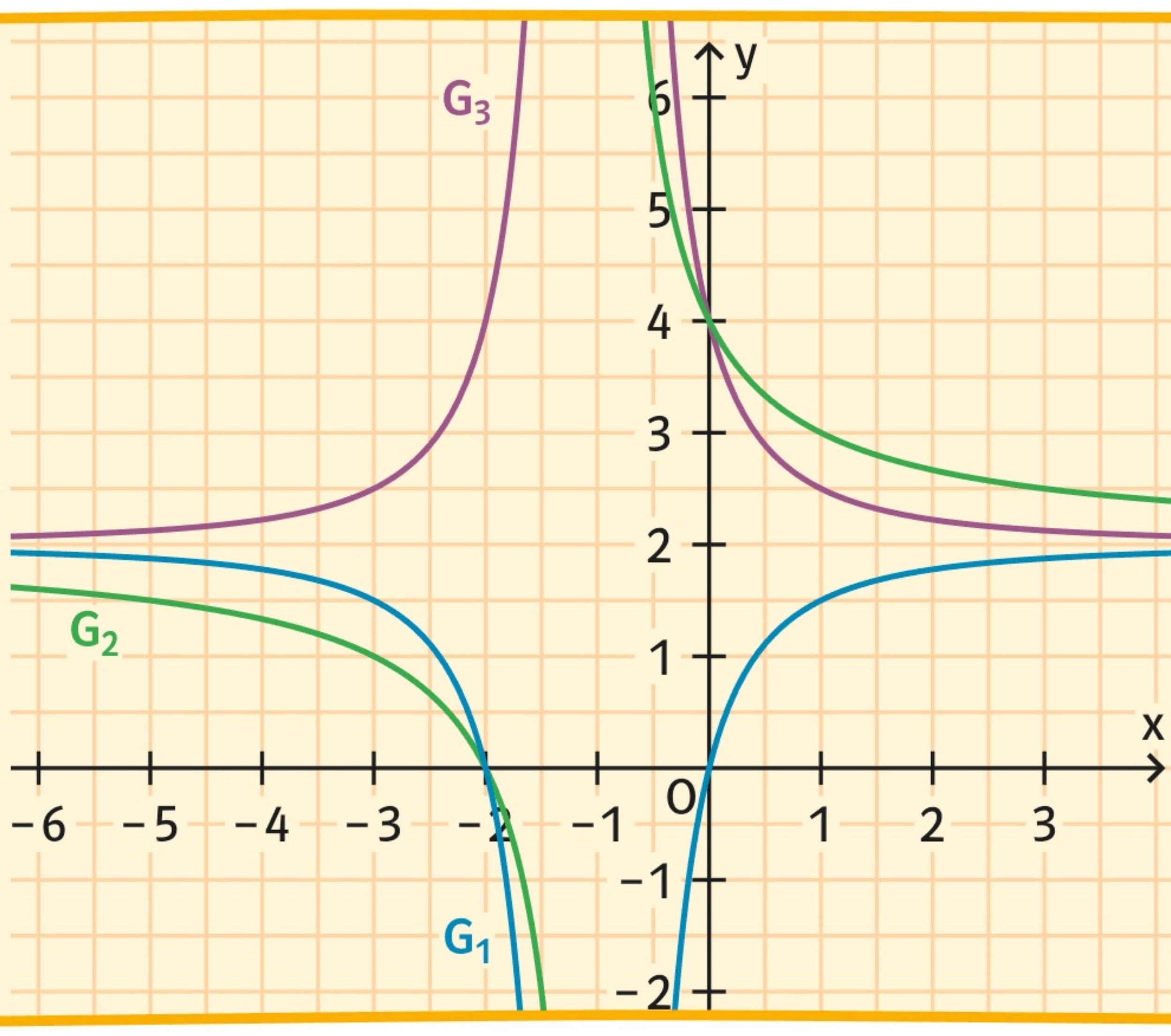
3 Verhalten in der Umgebung von Polstellen

Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu. Beschreiben Sie dann Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Funktionsgraphen.

$f: x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2} + 2$

$g: x \mapsto \frac{2}{x+1} + 2$

$h: x \mapsto \frac{2x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 1}$



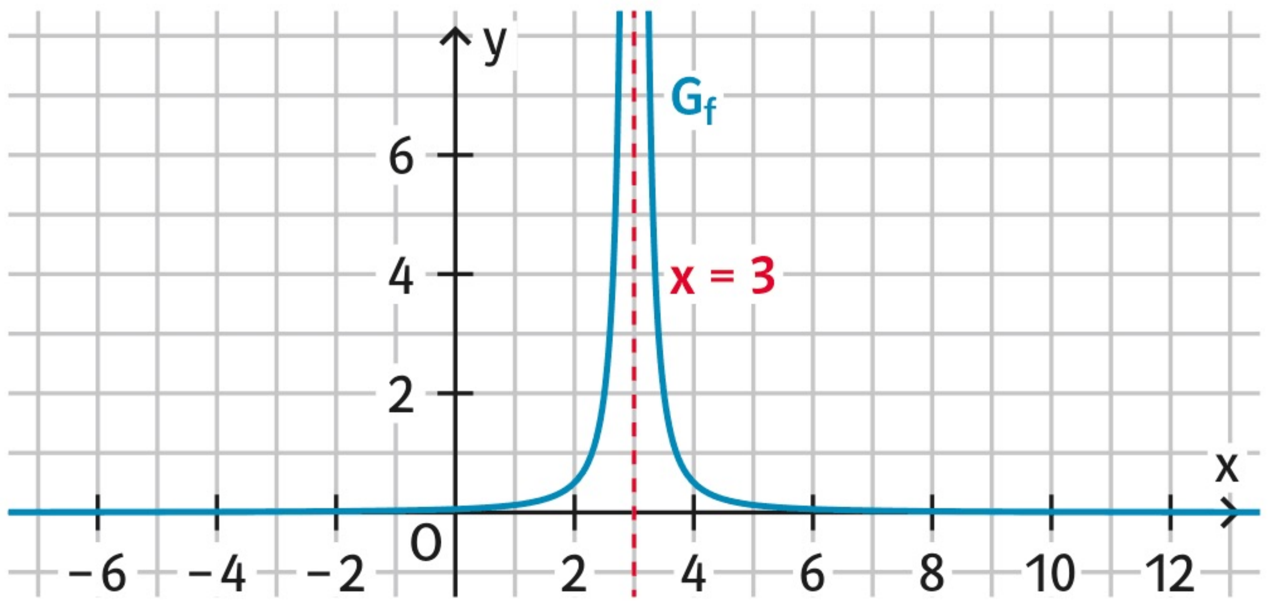
Untersucht man das Verhalten einer gebrochen-rationalen Funktion an den Rändern ihrer Definitionsmenge, bestimmt man das Verhalten der Funktion für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ und in der Umgebung ihrer Definitionslücken.

Für die Funktion $f: x \mapsto \frac{0{,}5}{(x-3)^2}$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ wird das Verhalten in der Umgebung ihrer Definitionslücke betrachtet.

Es zeigt sich:

– Nähert man sich von links an die Definitionslücke an, so gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{0{,}5}{(x-3)^2} = +\infty$.

– Nähert man sich von rechts an die Definitionslücke an, so gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{0{,}5}{(x-3)^2} = +\infty$.



Begründung mithilfe des Funktionsterms:

– $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{0{,}5}{(x-3)^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \left(0{,}5 \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty}\right) = +\infty$

– $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{0{,}5}{(x-3)^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \left(0{,}5 \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty}\right) = +\infty$

Sprechweise:

„Für x gegen 3 und $x < 3$ strebt $f(x)$ gegen $+\infty$."

„Für x gegen 3 und $x > 3$ strebt $f(x)$ gegen $+\infty$."

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ „0^+": Die Termwerte $g(x)$ streben für x gegen x_0 **gegen 0** und sind **positiv**.

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ „0^-": Die Termwerte $g(x)$ streben für x gegen x_0 **gegen 0** und sind **negativ**.

Definition: Wenn für eine Definitionslücke x_0 einer gebrochen-rationalen Funktion f $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$ gilt, dann nennt man x_0 eine **Polstelle von f** und die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ist senkrechte Asymptote des Graphen von f.

Die Funktionsterme einer einfachen gebrochen-rationalen Funktionen liegen in diesem Buch stets in gekürzter Form vor. Unter dieser Voraussetzung ist jede Definitionslücke auch eine Polstelle.

Bemerkung:
Man unterscheidet zwischen Polstellen mit und ohne Vorzeichenwechsel.

– Divergiert die Funktion links und rechts der Definitionslücke jeweils gegen $+\infty$ oder jeweils gegen $-\infty$, liegt eine **Polstelle ohne Vorzeichenwechsel** vor. Im Nenner des Funktionsterms liegt dann eine Nullstelle gerader Ordnung vor.

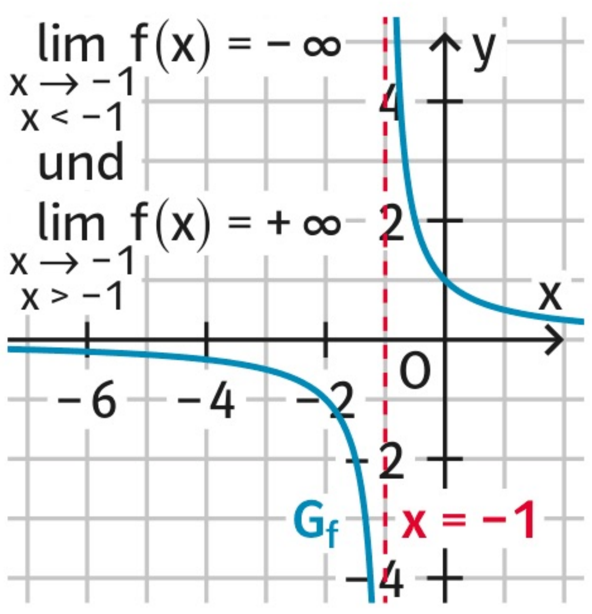
– Divergiert die Funktion links und rechts der Definitionslücke entgegengesetzt, liegt eine **Polstelle mit Vorzeichenwechsel** vor. Im Nenner des Funktionsterms liegt dann eine Nullstelle ungerader Ordnung vor.

Zu den beiden Arten von Polstellen gibt es jeweils zwei unterschiedliche Verläufe des Graphen.

(1) Polstelle mit Vorzeichenwechsel

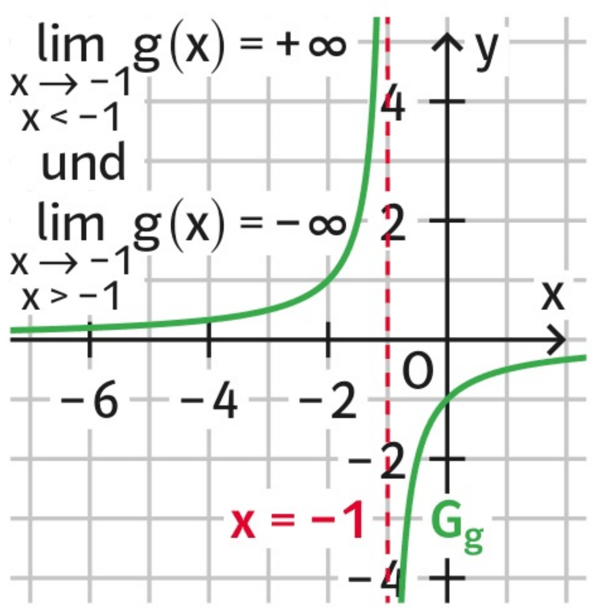
$f\colon x \mapsto \frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$



$g\colon x \mapsto -\frac{1}{x+1}$

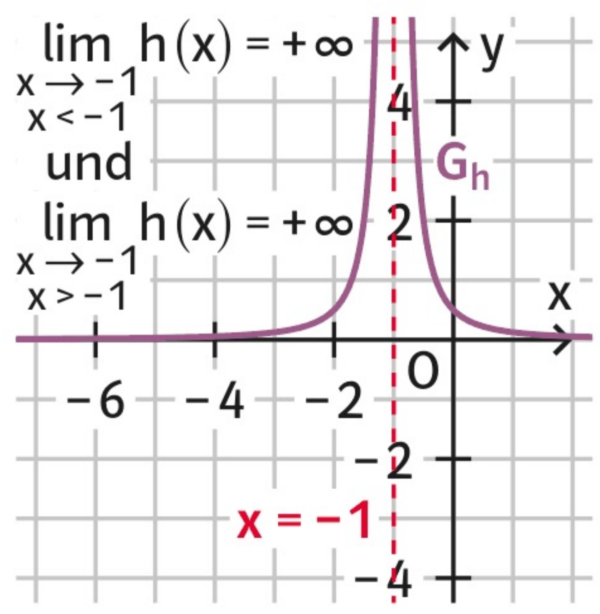
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = -\infty$



(2) Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

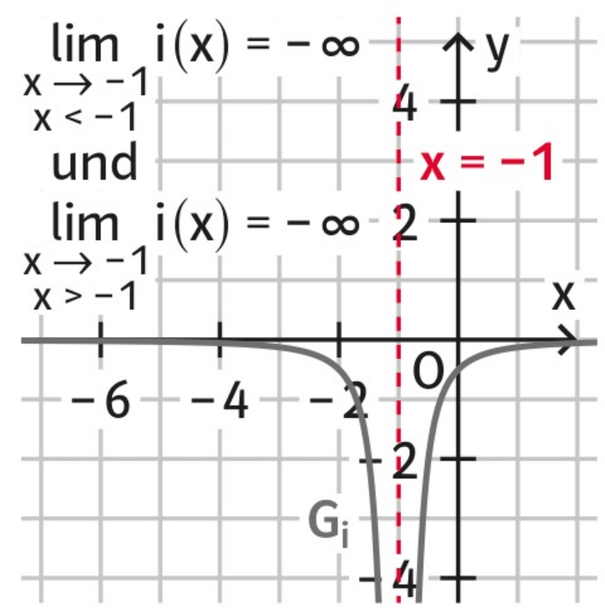
$h\colon x \mapsto \frac{0{,}5}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} h(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} h(x) = +\infty$



$i\colon x \mapsto -\frac{0{,}5}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} i(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} i(x) = -\infty$



Das Verhalten des Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion wird in der Umgebung einer Polstelle durch die Ordnung der zugehörigen Nullstelle des Nennerpolynoms bestimmt. In der Nähe einer Polstelle kommt es zu betragsmäßig sehr groß werdenden Funktionswerten und abhängig von der Ordnung der Nullstelle, also abhängig davon, ob das Nennerpolynom an der Nullstelle das Vorzeichen wechselt oder nicht, zu einer Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel.

Beispiel 1

Geben Sie alle Polstellen der Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{4}{(x-5)^2}$ und $g\colon x \mapsto \frac{4x-2}{(3-x)(x+1)}$ an und bestimmen Sie jeweils ihre Art. Prüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

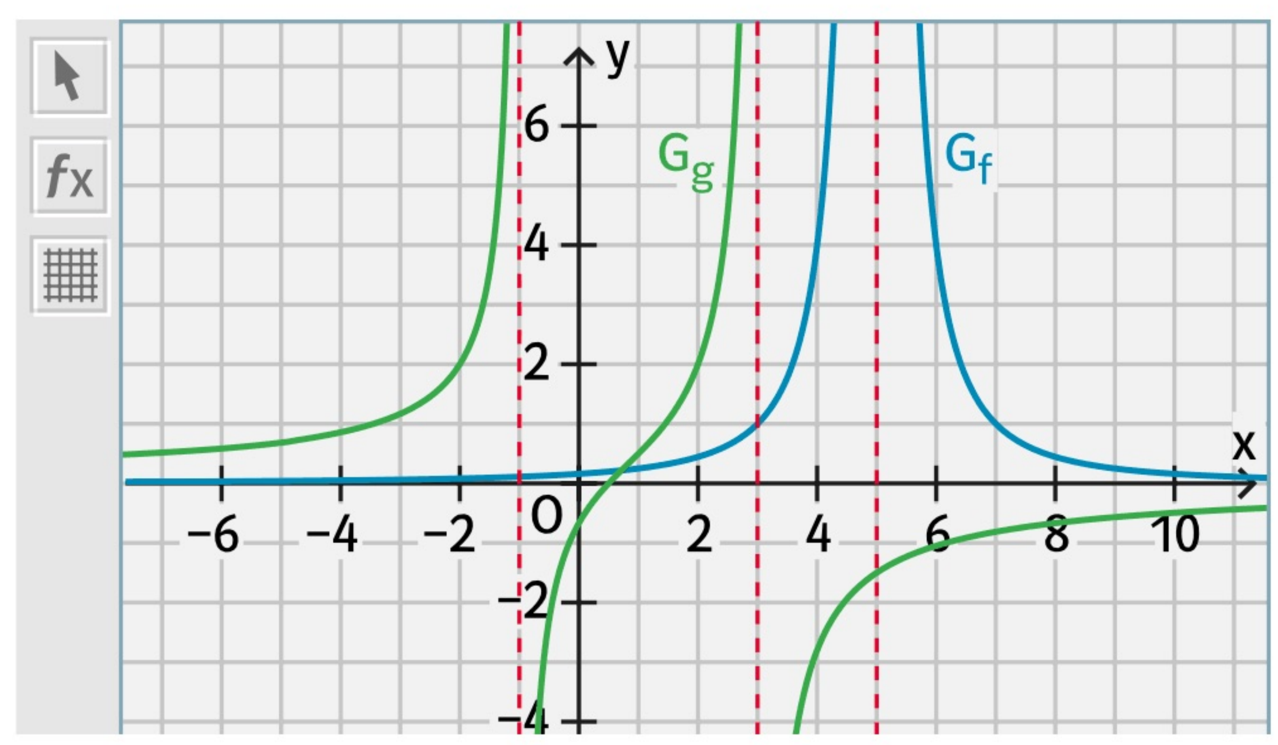
Lösung

Polstellen von f:

Da $x = 5$ eine doppelte Nullstelle des Nenners ist, ist $x = 5$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Polstellen von g:

Da $x = -1$ und $x = 3$ jeweils einfache Nullstellen des Nenners von $g(x)$ sind, sind $x = -1$ und $x = 3$ jeweils Polstellen mit Vorzeichenwechsel.



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2 - x - 2}$. Geben Sie D an, bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_f und bestimmen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücken. Skizzieren Sie dann G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

Lösung

Definitionsmenge:

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$ und $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$.

Lösung mit der pq-Formel:

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-1)}{2}\right)^2 - (-2)}$

$= \frac{1 \pm 3}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 2$

Gleichungen der Asymptoten:

Senkrechte Asymptoten: $x = -1$ und $x = 2$. Waagerechte Asymptote: $y = 0$ (da $z < n$).

Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücken:

$f(x) = \frac{2}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{(x+1)(x-2)} = 2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}$

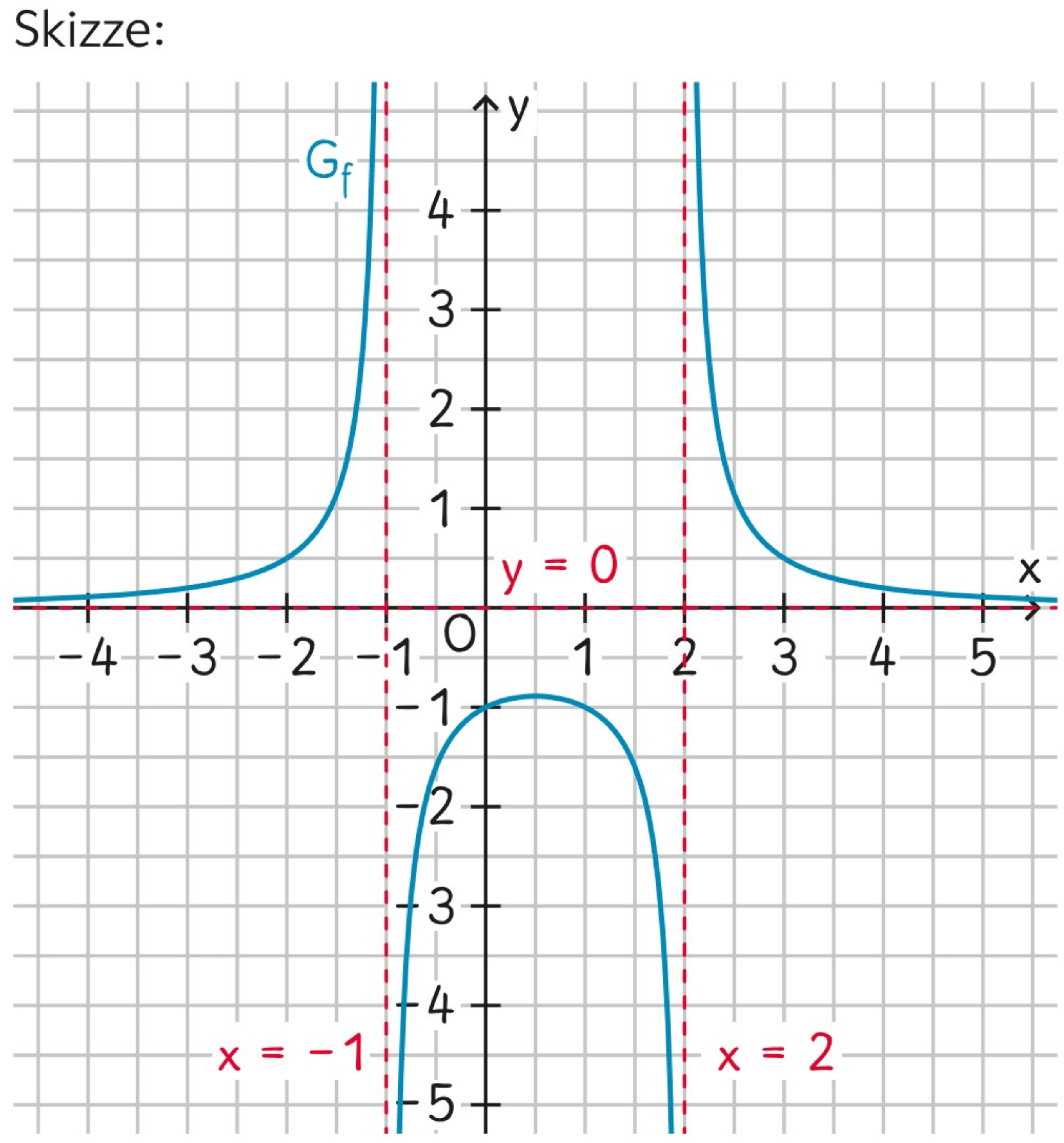
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = +\infty$ ($x+1 \to 0^-$, $\frac{1}{x+1} \to -\infty$; $\frac{1}{x-2} \to -\frac{1}{3}$)

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = -\infty$ ($x+1 \to 0^+$, $\frac{1}{x+1} \to +\infty$; $\frac{1}{x-2} \to -\frac{1}{3}$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \left(2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = -\infty$ ($\frac{1}{x+1} \to \frac{1}{3}$; $x-2 \to 0^-$, $\frac{1}{x-2} \to -\infty$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \left(2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = +\infty$ ($\frac{1}{x+1} \to \frac{1}{3}$; $x-2 \to 0^+$, $\frac{1}{x-2} \to +\infty$)

Skizze:



Tipp:
Untersucht man das Verhalten einer Funktion in der Umgebung ihrer Definitionslücken, ist eine faktorisierte Form des Funktionsterms hilfreich.

Aufgaben

1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit einem Funktionenplotter. Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten des Graphen G_f an und beschreiben Sie, wie G_f in der Umgebung der Polstellen verläuft.

a) $f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \frac{-15}{x^2 - 6x}$ c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5{,}5x - 10{,}5}$ d) $f(x) = \frac{-(x^2 + 3)}{2x^2 - 12x + 18}$

2 Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion mit der folgenden Eigenschaft an. Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen.

a) Die Funktion hat die Polstelle $x = -2$ mit Vorzeichenwechsel.

b) Die Funktion hat die Polstelle $x = -2$ ohne Vorzeichenwechsel.

3 Geben Sie alle Polstellen der Funktion f an und bestimmen Sie ihre Art.

a) $f: x \mapsto \frac{4x}{(x-5)^2}$ b) $f: x \mapsto \frac{2 + x}{3x - 6}$ c) $f: x \mapsto \frac{3}{x(x-8)}$ d) $f: x \mapsto \frac{x^2 - 3}{(x-2)(x+7)}$

e) $f: x \mapsto \frac{2}{x^2 - 2{,}25}$ f) $f: x \mapsto \frac{2x^2 - 9x}{x^2 + 1}$ g) $f: x \mapsto \frac{3x}{2(x - 0{,}25)^2}$ h) $f: x \mapsto \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 4}$

4 Sebastian untersucht die Funktion $h: x \mapsto \frac{-4x}{x^2 - 6x + 9}$ bezüglich Polstellen: „Da $3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 0$ gilt, ist $x = 3$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel." Beurteilen Sie seine Behauptung.

Test 1

Lösungen | Seite 200

5 Geben Sie alle Polstellen der Funktion f an und bestimmen Sie ihre Art.

a) $f: x \mapsto \frac{4x}{(x-5)^2}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{3}{x(x-8)}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{2 + x}{(3x-6)^2}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x^2 + 5x - 14}$

6 Sally stellt zur Funktion f mit $f(x) = \frac{2x}{(x-3)(x+1)}$ folgende Untersuchungen an. Beschreiben und korrigieren Sie gegebenenfalls ihre Ausführungen.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2x}{(x-3)(x+1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \underbrace{\frac{2x}{x-3}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0^+ \;\to +\infty} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{2x}{(x-3)(x+1)} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\to 0^+ \;\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{2x}{x+1}}_{\to \frac{3}{2}} = +\infty$$

7 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion g und die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten des Graphen G_g an. Bestimmen Sie mithilfe des Funktionsterms das Verhalten der Funktion g in den Umgebungen aller Definitionslücken.

a) $g(x) = \frac{4}{x-3}$ b) $g(x) = \frac{7x}{2x - 8}$ c) $g(x) = \frac{2x^2 - 3}{-(x-4)^2}$ d) $g(x) = \frac{7}{x(x+1)}$

e) $g(x) = \frac{5x^2 - 3x}{(x + 0{,}5)^2}$ f) $g(x) = \frac{2}{(x-4)(x-5)}$ g) $g(x) = -\frac{5x}{x^2 - 5x + 6}$ h) $g(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + 6x + 4}$

8 Arbeiten Sie im Folgenden arbeitsteilig. Geben Sie die Definitionsbereiche sowie die Nullstellen der Funktionen f, g, h und i an. Ermitteln Sie das Verhalten von f, g, h und i an den Rändern ihres jeweiligen Definitionsbereichs. Tragen Sie Ihre Ergebnisse zusammen und kontrollieren Sie diese mithilfe eines Funktionenplotters.

$f: x \mapsto \frac{2x}{x-3}$ $g: x \mapsto -\frac{2x}{x-3}$ $h: x \mapsto \frac{2x}{(x-3)^2}$ $i: x \mapsto -\frac{2x}{(x-3)^2}$

Zur Erinnerung:
Zu den Rändern des Definitionsbereichs zählen auch die Definitionslücken.

9 Skizzieren Sie den Funktionsgraphen der Funktion g und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $g: x \mapsto \frac{1}{x-4}$ b) $g: x \mapsto \frac{1}{(x-4)^2}$ c) $g: x \mapsto \frac{1}{4-x}$ d) $g: x \mapsto -\frac{1}{(4-x)^2}$

10 Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion f mit den gegebenen Eigenschaften an und erklären Sie sich gegenseitig Ihre Ergebnisse.

a) Die Funktion f hat die Nullstelle $x = 2$ und es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = +\infty$ sowie $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty$.

b) Die Funktion f hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = 1$, die Polstelle $x = 3$ mit Vorzeichenwechsel und es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

11 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \mapsto -\frac{0{,}5x^2 + 8}{x^2 - 4}$, ihr Funktionsgraph wird mit G_g bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von g an.

b) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_g.

c) Zeigen Sie, dass g keine Nullstellen hat, und berechnen Sie $g(-3)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$ und $g(3)$.

d) Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion g an den Rändern ihrer Definitionsmenge.

e) Zeichnen Sie G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

12 Der fränkische Streuobstverband verkauft naturtrüben Apfel- und Birnensaft an Großkunden. Er verlangt von jedem Kunden einen Festbetrag von 10,– € und zudem 0,60 € pro Liter Saft.

a) Geben Sie eine Funktion g an, mit der sich der durchschnittliche Preis pro Liter in Abhängigkeit von der Saftmenge x (in Litern) beschreiben lässt, und geben Sie eine zum Sachzusammenhang passende Definitionsmenge an.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Test 2

Lösungen | Seite 200

13 **Abiturprüfung 2011 (Bayern), Analysis, Teil 1, Aufgabengruppe II, Aufgabe 4**

Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ an, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote besitzt und in $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

14 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{4x^2 + 9}{2x^2 - 12x + 18}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und f(0). Zeigen Sie zudem, dass f keine Nullstellen besitzt.

b) Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion f an den Rändern ihrer Definitionsmenge und skizzieren Sie G_f.

15 Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{x^2 + t}$.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f_t in Abhängigkeit von t. Führen Sie hierzu eine Fallunterscheidung bezüglich t durch.

b) Beurteilen Sie folgende Aussage:
„Jede Funktion f_t hat mindestens eine Polstelle."

c) Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Graphen der Funktionen f_{-1}, f_0 und f_1 und skizzieren Sie die Funktionsgraphen dieser drei Funktionen.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 201

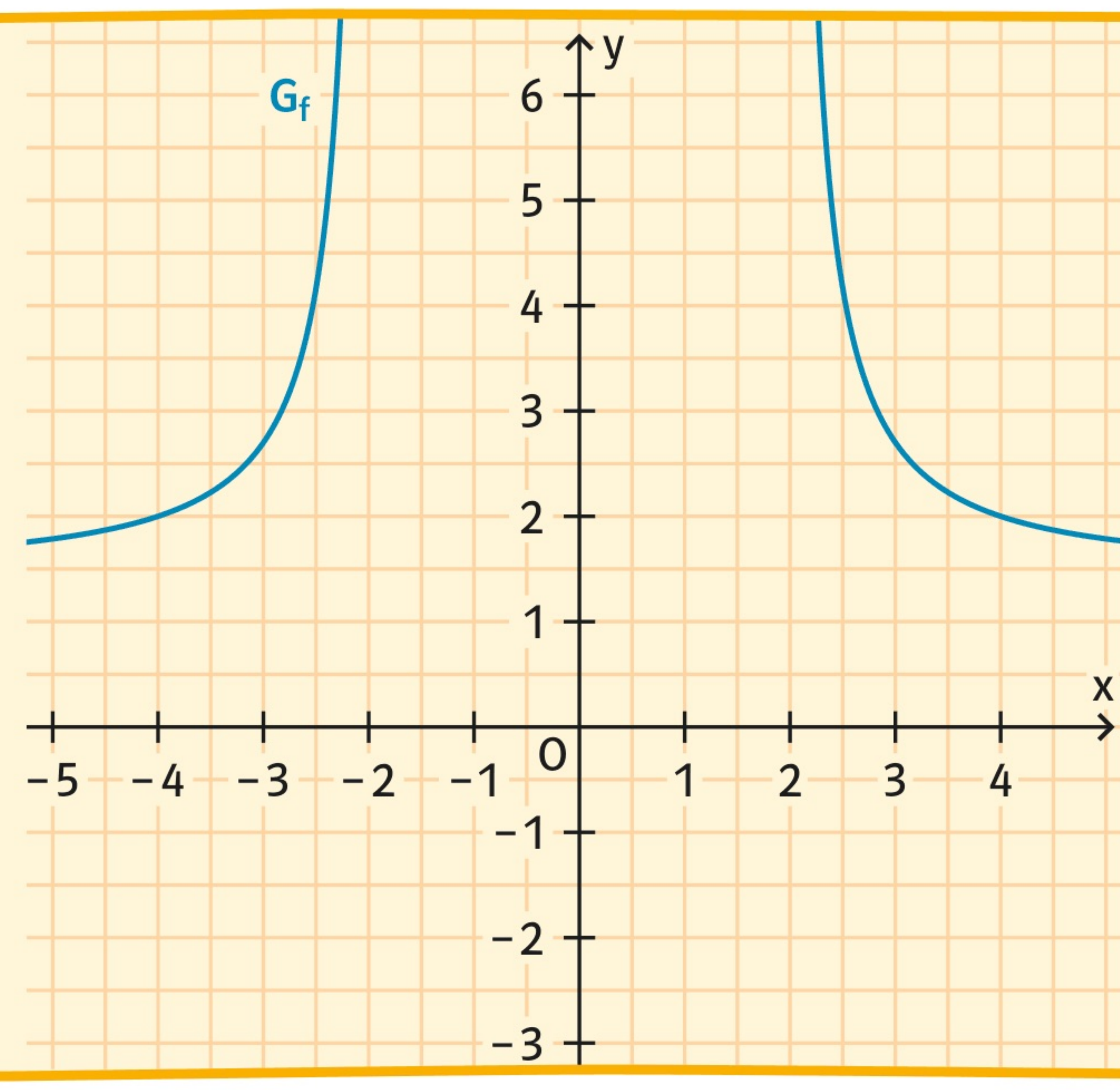
G 16 Lösen Sie die Bruchgleichung rechnerisch.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware die Graphen der Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen darstellen und die Schnittpunkte dieser beiden Graphen anzeigen lassen.

a) $\frac{4}{2x + 1} = \frac{2}{0{,}5x - 2}$ b) $\frac{2x}{5 - x} = \frac{4x + 9}{3x - 2}$ c) $\frac{1}{4t} + 1 = \frac{2t}{5t - 1}$ d) $\frac{-3x + 1}{2x^2} = \frac{2x}{x + 1} - 2$

4 Zusammenhang von Funktionsterm und Graph

Mia kennt folgende Eigenschaften der Funktion f bzw. ihres Graphen G_f:
- $D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$,
- f hat keine Nullstellen,
- $f(-1) = -0{,}5$,
- G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse,
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1{,}5$.

Einen Teil des Graphen hat Mia bereits skizziert. Erklären Sie, wie sie den Rest des Graphen skizzieren könnte.



Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion kann gezeichnet werden, wenn die wesentlichen Eigenschaften der Funktion bekannt sind.

Funktionsterm f(x) ⇄ Eigenschaften von f und G_f ⇄ Funktionsgraph G_f

Umgekehrt kann man aus einem Funktionsgraphen auf Eigenschaften der Funktion schließen und mithilfe dieser Eigenschaften einen passenden Funktionsterm aufstellen.

Folgende **Eigenschaften** einer **gebrochen-rationalen Funktion f** bzw. ihres **Funktionsgraphen G_f** können mithilfe des Funktionsterms ermittelt werden:
- Definitionsmenge von f
- Symmetrieeigenschaften von G_f
- Nullstellen von f mit ihrer Vielfachheit
- Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge
- Gleichungen der Asymptoten von G_f

Zum Zeichnen eines Funktionsgraphen kann das Bestimmen der Koordinaten sinnvoll gewählter Punkte hilfreich sein.

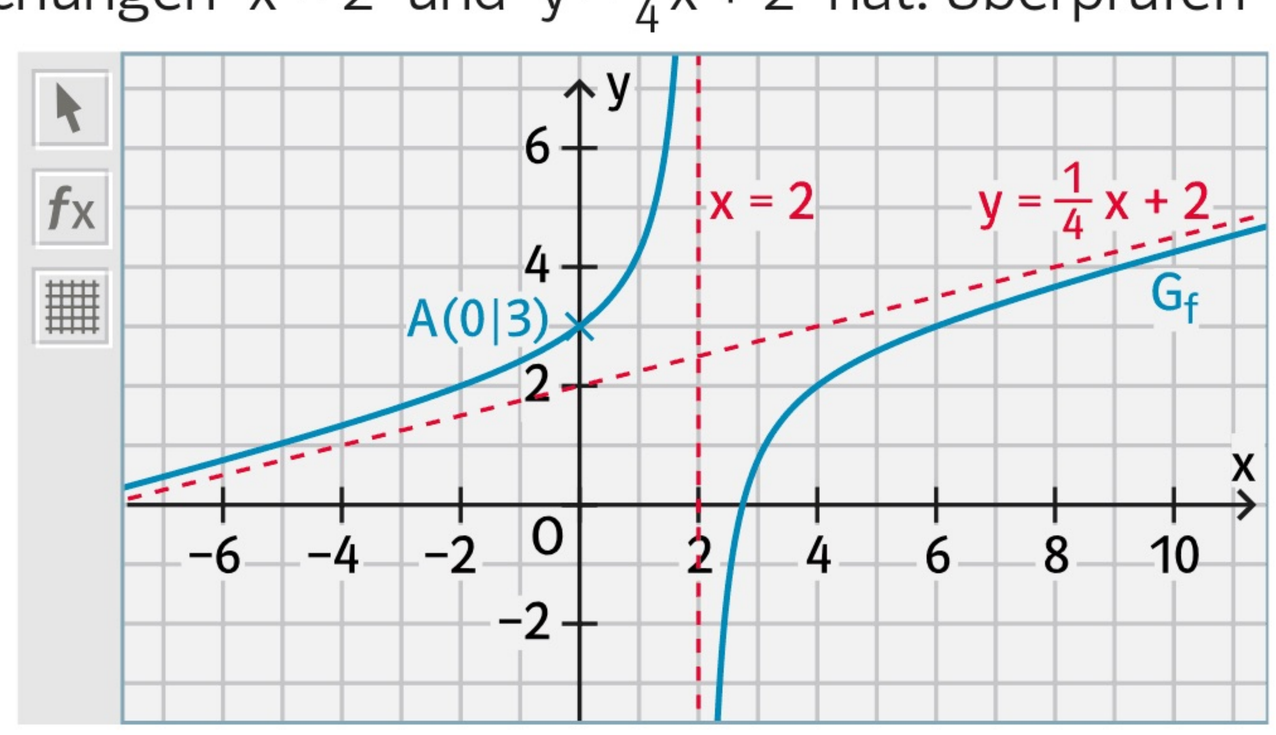
Beispiel 1

Bestimmen Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f, deren Graph durch den Punkt $A(0|3)$ verläuft und die Asymptoten mit den Gleichungen $x = 2$ und $y = \frac{1}{4}x + 2$ hat. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

Lösung

Aufgrund der Asymptoten kann f(x) folgende Gestalt haben: $f(x) = \frac{1}{4}x + 2 + \frac{a}{x-2}$.

Aus $f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0 + 2 + \frac{a}{0-2} = 2 + \frac{a}{-2} = 3$ folgt $a = -2$ und damit $f(x) = \frac{1}{4}x + 2 - \frac{2}{x-2}$.



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{-2x^2 - x + 8}{x^2 - x - 6}$. Ermitteln Sie die wesentlichen Eigenschaften von f und des Graphen G_f. Zeichnen Sie G_f unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse.

Lösung

– Definitionsmenge von f:

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 3$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$.

– Symmetrieeigenschaften von G_f:

$f(-x) = \frac{-2(-x)^2 - (-x) + 8}{(-x)^2 - (-x) - 6} = \frac{-2x^2 + x + 8}{x^2 + x - 6} \neq f(x)$

$f(-x) = \frac{-2x^2 + x + 8}{x^2 + x - 6} \neq -f(x)$

G_f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

– Nullstellen von f:

$-2x^2 - x + 8 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1 \pm \sqrt{65}}{4} \Rightarrow x_3 = -\frac{1 + \sqrt{65}}{4} \approx -2{,}3$ und

$x_4 = -\frac{1 - \sqrt{65}}{4} \approx 1{,}8.$

– Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse:

$f(0) = \frac{-2 \cdot 0^2 - 0 + 8}{0^2 - 0 - 6} = -\frac{4}{3} = -1{,}\overline{3} \Rightarrow S_y(0 \mid -1{,}\overline{3}).$

– Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge:

$f(x) = \frac{-2x^2 - x + 8}{x^2 - x - 6} = \frac{-2x^2 - x + 8}{(x-3)(x+2)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 - x + 8}{x^2 - x - 6} = -2$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 - x + 8}{x^2 - x - 6} = -2 \Rightarrow$ f konvergiert für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen -2 und G_f hat die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = -2$.

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{-2x^2 - x + 8}{(x-3)(x+2)} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x+2}_{\to 0^-}}}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\frac{-2x^2 - x + 8}{x - 3}}_{\to -0{,}4} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{-2x^2 - x + 8}{(x-3)(x+2)} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x+2}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{-2x^2 - x + 8}{x - 3}}_{\to -0{,}4} = -\infty$$

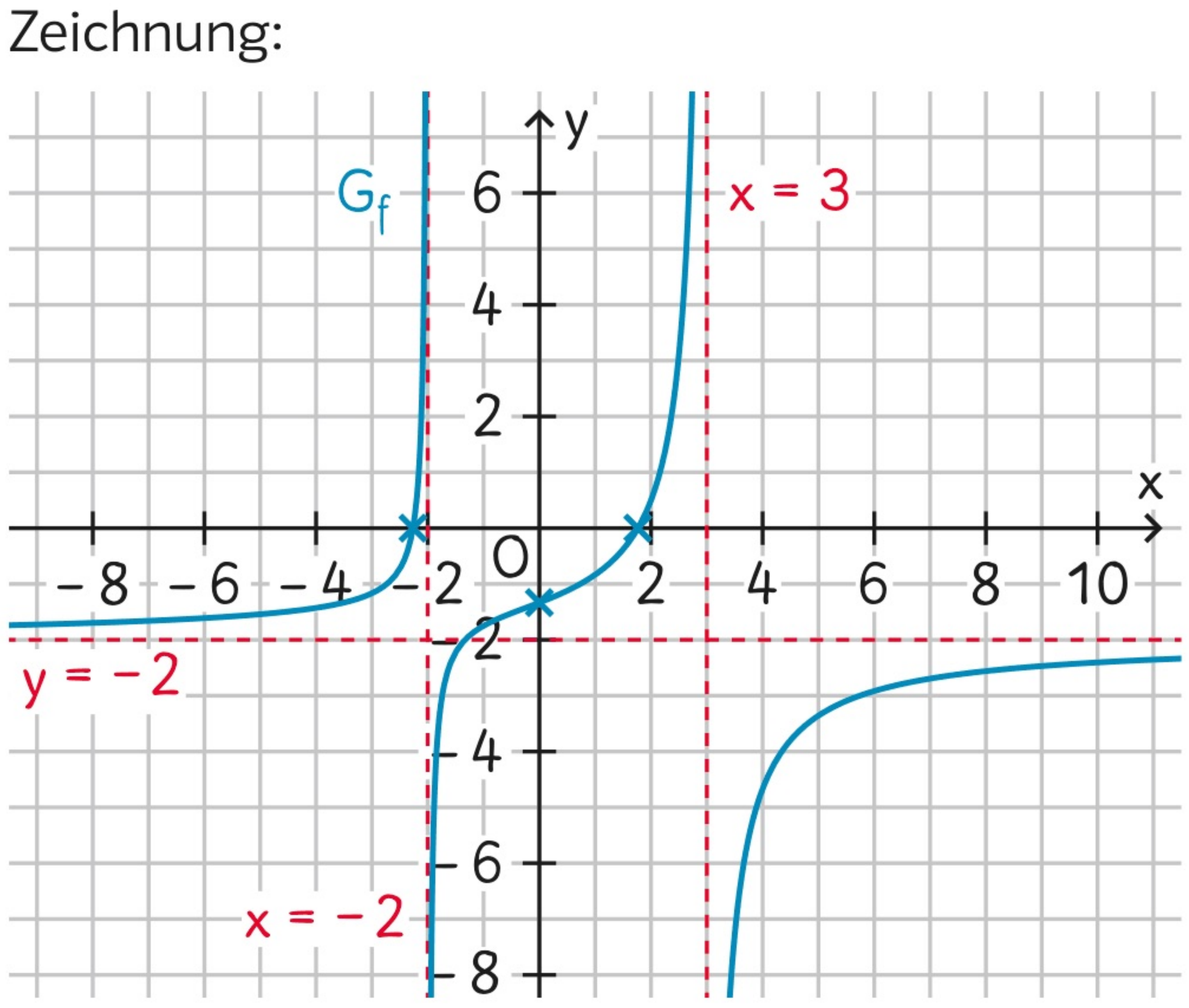
$\Rightarrow x = -2$ ist eine Polstelle mit VZW und G_f hat eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = -2$.

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{-2x^2 - x + 8}{(x-3)(x+2)} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x-3}_{\to 0^-}}}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\frac{-2x^2 - x + 8}{x + 2}}_{\to -2{,}6} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{-2x^2 - x + 8}{(x-3)(x+2)} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x-3}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{-2x^2 - x + 8}{x + 2}}_{\to -2{,}6} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 3$ ist eine Polstelle mit VZW und G_f hat eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.

Zeichnung:



Lösung mit der pq-Formel:
$x^2 - x - 6 = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)}$
$= 0{,}5 \pm 2{,}5$
$\Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

Da $z = n$ gilt, konvergiert f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gegen $\frac{-2}{1} = -2$.

Hinweis:
VZW bedeutet Vorzeichenwechsel.

Aufgaben

1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_f der Funktion f und berechnen Sie die Funktionswerte $f(-1)$, $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$ und $f(1)$. Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen und G_f die Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ hat. Zeichnen Sie G_f unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $f(x) = \frac{6}{2x^2 + 1}$ b) $f(x) = \frac{10}{-5 - 2x^2}$

2 Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 4}$ und $g\colon x \mapsto -\frac{4x}{(x - 1{,}5)(x + 1{,}5)}$.

a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Graphen G_f bzw. G_g und berechnen Sie die Funktionswerte $f(-1)$, $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$ und $f(1)$ bzw. $g(-1)$, $g(-0{,}5)$, $g(0)$, $g(0{,}5)$ und $g(1)$.

b) Geben Sie die Definitionsmenge von f bzw. g an. Geben Sie zudem alle Polstellen von f bzw. g an und bestimmen Sie jeweils ihre Art.

c) Zeigen Sie, dass f und g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ jeweils gegen 0 konvergieren.

d) Zeichnen Sie G_f und G_g unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse in ein gemeinsames Koordinatensystem und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Funktionenplotters.

3 Gegeben sind die Funktionen f, g, h und i. Gehen Sie arbeitsteilig vor und erläutern Sie sich Ihre Ergebnisse.

$f\colon x \mapsto \frac{-x}{(x-3)(x+3)}$ $g\colon x \mapsto \frac{-5x}{(x-3)(x+3)}$ $h\colon x \mapsto \frac{-x^2}{(x-3)(x+3)}$ $i\colon x \mapsto \frac{x^2 + 25}{(x-3)(x+3)}$

a) Ermitteln Sie gemeinsame Eigenschaften der Funktionen f, g, h und i.

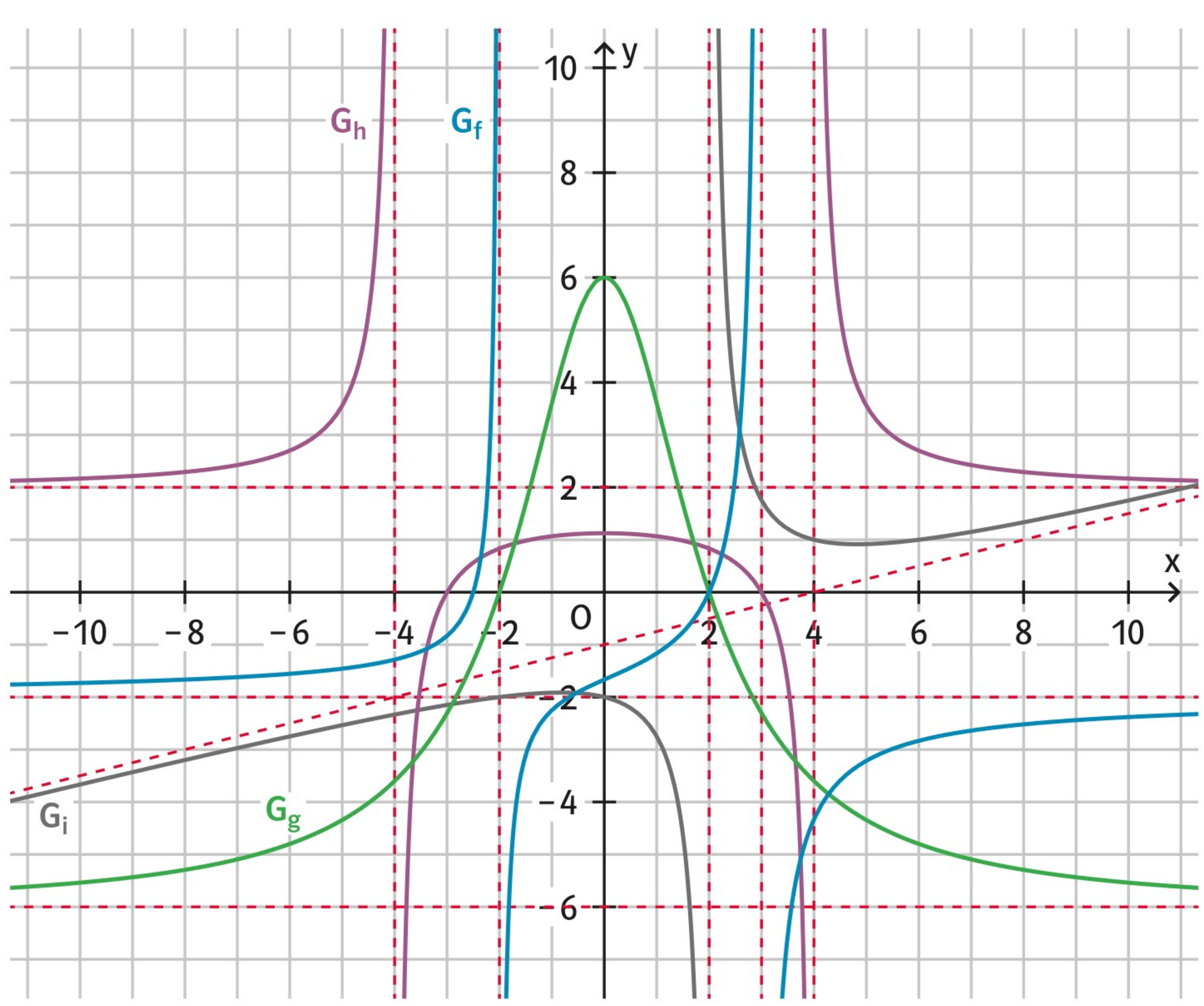
b) Berechnen Sie $f(-6)$, $g(-6)$, $h(-6)$ und $i(-6)$ sowie $f(2)$, $g(2)$, $h(2)$ und $i(2)$.

c) Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.

d) Skizzieren Sie unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse die Graphen von f, g, h und i in ein gemeinsames Koordinatensystem.

4 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion f, deren Funktionsgraph sich der Geraden mit der Gleichung $y = 1 + 0{,}25x$ annähert, die Asymptote mit der Gleichung $x = 0$ hat und durch den Punkt $P(1\,|\,3{,}25)$ verläuft.

Strategie | Seite 186
Aufstellen und Lösen einer Gleichung



5 Geben Sie jeweils die Gleichungen aller Asymptoten der Graphen G_f, G_g, G_h und G_i an. Bestimmen Sie zu den gebrochen-rationalen Funktionen f, g, h und i jeweils einen möglichen Funktionsterm und erläutern Sie Ihr Vorgehen. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware.

6 Der Graph einer Funktion f hat die Asymptoten mit den angegebenen Gleichungen. Zeichnen Sie zunächst die Asymptoten und skizzieren Sie dann einen möglichen Funktionsgraphen G_f.

a) $x = -2,\ x = 2,\ y = -3$ b) $x = -1,\ x = 5,\ y = 2$ c) $x = 2{,}5,\ y = -\frac{1}{3}x$ d) $x = -1,\ y = \frac{1}{2}x + 1$

7 Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, deren Graph G_h die angegebenen Eigenschaften hat. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

a) G_h ist achsensymmetrisch zur y-Achse und hat die Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.
b) G_h ist punktsymmetrisch zum Ursprung und verläuft durch den Ursprung.
c) G_h hat die Asymptoten mit den Gleichungen $x = -2$ und $y = 3$.
d) G_h hat eine senkrechte und eine schräge Asymptote.
e) G_h hat die Asymptoten mit den Gleichungen $x = 4$ und $y = -3$ und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -1$.

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - 0{,}4x + \frac{2}{x-1}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f und die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.
b) Geben Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.
c) Berechnen Sie die Nullstellen von f und die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse.
d) Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung der Ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben.

Test 1

Lösungen | Seite 202

9 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{4x^2 + 4}{(2x-5)(2x+5)}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

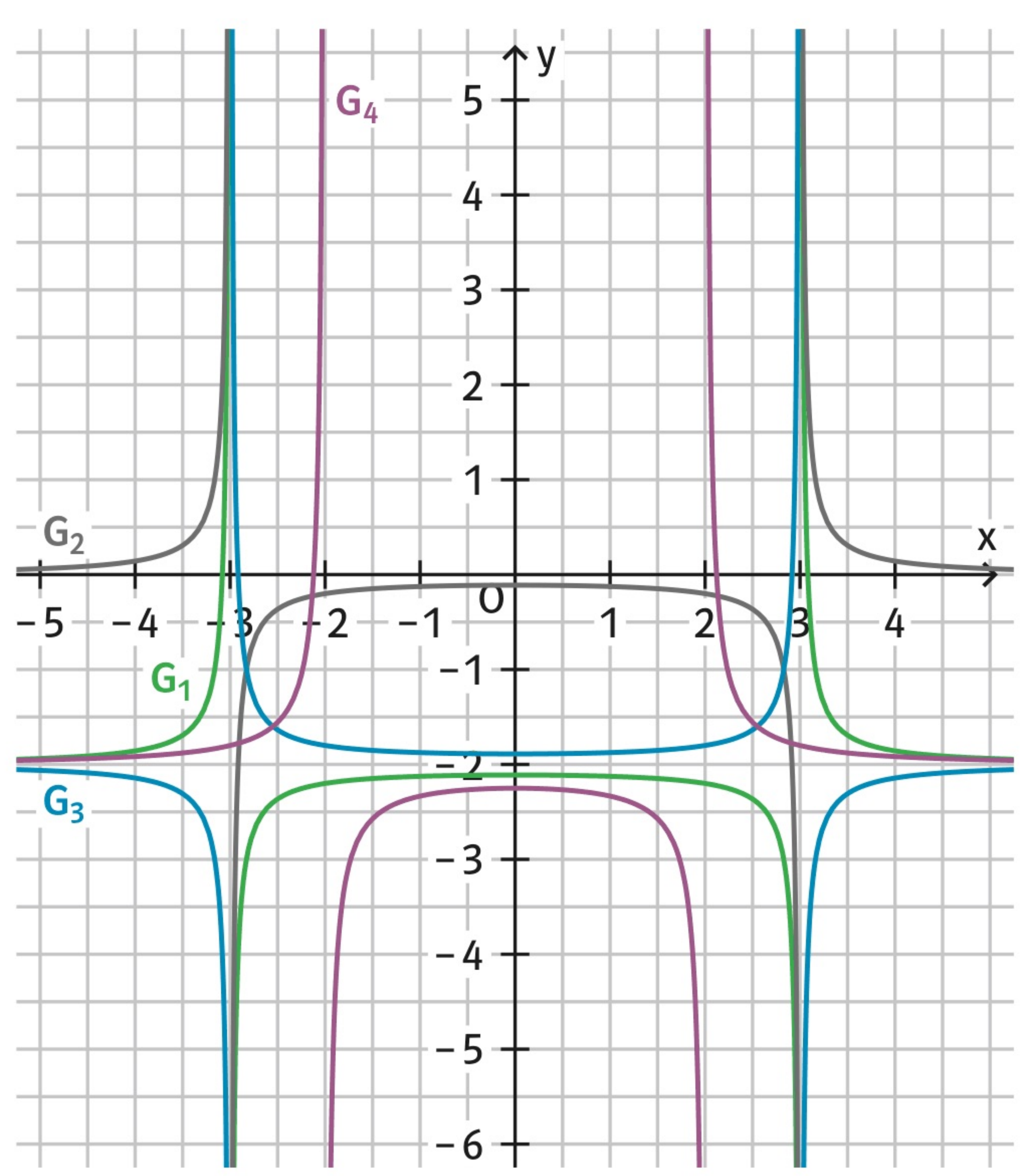
a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f und die Gleichungen aller Asymptoten von G_f.
b) Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen hat.
c) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f.
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse.
e) Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) bis d).

10 Der Graph G_h der gebrochen-rationalen Funktion h weist die angegebenen Eigenschaften auf. Geben Sie einen möglichen Term h(x) an.

a) G_h hat die senkrechten Asymptoten mit den Gleichungen $x = -6$ und $x = 1$ und schneidet die x-Achse an den Stellen $x = -3$ und $x = 0$.
b) G_h ist achsensymmetrisch zur y-Achse und hat die Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.

11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} - 2$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $f(-x) = f(x)$ gilt, und interpretieren sie dies.
b) Zeigen Sie, dass f nur die Nullstellen $x_1 = -\sqrt{9{,}5}$ und $x_2 = \sqrt{9{,}5}$ hat und der Punkt $P\left(0 \middle| -2\frac{1}{9}\right)$ auf G_f liegt.
c) Geben Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.
d) Bestimmen Sie $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x)$.
e) Geben Sie an, welcher der abgebildeten Funktionsgraphen zur Funktion f gehört.



Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip

12 Der Graph der gebrochen-rationalen Funktion g, welche genau zwei Nullstellen hat, hat die Asymptoten mit den Gleichungen $x = -3$, $x = 3$ und $y = -2$.

a) Skizzieren Sie zwei mögliche Funktionsgraphen G_g, deren Verläufe sich jedoch deutlich unterscheiden.

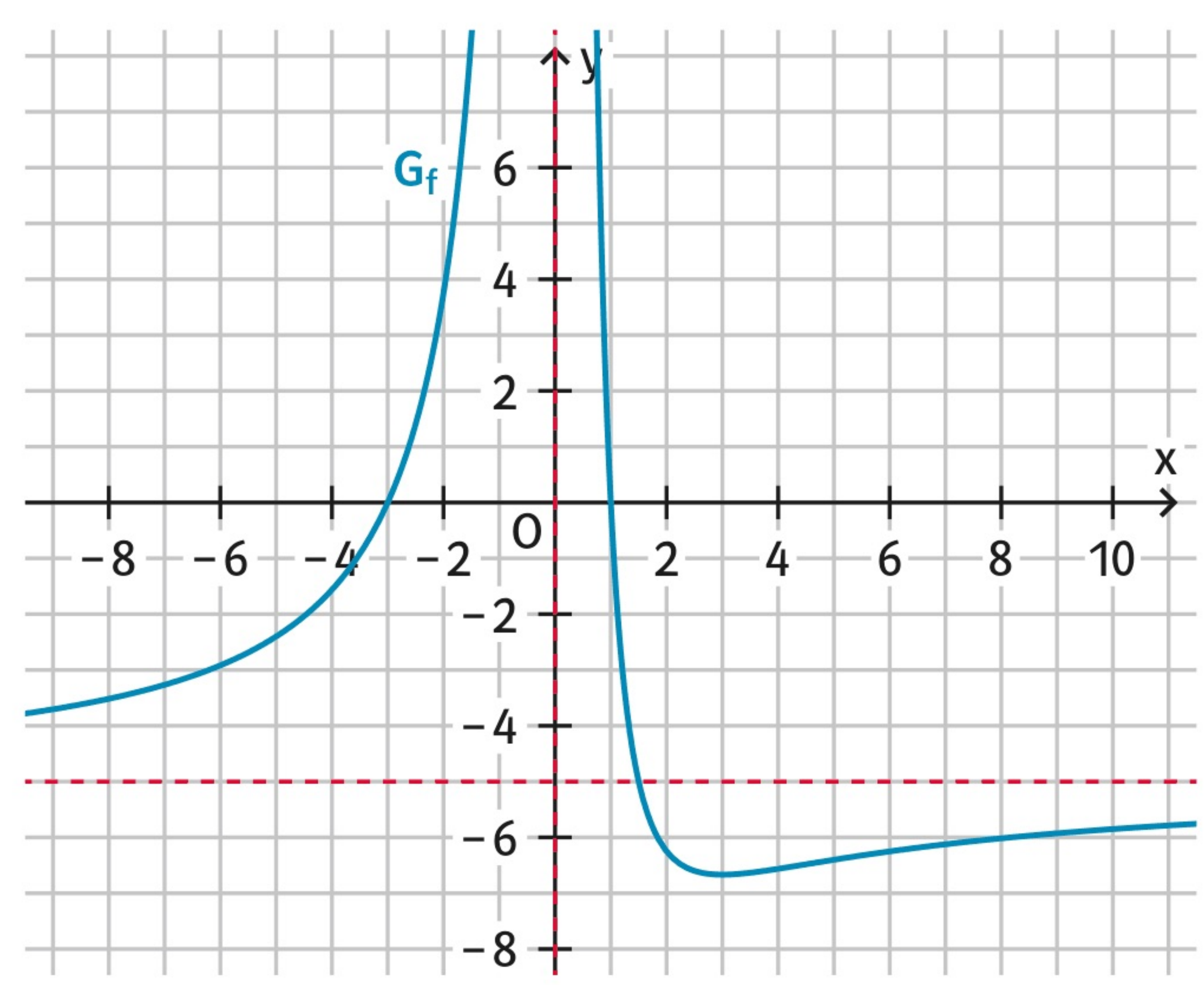
b) Geben Sie einen möglichen Funktionsterm $g(x)$ an und kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Lösung.

13 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-2x^2}{(x+2)(x-3)}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Begründen Sie, dass G_f weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch ist.

b) Der einzige Schnittpunkt der Geraden g mit der Gleichung $y = -2$ und G_f ist der Punkt $S(-6\,|\,-2)$. Ermitteln Sie den Verlauf von G_f und skizzieren Sie G_f in ein Koordinatensystem. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.

14 Abgebildet ist der Funktionsgraph G_f der gebrochen-rationalen Funktion f.
Ermitteln Sie einen Funktionsterm $f(x)$ und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.



Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

15 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \frac{x^2}{(x-3)(x+3)}$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph G_h keinen Schnittpunkt mit seiner waagerechten Asymptote hat.

b) Zeigen Sie, dass die Wertemenge W von h mit $W = \mathbb{R}\setminus]0; 1]$ angegeben werden kann.

c) Bestimmen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware den Parameter $c \in \mathbb{R}$ der Funktion $h_c: x \mapsto \frac{(x+c)^2}{(x-3)(x+3)}$ so, dass der Graph von h_c seine waagerechte Asymptote an der Stelle $x = -3{,}75$ schneidet.

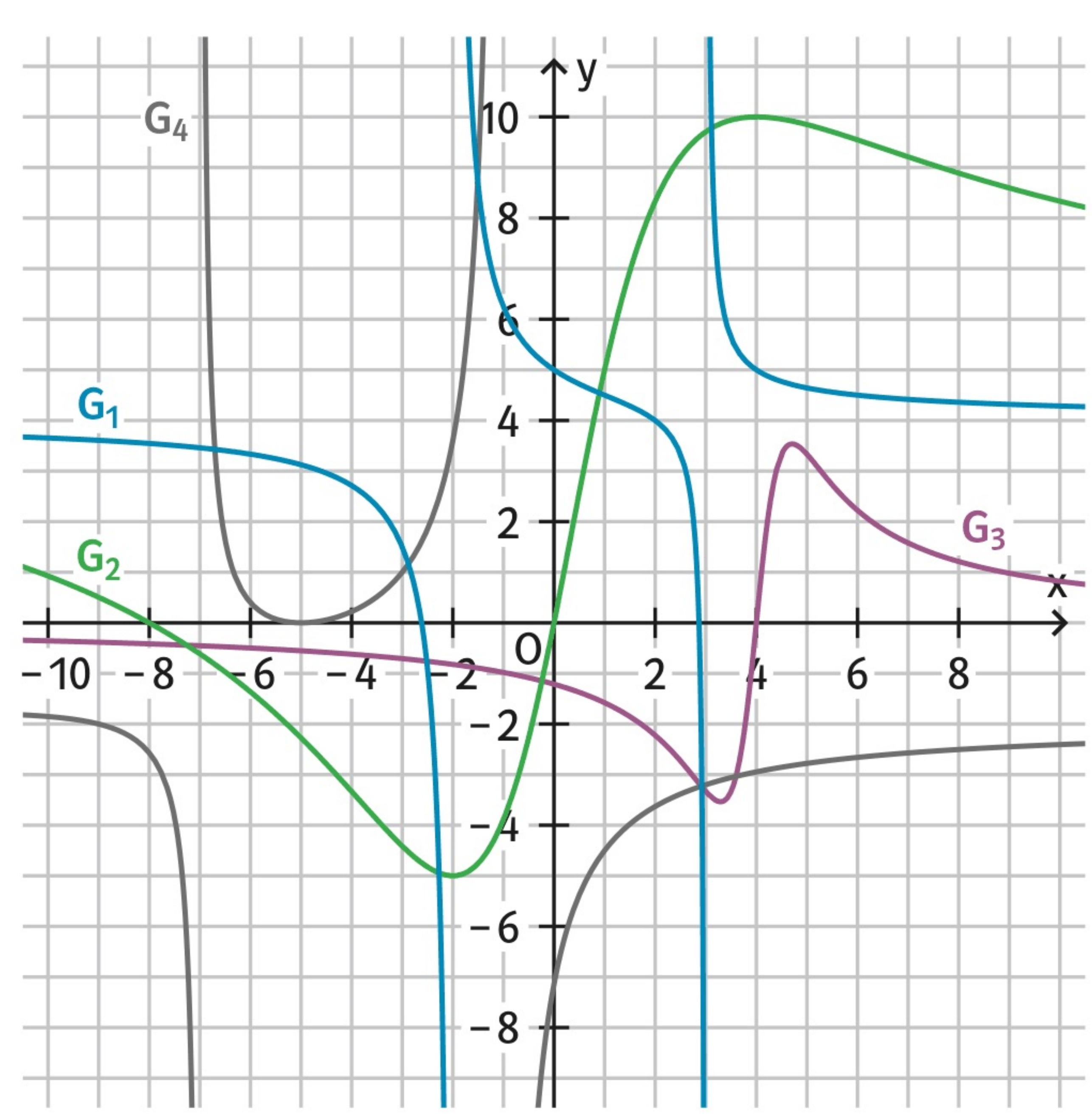
16 In der Abbildung sind die Funktionsgraphen der Funktionen f, g, h und i dargestellt.

$f: x \mapsto \frac{10(x-4)}{2(x-4)^2+1}$

$g: x \mapsto \frac{4x^2-x-30}{x^2-x-6}$

$h: x \mapsto \frac{5x(x+8)}{x^2+8}$

$i: x \mapsto \frac{-2(x+5)^2}{(x+1)(x+7)}$



Zur Erinnerung:
Hat eine Funktion eine doppelte Nullstelle, so berührt der Funktionsgraph an dieser Stelle die x-Achse.

a) Beschreiben Sie die Verläufe der Funktionsgraphen G_1 und G_2 (verwenden Sie gegebenenfalls Näherungswerte).

b) Ordnen Sie jeder Funktion den zugehörigen Funktionsgraphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

c) Geben Sie anhand der abgebildeten Funktionsgraphen die Wertemengen der Funktionen f, g, h und i an.

17 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 + x + 0{,}25}{x^2 - 0{,}5x - 1{,}5}$. Ermitteln Sie mithilfe der Eigenschaften von f den Verlauf des Funktionsgraphen G_f und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der Funktionswerte $f(-2)$ und $f(2)$ in ein Koordinatensystem.

18 Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Funktion $f_a\colon x \mapsto \frac{2x^2 - 0{,}5a^2}{4x + a}$ mit Graph G_a.
a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.
b) Zeigen Sie, dass die Graphen G_a durch den Punkt $P(0\,|\,-0{,}5a)$ verlaufen.
c) Geben Sie das Verhalten von f_a für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass dieses unabhängig von a ist.
d) Ermitteln Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware einen Wert für a, sodass die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}5x - 0{,}5$ die schräge Asymptote eines Graphen G_a ist.

19 Gegeben ist für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Funktion $f_{a,b,c,d}\colon x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{dx}$.
a) Geben Sie die Definitionsmenge von $f_{a,b,c,d}$ an.
b) Begründen Sie, dass für $a \neq 0$ die Graphen der Funktionen $f_{a,b,c,d}$ zwei Asymptoten haben.
c) Geben Sie den Funktionsterm der Funktion $f_{4,0,4,2}$ an und zeigen Sie, dass ihr Graph symmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Bestimmen Sie zudem die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von $f_{4,0,4,2}$.
d) Geben Sie für $d = 2$ alle Werte für a, b und c an, sodass die Graphen der Funktionen $f_{a,b,c,d}$ die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ als waagerechte Asymptote haben.
e) Die Graphen der Funktionen $f_{4,0,4,2}$ und $f_{0,8,4,2}$ schneiden sich nur an der Stelle $x = 2$. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen an und skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen beider Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem (1 LE = 0,5 cm).

Test 2

Lösungen | Seite 202

20 Gegeben ist für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_{a,b}\colon x \mapsto \frac{4x^2 + a}{(2x - b)(x + 1)}$ mit dem Graphen $G_{a,b}$.
a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f_{a,b}$ für $a > 0$ keine Nullstellen hat.
b) Der Funktionsterm $f_{a,b}(x)$ sei vollständig gekürzt. Das bedeutet, die Polynome $4x^2 + a$ und $(2x - b)(x + 1)$ haben unterschiedliche Nullstellen, womit $a \neq -4$ und $b \neq \pm\sqrt{-a}$ gelten muss. Geben Sie in diesem Fall die Werte für a an, sodass $f_{a,b}$ zwei Nullstellen hat.
c) Bestimmen Sie für $a = 0$ und $b \neq 0$ die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von $G_{a,b}$.
d) Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen $G_{a,b}$ die gleiche waagerechte Asymptote haben.
e) Ermitteln Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware Werte für a und b, sodass $G_{a,b}$ die x-Achse berührt und $f_{a,b}$ die Wertemenge $W = [0; \infty[$ hat.

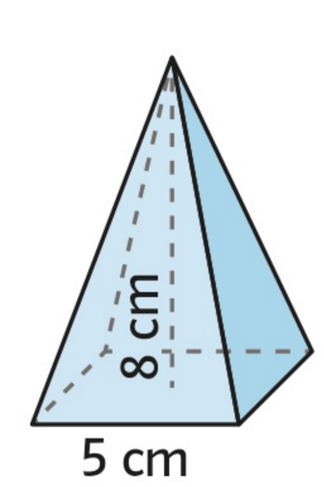
21 Ermitteln Sie wesentliche Eigenschaften der Funktion g mit $g(x) = -\frac{(x-5)(x+6)+25}{x^2 - x - 6}$ sowie ihres Funktionsgraphen G_g und zeichnen Sie den Graphen G_g in ein Koordinatensystem.

22 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{10 \cdot \cos(x)}{x}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern ihres Definitionsbereichs. Berechnen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie G_f in ein Koordinatensystem. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einem Funktionenplotter.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 202

G 23 Von einer Kugel ist der Radius $r = 30\,\text{cm}$ bekannt. Berechnen Sie das Volumen der Kugel in dm^3 und ihren Oberflächeninhalt in dm^2.



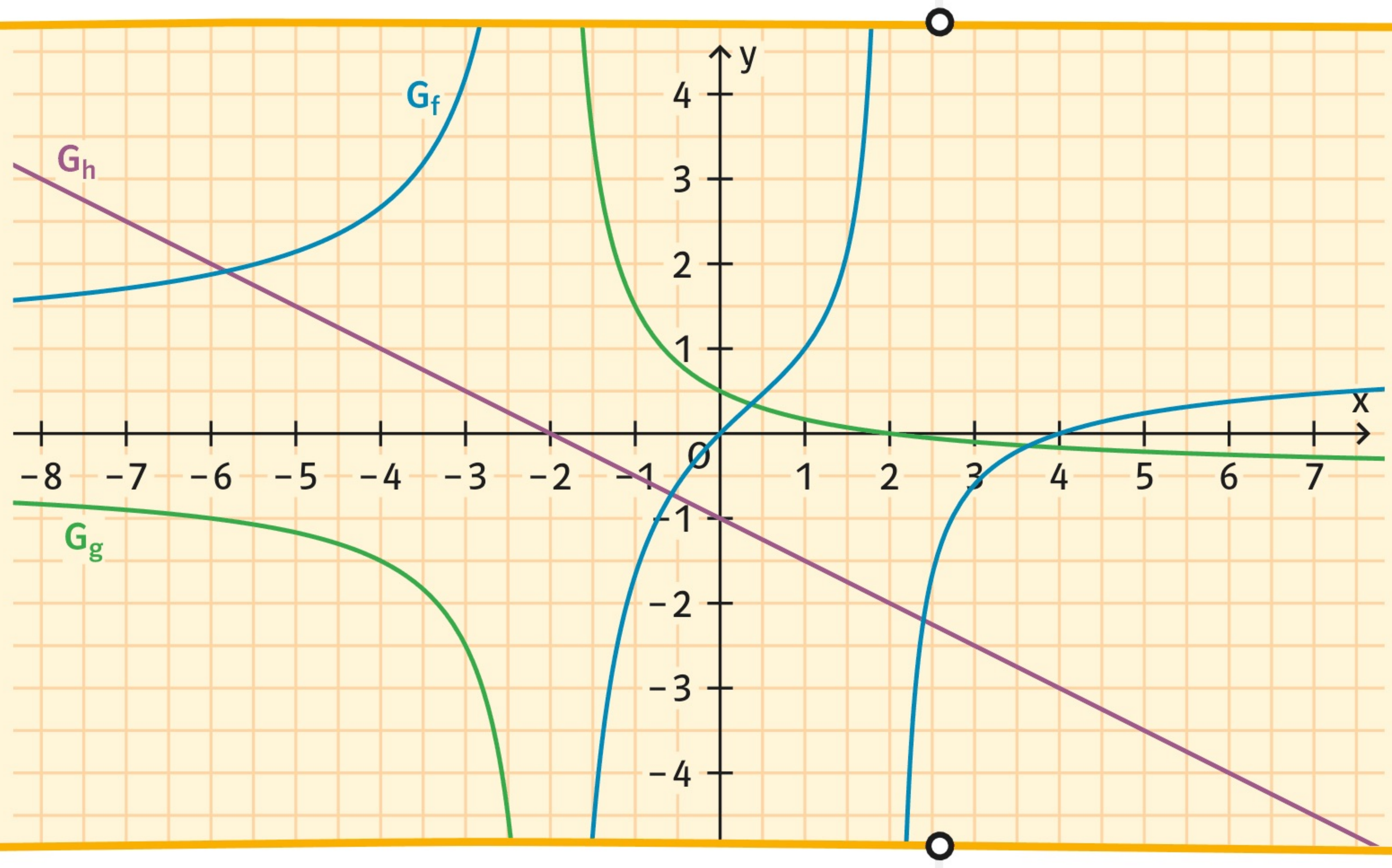
G 24 Berechnen Sie das Volumen der abgebildeten Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

5 Schnittpunkte von Graphen ermitteln

Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto f(x)$, $g: x \mapsto g(x)$ und $h: x \mapsto h(x)$ sowie ihre Graphen G_f, G_g und G_h.

a) Wie viele Lösungen haben die Gleichungen $f(x) = h(x)$ und $g(x) - h(x) = 0$?

b) Geben Sie mithilfe der Abbildung eine Gleichung an, deren Lösungen näherungsweise 0,4 und 3,6 sind. Erläutern Sie Ihre Angabe.



Die x-Koordinaten der Schnittpunkte zweier Graphen bestimmt man durch Gleichsetzen der zugehörigen Funktionsterme und Lösen der entstandenen Gleichung.

Im Folgenden wird das Bestimmen der Koordinaten der Schnittpunkte zweier Graphen anhand der Funktionen $f: x \mapsto \frac{2}{x-1}$ mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ und $g: x \mapsto \frac{-2}{(x+1)^2}$ mit $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ gezeigt.

(1) Gleichsetzen von f(x) und g(x)

Die Funktionsterme werden gleichgesetzt.

$$\frac{2}{x-1} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

„Überkreuzmultiplizieren":

$$\frac{2}{x-1} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

$$2(x+1)^2 = -2(x-1)$$

(2) Lösen der Gleichung

Die Bruchterme beider Seiten der Gleichung werden mit dem Hauptnenner multipliziert. Nach dem Kürzen wird die nennerfreie Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen gelöst.

$$\frac{2}{x-1} = \frac{-2}{(x+1)^2} \quad | \cdot (x+1)^2(x-1)$$

$$\frac{2(x+1)^2(x-1)}{(x-1)} = \frac{-2(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$2(x+1)^2 = -2(x-1)$$

$$(x+1)^2 = -(x-1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = -x + 1$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -3$$

$$x_1, x_2 \in D_f \text{ und } x_1, x_2 \in D_g$$

Zur Erinnerung:
Prüfen Sie stets, ob das Ergebnis beim Lösen einer Gleichung auch in den Definitionsmengen der zugrunde liegenden Funktionen liegt.

(3) Berechnen der y-Koordinaten und Angabe der Schnittpunkte

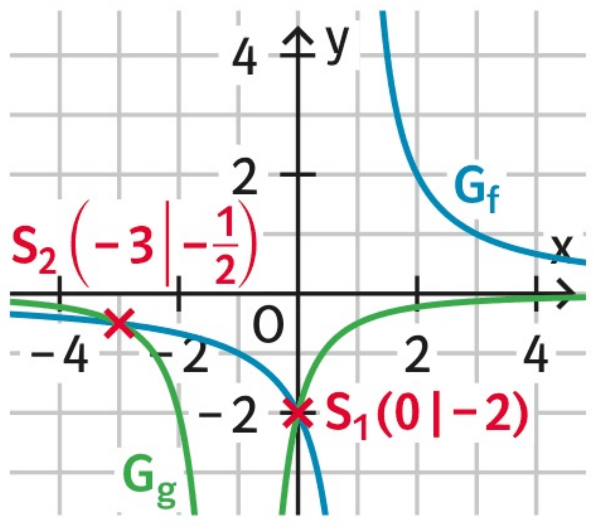
Die Lösungen der Gleichung werden in f(x) oder g(x) eingesetzt und die entsprechenden Funktionswerte berechnet.

$f(0) = -2$ oder $g(0) = -2$

$f(-3) = -\frac{1}{2}$ oder $g(-3) = -\frac{1}{2}$

Schnittpunkte der beiden Graphen:

$S_1(0|-2)$ und $S_2\left(-3\middle|-\frac{1}{2}\right)$.

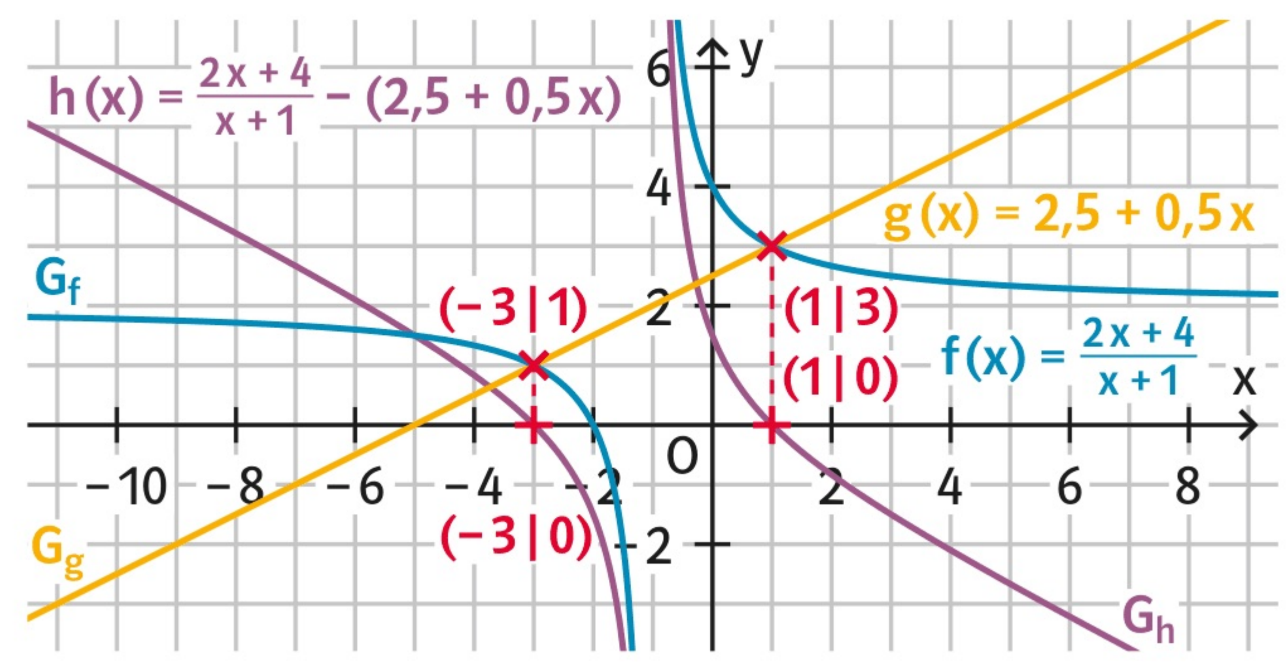


Vorgehen zur **Bestimmung der Koordinaten von Schnittpunkten zweier Funktionsgraphen** G_f und G_g:

1. Gleichsetzen der Funktionsterme: $f(x) = g(x)$.
2. Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$.
3. Einsetzen der x-Koordinate eines Schnittpunktes in einen der beiden Funktionsterme und Berechnen der y-Koordinate dieses Schnittpunktes.

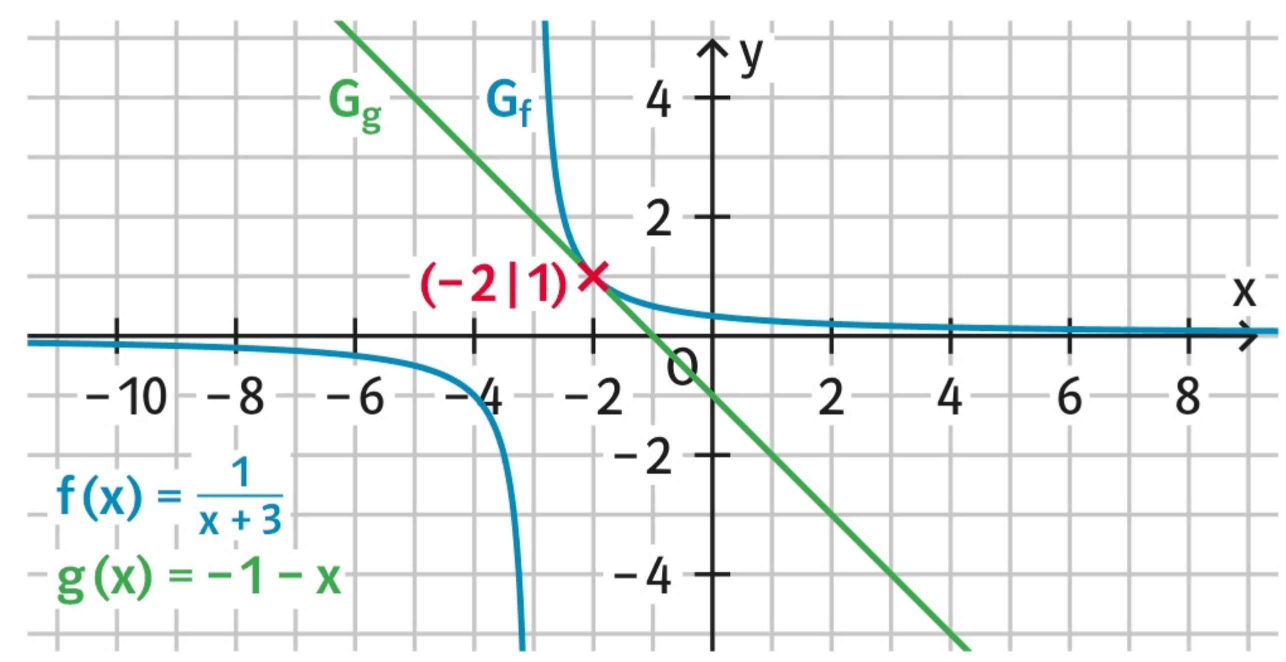
Bemerkungen:

– Ist h eine aus den Funktionen f und g zusammengesetzte Funktion der Form h: $x \mapsto f(x) - g(x)$, dann stimmen die Nullstellen von h mit den Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ bzw. mit den x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g überein.



$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$

– Ergibt sich beim Ermitteln der Koordinaten der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen G_f und G_g eine quadratische Gleichung, die nur eine Lösung besitzt, schneiden sich die Graphen in nur einem Punkt, einem sogenannten Berührpunkt.



Beispiel

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{0{,}5x + 2{,}5}{x}$ und $g(x) = \frac{-2}{x+3} - 1$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g.

b) Erläutern Sie die Bedeutung der Lösungen der Gleichung $\frac{0{,}5x + 2{,}5}{x} = \frac{-2}{x+3} - 1$ für die Funktion h: $x \mapsto f(x) - g(x)$.

Lösung

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{0{,}5x + 2{,}5}{x} = \frac{-2}{x+3} - 1 \Leftrightarrow \frac{(0{,}5x + 2{,}5)(x+3)x}{x} = \left(\frac{-2}{x+3} - 1\right)(x+3)x$

$\Leftrightarrow (0{,}5x + 2{,}5)(x+3) = \frac{-2(x+3)x}{x+3} - (x+3)x$

$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 4x + 7{,}5 = -2x - x^2 - 3x$

$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 9x + 7{,}5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 7{,}5}}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{-9 \pm \sqrt{36}}{3}$

$\Rightarrow x_1 = -5$ und $x_2 = -1$ sowie $y_1 = f(-5) = g(-5) = 0$ und $y_2 = f(-1) = g(-1) = -2$

$\Rightarrow S_1(-5 \mid 0)$ und $S_2(-1 \mid -2)$

b) Die Lösungen der Gleichung $\frac{0{,}5x + 2{,}5}{x} = \frac{-2}{x+3} - 1$ entsprechen den Nullstellen der Funktion h. Um die Nullstellen von h zu stimmen, muss die Gleichung $\frac{0{,}5x + 2{,}5}{x} - \left(\frac{-2}{x+3} - 1\right) = 0$ gelöst werden, welche äquivalent zur Gleichung $\frac{0{,}5x + 2{,}5}{x} = \frac{-2}{x+3} - 1$ ist.

Alternative:

(1) $g(x) = \frac{-2}{x+3} - 1$
$= \frac{-2}{x+3} - \frac{x+3}{x+3}$
$= \frac{-2-x-3}{x+3} = \frac{-x-5}{x+3}$

(2) $f(x) = g(x)$
$\Leftrightarrow \frac{0{,}5x + 2{,}5}{x} = \frac{-x-5}{x+3}$
$\Leftrightarrow (0{,}5x + 2{,}5)(x+3) = (-x-5)x$
$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 4x + 7{,}5 = -x^2 - 5x$
$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 9x + 7{,}5 = 0$

Aufgaben

1 Lösen Sie die Gleichung und kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Lösungen.

a) $\frac{x}{4x-1} = \frac{x}{x+1}$ b) $\frac{3x}{x-5} = \frac{-3x}{x+5}$ c) $4 = \frac{x(x+2{,}5)}{x-2{,}5}$ d) $\frac{3x}{x-2} = \frac{5}{x-5}$

2 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen G_f und G_g. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $f(x) = \frac{4}{x-2}$ und $g(x) = 1 - \frac{4}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{10}{x-2}$ und $g(x) = \frac{10}{x-5}$

c) $f(x) = \frac{4}{(x+3)(x+1)}$ und $g(x) = \frac{5}{x^2-9}$ d) $f(x) = \frac{-0{,}5x^2 - 0{,}5x + 2}{x+1}$ und $g(x) = 2 + 1{,}5x$

e) $f(x) = \frac{81 + 2x^2}{x^2}$ und $g(x) = x^2 + 2$ f) $f(x) = 1 - \frac{32 - 4x^2}{x^2}$ und $g(x) = -x^2 + 1$

Zur Erinnerung:
Biquadratische Gleichungen der Form $a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$ lassen sich mithilfe einer Substitution ($x^2 = z$ und $x^4 = z^2$) auf eine quadratische Gleichung der Form $a_4z^2 + a_2z + a_0 = 0$ zurückführen.

3 Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen f: $x \mapsto 0{,}25x - \frac{4}{x-2}$ und g: $x \mapsto 0{,}25x$ keine Schnittpunkte haben, und beschreiben Sie, was dies für die schräge Asymptote von G_f bedeutet.

4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$. Zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters G_f und G_g und beschreiben Sie die Besonderheit des Punktes S.

5 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung und kontrollieren Sie Ihre Angabe mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $\frac{x-4}{x-2} = \frac{x-2}{x-1}$ b) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x+4}$ c) $\frac{2x-3}{4x+2} = \frac{4}{x+0{,}5}$ d) $\frac{-4x+8}{-4} = \frac{x+2}{(x+2)-6}$

Zur Erinnerung:
Die Lösungsmenge einer Gleichung enthält alle Lösungen der Gleichung und wird mit geschweiften Klammern angegeben.

6 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3**

Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion $k: x \mapsto \frac{-x^2+2x}{2x^2+4}$. Ihr Graph wird mit G_k bezeichnet.

a) Geben Sie die Nullstellen von k an und begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass G_k die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}5$ als waagrechte Asymptote besitzt.

b) Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunkts von G_k mit der waagrechten Asymptote.

7 Beurteilen Sie folgende Aussage: „Der Funktionsgraph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4x^2-3x+1}{x^2-2x+1}$ schneidet seine Asymptote nicht.“ Überprüfen Sie Ihre Beurteilung mithilfe eines Funktionenplotters.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

8 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{2}{x-4}$ und $g(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$.

a) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Graphen G_f und G_g an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f und G_g.

c) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen G_f und G_g.

9 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto -\frac{2}{x-1} + 2{,}5$ und $g: x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2} + 2{,}5$. Ihre Funktionsgraphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Graphen G_f und G_g in ein gemeinsames Koordinatensystem und geben Sie näherungsweise die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f und G_g an.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f und G_g. Kontrollieren Sie damit Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

Test 1

Lösungen | Seite 203

10 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen G_f und G_g.

a) $f(x) = \frac{2x-4}{x+2}$ und $g(x) = 2x - 4$ b) $f(x) = -\frac{2}{(x+5)^2} - 1{,}5$ und $g(x) = \frac{2}{x+3} - 1{,}5$

11 Ermitteln Sie die Anzahl der Schnittpunkte der Funktionsgraphen G_f und G_g.

a) $f(x) = \frac{4}{x^2-2x+2}$ und $g(x) = \frac{2}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$ und $g(x) = 0{,}6x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ und $g(x) = \frac{4x-15}{x-4}$ d) $f(x) = \frac{3a-ax+1}{x-3}$ und $g(x) = \frac{1-ax-2a}{x+2}$ $(a \in \mathbb{R})$

Tipp:
Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung kann mithilfe der Diskriminante bestimmt werden.

12 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $g: x \mapsto \frac{4}{x-2}$ und $h: x \mapsto \frac{-4x}{x^2+2}$ und geben Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $g(x) = h(x)$ an. Weisen Sie dann die Richtigkeit Ihrer Angabe rechnerisch nach.

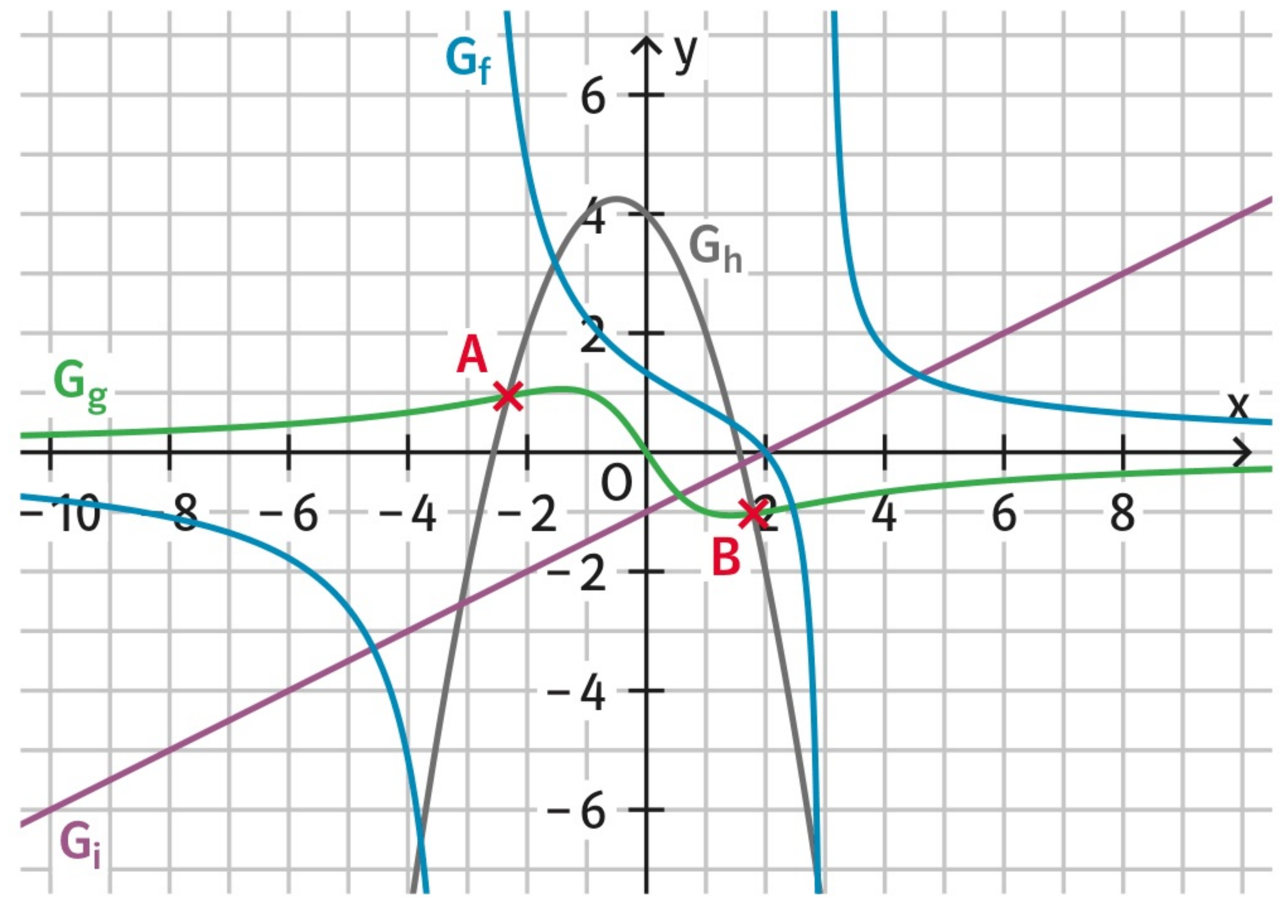
13 Die Graphen der Funktionen $g: x \mapsto \frac{x^2-4x-3}{2x+1}$ und $h: x \mapsto \frac{4x^2-2x+1}{-8x^2}$ werden mit G_g und G_h bezeichnet. Geben Sie eine Funktion f an, deren Nullstellen mit den x-Koordinaten der Schnittpunkte von G_g und G_h übereinstimmen. Bestimmen Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware die Näherungslösungen der Gleichung $g(x) = h(x)$ auf zwei unterschiedliche Arten.

14 In der Abbildung sind die Funktionsgraphen der Funktionen f, g, h und i dargestellt.

a) Geben Sie näherungsweise die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ an.

b) Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösungen die x-Koordinaten der Punkte A und B sind.

c) Geben Sie eine zusammengesetzte Funktion an, deren Nullstellen $x = -1{,}5$ und $x = 1{,}4$ sind. Verwenden Sie hierzu zwei der gegebenen Funktionen.



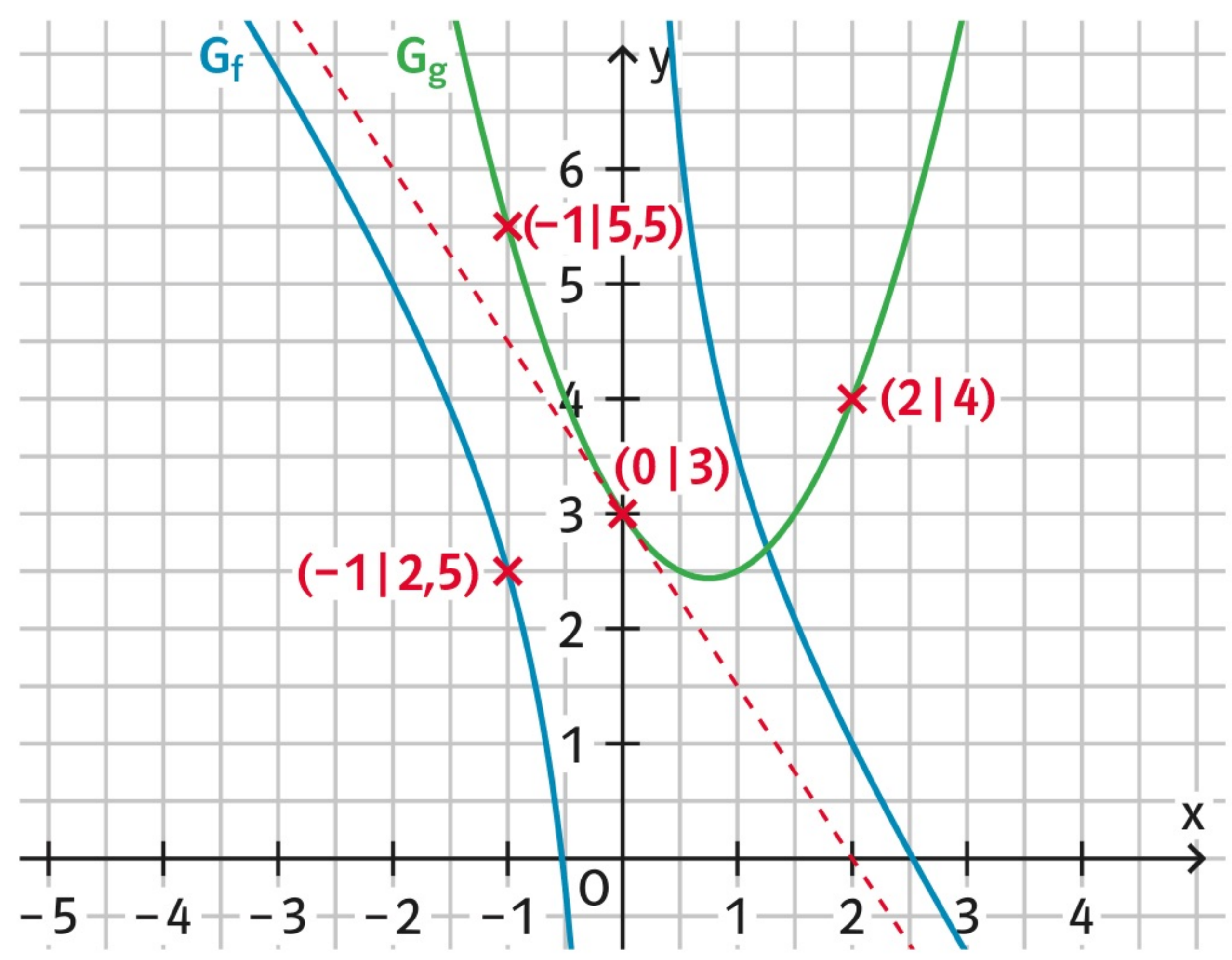
15 Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie je einen Funktionsterm von f bzw. g.

b) Geben Sie zwei Funktionen an, deren Graphen mit G_f keinen Schnittpunkt haben.

c) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion h mit $h(x) = f(x) - g(x)$.

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f und G_g.



Strategie | Seite 189
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

16 Ein Reisebüro bietet für Schulgruppen Erlebnisreisen an. Pro teilnehmender Person verlangt es eine Teilnahmegebühr von 160 € und abhängig von der Gruppengröße G eine pauschale Grundgebühr. Zusätzlich bekommt man ab 100 Personen die Teilnahmegebühr zweier Personen, ab 150 Personen von vier Personen und ab 200 Personen die Teilnahmegebühr von sechs Personen erlassen.
In der Regel werden von den Schulen die Kosten gleichmäßig auf alle teilnehmenden Personen umgelegt.

Teilnahmegebühr pro Person	160 €
Gruppengröße G	**Grundgebühr**
G < 150	2000 €
150 ≤ G < 200	1500 €
G ≥ 200	1000 €
Gruppengröße G	**Rabatt**
G ≥ 100	2 · 160 €
G ≥ 150	4 · 160 €
G ≥ 200	6 · 160 €

a) Geben Sie zwei abschnittsweise definierte Funktionen g und p an, mit denen die Gesamtkosten insgesamt bzw. die Kosten pro Person ermittelt werden können. Berechnen Sie g(30) und p(30).

b) Bestimmen Sie die Differenzen der Kosten pro Person und für die ganze Gruppe bei 199 bzw. bei 200 Personen. Was fällt auf?

c) Zeichnen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware den Funktionsgraphen der Funktion p.



d) Gibt es eine Zahl teilnehmender Personen, sodass die Kosten pro Person bei genau 180 € liegen? Begründen Sie Ihre Antwort.

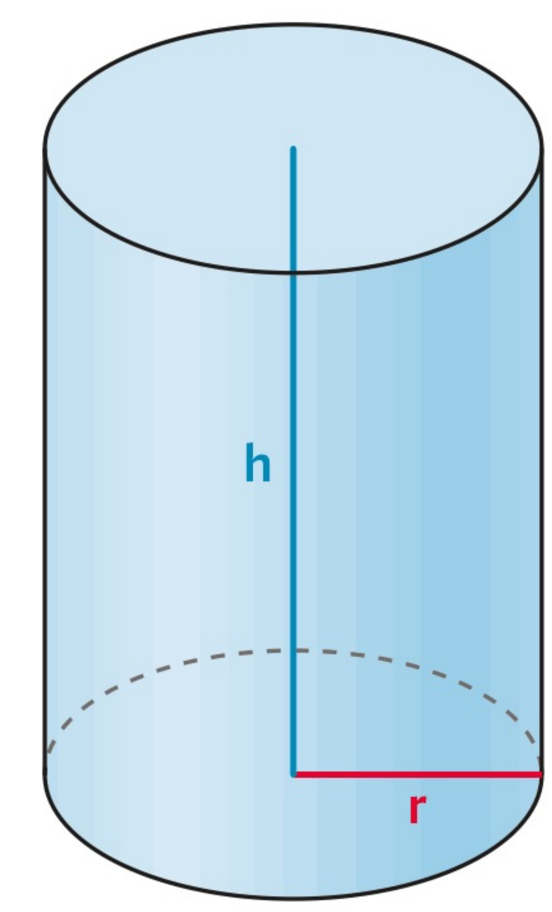
e) Bestimmen Sie, ab welcher Zahl teilnehmender Personen die Kosten pro Person unter 170 € liegen.

17 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{x+3}{(x-4)^2}$ und für jedes $k \in \mathbb{R}$ die Funktion $g_k\colon x \mapsto kx - 1{,}75$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_k bezeichnet.

a) Zeichnen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung eines Schiebereglers die Graphen G_f und G_k. Bestimmen Sie für $k = 5$ näherungsweise die Koordinaten aller Schnittpunkte der Graphen G_f und G_k.

b) Ermitteln Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware, für welchen Wert von k die Funktionsgraphen G_f und G_k genau zwei Schnittpunkte haben.

18 Das Volumen eines Zylinders kann mit der Formel $V = \pi r^2 h$ und sein Oberflächeninhalt mit der Formel $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ berechnet werden. Damit können näherungsweise das Volumen und der Oberflächeninhalt einer Getränkedose bestimmt werden.



a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$, mit dem die Höhe einer 500-ml-Getränkedose in Abhängigkeit des Radius x der Grundfläche der Dose berechnet werden kann ($f(x)$ und x in cm). Untersuchen Sie dann, wie sich die Höhe einer solchen Dose bei Verdopplung des Radius verändert.

b) Bestimmen Sie einen Funktionsterm $g(x)$, mit dem die Höhe einer Getränkedose mit dem Oberflächeninhalt $424\,\text{cm}^2$, in Abhängigkeit des Radius x der Grundfläche der Dose berechnet werden kann ($g(x)$ und x in cm).

c) Der Durchmesser einer gewöhnlichen 500-ml-Getränkedose beträgt 67 mm und ihre Höhe 168 mm. Berechnen Sie die Termwerte $f(3{,}35)$ sowie $g(3{,}35)$ und lösen Sie die Gleichung $16{,}8 = \frac{500}{x^2\pi}$. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachkontext.

d) Ermitteln Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware, für welche Radien einer Dose die Terme $f(x)$ und $g(x)$ gleiche Werte für die Höhe der Dose liefern. Geben Sie die Werte der entsprechenden Höhen an.

Test 2

Lösungen | Seite 203

19 Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{2x - 4 + x^2}{9 - 3x^2}$ und $g\colon x \mapsto \frac{-x-1}{3x+6}$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet. Ermitteln Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_f und G_g sowie die Eigenschaften von f und G_f sowie g und G_g. Skizzieren Sie unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse G_f und G_g.

20 Gegeben sind für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen f_a und g mit $f_a(x) = \frac{x + 6 - a}{x + 6}$ und $g(x) = 2x + 1$. Ermitteln Sie rechnerisch, für welchen Wert von a die Funktionsgraphen G_a und G_g genau einen Schnittpunkt haben.

21 Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{-x^2 - 0{,}5x + 1{,}5}{x - 0{,}5}$ und $g\colon x \mapsto -x - 1$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass G_f und G_g keine gemeinsamen Schnittpunkte haben.

b) Zeigen Sie, dass die Terme $(x - 0{,}5)\left(-x - 1 + \frac{1}{x - 0{,}5}\right)$ und $-x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$ äquivalent sind, und deuten Sie die Äquivalenz.

c) Bestimmen Sie die Eigenschaften der Funktionen f und g sowie ihrer Graphen G_f und G_g.

d) Zeichnen Sie unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse G_f und G_g in ein Koordinatensystem.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 203

G 22 Betrachtet wird eine gerade Pyramide mit der Höhe $h = 8\,\text{cm}$, die als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 5\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$ hat. Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt dieser Pyramide.

Wiederholen

1 Der Funktionsterm der Funktion f ist in zwei Darstellungen gegeben: $f(x) = \frac{4}{x-3} + 5 = \frac{5x-11}{x-3}$.
Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet. Erläutern Sie, welche Eigenschaften von f und G_f aus welcher Darstellung von f(x) direkt entnommen werden können.

2 Formen Sie den Term f(x) so um, dass er die Darstellung eines Bruchterms der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ hat, und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Lösungen.
a) $f(x) = \frac{4}{x-3} + 2$ **b)** $f(x) = \frac{-2{,}5}{x+2} + 2{,}5$ **c)** $f(x) = \frac{2}{x} - 2x + 3$ **d)** $f(x) = \frac{2}{x+1} + 0{,}5x$

3 Zeichnen Sie den Graphen G_h der Funktion h mithilfe eines Funktionenplotters. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an und erläutern Sie, wie man diese mithilfe des Funktionsterms bestimmen kann.
a) $h: x \mapsto \frac{3x-1{,}5}{x-2}$ **b)** $h: x \mapsto \frac{4x+2}{2x+2}$ **c)** $h: x \mapsto \frac{x^2-1}{2x^2-8}$ **d)** $h: x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-1}$

4 Gegeben sind die Funktionen f_1 bis f_8. Geben Sie die Funktionen an, deren Funktionsgraphen entweder die x-Achse oder die Gerade mit der Gleichung $y = -2$ oder die Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ als Asymptote haben. Begründen Sie Ihre Angabe. Gehen Sie arbeitsteilig vor und erklären Sie sich gegenseitig Ihre Ergebnisse.

$f_1: x \mapsto \frac{1+2x}{2-x}$ $f_2: x \mapsto \frac{0{,}5x-1}{x^2+2}$ $f_3: x \mapsto \frac{x+1}{2-x^2}$ $f_4: x \mapsto \frac{1-0{,}5x}{x-3}$

$f_5: x \mapsto \frac{4x+3}{1-2x}$ $f_6: x \mapsto x - 3 + \frac{4}{x-2}$ $f_7: x \mapsto \frac{3}{2x}$ $f_8: x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2} + x - 3$

5 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Funktionsgraphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ und $g(x) = \frac{1}{x+2} - 3$. Zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters G_f und G_g und beschreiben Sie die Besonderheit des Punktes S.

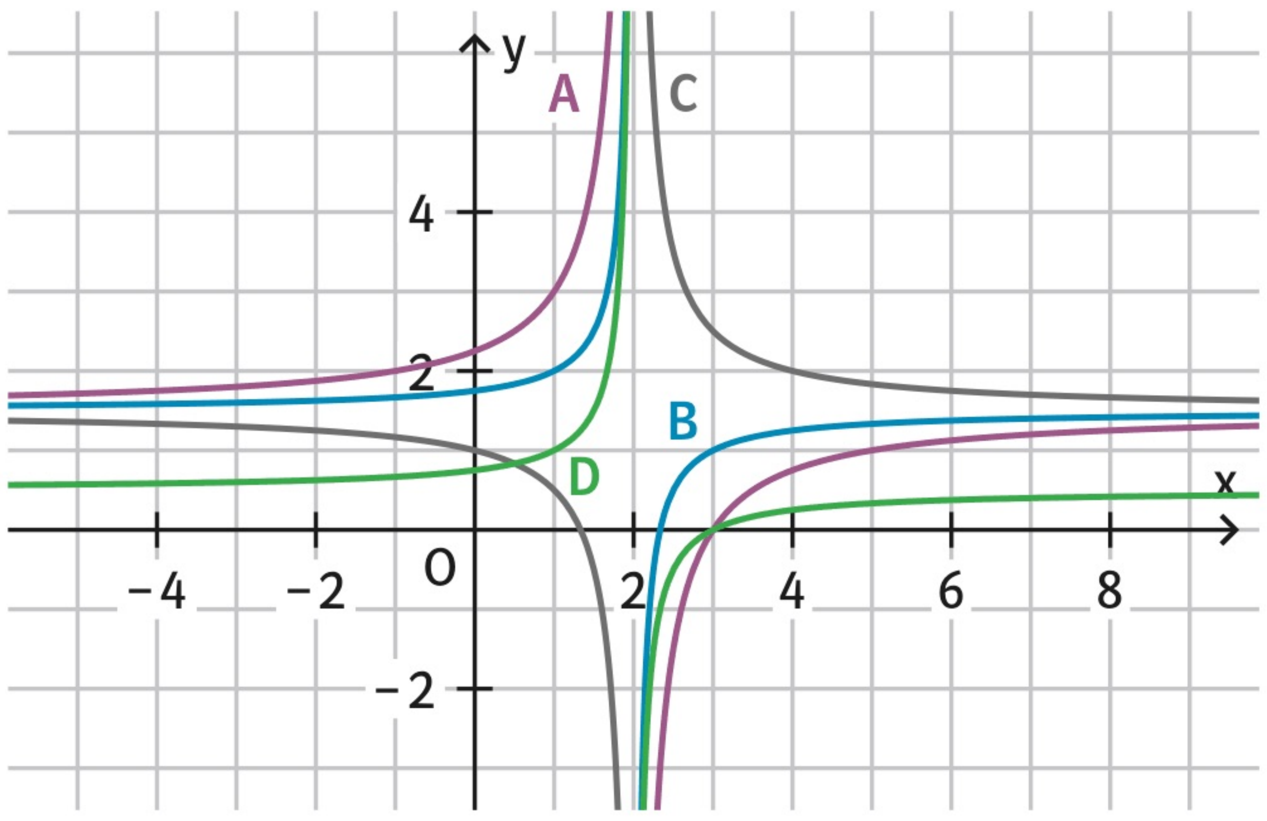
6 Geben Sie alle Polstellen der Funktion f an und bestimmen Sie ihre Art.
a) $f: x \mapsto \frac{6}{(x-2)(x+5)}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{0{,}5x}{(x-4)^2}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{x+3}{(2x-6)^2}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{x^2-4}{x^2+3x-4}$

Vertiefen

7 Ordnen Sie jedem Funktionsterm den passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung anhand der Eigenschaften der zugehörigen Funktionen und ihrer Graphen.

$f(x) = \frac{-0{,}5}{x-2} + 1{,}5$ $g(x) = \frac{x-3}{2x-4}$

$h(x) = \frac{3x-9}{2x-4}$ $i(x) = \frac{1}{x-2} + 1{,}5$



Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip

8 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x - 2 + \frac{5}{x-1}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an.
b) Geben Sie die Polstelle von f an und bestimmen sie ihre Art.
c) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.
d) Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Graph G_f seine schräge Asymptote nicht schneidet.

9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4(x+1)}{4-8x}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die Terme f(x) und $g(x) = \frac{6}{-8x+4} - \frac{1}{2}$ äquivalent sind.

b) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f an, ermitteln Sie wesentliche Eigenschaften von f und G_f und skizzieren Sie G_f.

10 **Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1a) und b)**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$ und Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3; -1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

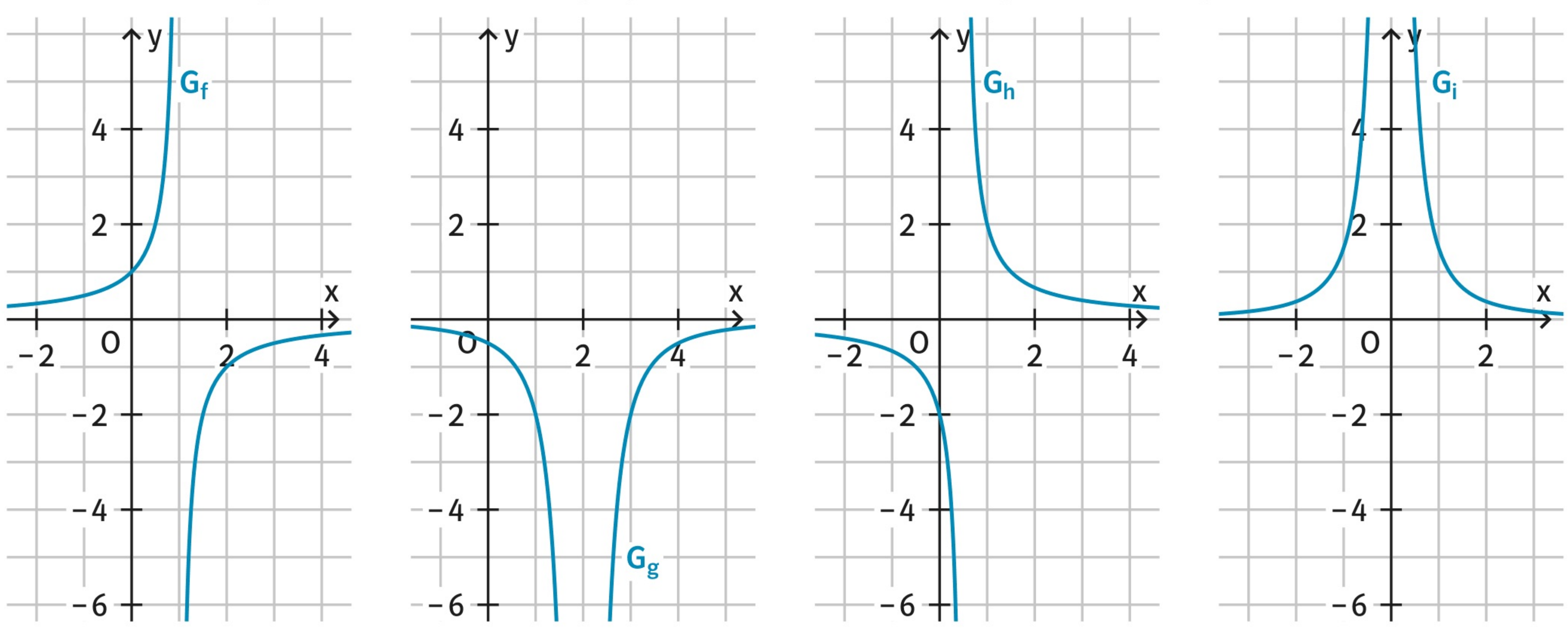
a) Zeigen Sie, dass f(x) zu jedem der drei folgenden Terme äquivalent ist:
$\frac{2}{(x+1)(x+3)}$; $\frac{2}{x^2+4x+3}$; $\frac{1}{0{,}5(x+2)^2-0{,}5}$

b) Begründen Sie, dass die x-Achse horizontale Asymptote von G_f ist, und geben Sie die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von G_f an. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse.

11 Ermitteln Sie mithilfe geeigneter Termumformungen das Verhalten der Funktion g für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

a) $g\colon x \mapsto \frac{4x-7}{5x+2}$ **b)** $g\colon x \mapsto \frac{0{,}5x-2}{x^2+5x-2}$ **c)** $g\colon x \mapsto \frac{5x^2+10}{1+x+x^2}$ **d)** $g\colon x \mapsto \frac{0{,}5x^2+4x}{0{,}5x+0{,}25}$

12 In der Abbildung sind die Funktionsgraphen der Funktionen f, g, h und i abgebildet.



a) Geben Sie für jede der Funktionen f, g, h und i die Polstellen und jeweils ihre Art sowie die Gleichungen aller Asymptoten ihrer Graphen an.

b) Geben Sie zu jeder der Funktionen f, g, h und i einen möglichen Funktionsterm an, der das gleiche Verhalten in der Umgebung der sichtbaren Polstelle aufweist. Kontrollieren Sie Ihre Lösung mithilfe eines Funktionenplotters.

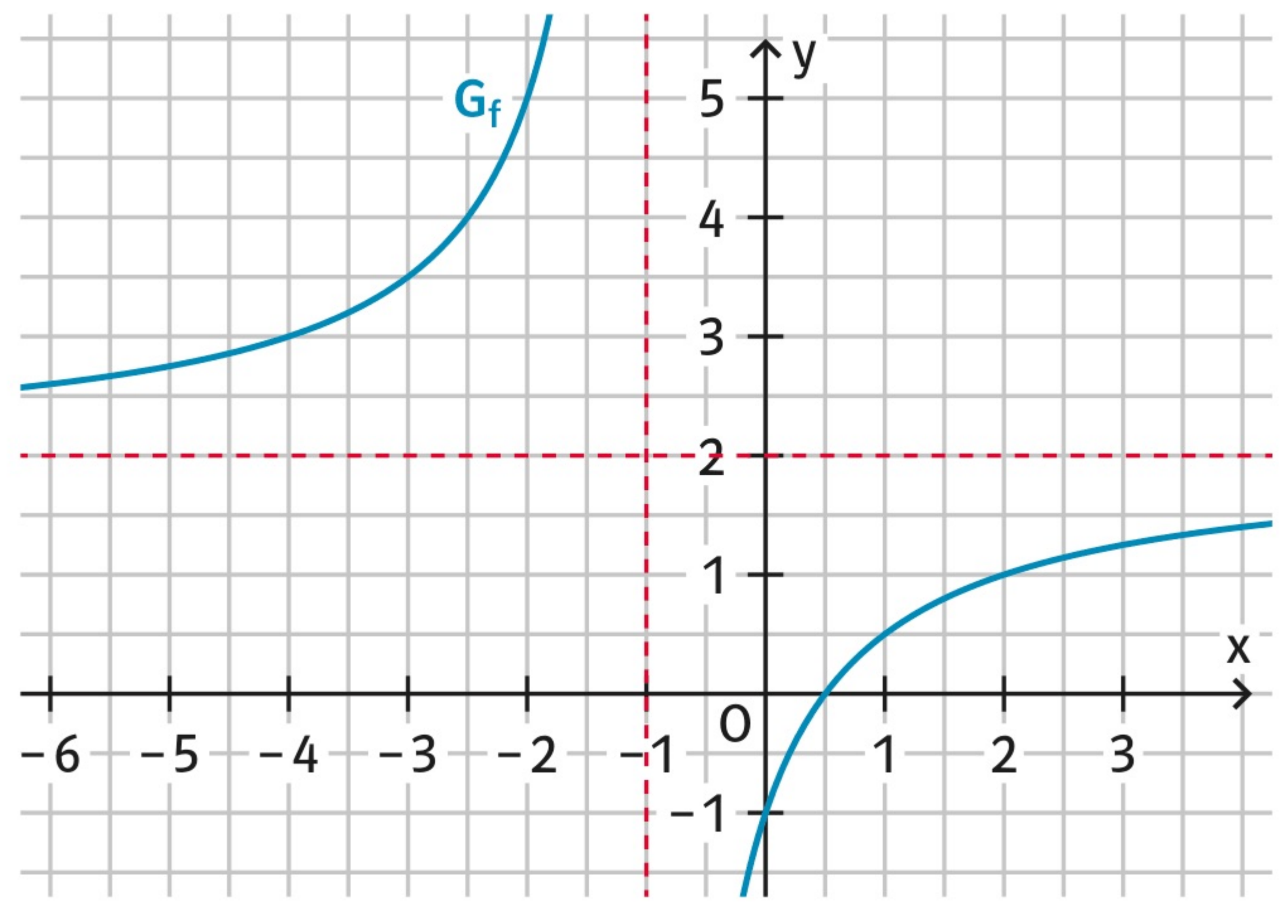
13 Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion f und die Koordinaten der Schnittpunkte ihres Graphen G_f mit den Koordinatenachsen sowie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
Skizzieren Sie unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse G_f und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $f\colon x \mapsto \frac{-(x-1)^2}{(x+2)(x-4)}$ **b)** $f\colon x \mapsto \frac{3}{x^2-5x+2}$ **c)** $f\colon x \mapsto \frac{x^2-2x}{x^2-4x+2}$ **d)** $f\colon x \mapsto \frac{15x}{(x+1)^2}$

14 Beurteilen Sie folgende Aussage: „Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = -\frac{2x^2}{(x+2)^2}$ und $g(x) = -2$ haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt, da der Graph von f die Asymptote mit der Gleichung $y = -2$ hat."
Zeichnen Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware die Graphen G_f und G_g und überprüfen Sie Ihre Beurteilung.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

15 Gegeben ist der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion f, deren Funktionsterm die Form $f_{a,b}(x) = \frac{ax-1}{x-b}$ mit $(a, b \in \mathbb{R})$ besitzt.



a) Bestimmen Sie die Werte von a und b.

b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte des Graphen von $f_{a,b}$ mit dem Graphen der linearen Funktion k mit $k(x) = 3x - 1$.

c) Geben Sie den Term einer linearen Funktion an, deren Graph den Graphen von $f_{a,b}$ nicht schneidet.

d) Eine Funktion g hat die gleiche Form wie $f_{a,b}$ mit $a = 0$ und $b = -2$. Geben Sie $g(x)$ an und bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Funktionsgraphen von g. Geben Sie zudem die Anzahl der Nullstellen von g an.

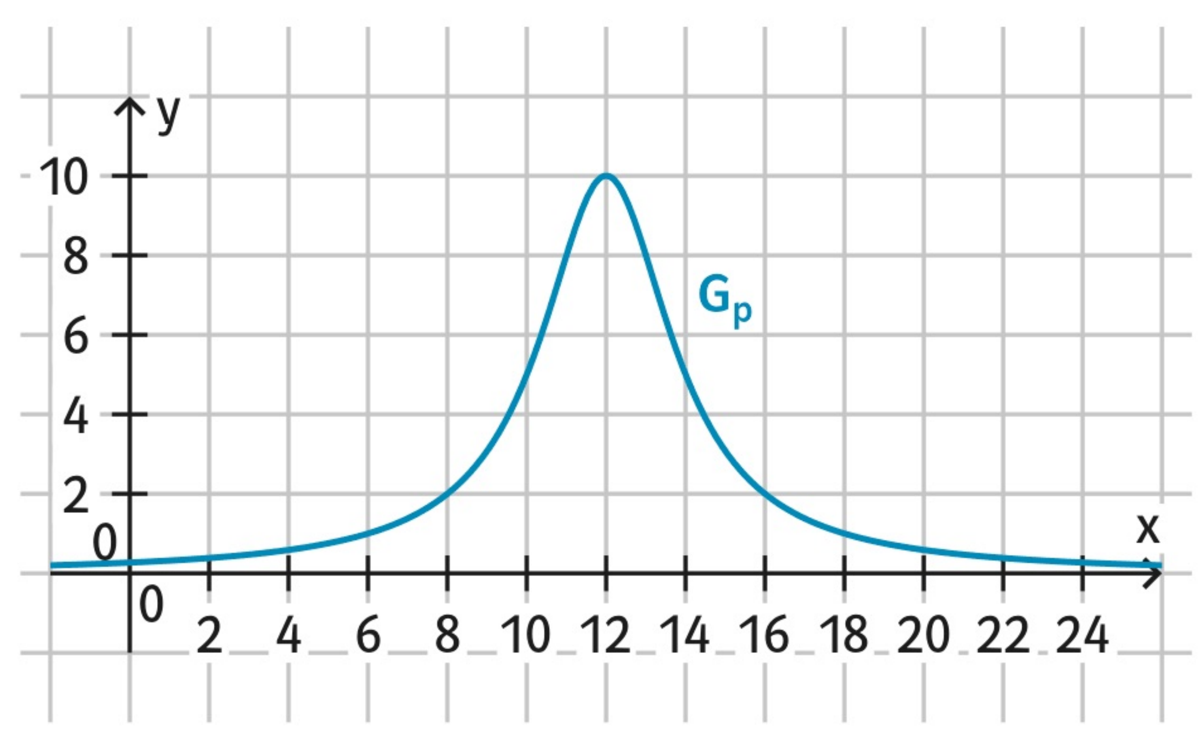
e) Die Funktion h hat den Funktionsterm $h(x) = 2x - 1 + g(x)$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_h an.

Vernetzen

16 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 3a)**

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p: x \mapsto \frac{40}{(x-12)^2+4}$; die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.

Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto \frac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.



17 **Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 2a), b), c) und d)**

Ein Motorboot fährt mit konstanter Motorleistung auf einem Fluss eine Strecke der Länge 10 km zuerst flussabwärts und unmittelbar anschließend flussaufwärts zum Ausgangspunkt zurück. Mit der Eigengeschwindigkeit des Motorboots wird der Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich das Boot bei dieser Motorleistung auf einem stehenden Gewässer bewegen würde.

Im Folgenden soll modellhaft davon ausgegangen werden, dass die Eigengeschwindigkeit des Boots während der Fahrt konstant ist und das Wasser im Fluss mit der konstanten Geschwindigkeit $5\,\frac{km}{h}$ fließt. Die für das Wendemanöver erforderliche Zeit wird vernachlässigt.

Die Gesamtfahrtzeit in Stunden, die das Boot für Hinfahrt und Rückfahrt insgesamt benötigt, wird im Modell für $x > 5$ durch den Term $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$ angegeben. Dabei ist x die Eigengeschwindigkeit des Boots in $\frac{km}{h}$.

a) Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $10\,\frac{km}{h}$ und für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $20\,\frac{km}{h}$ jeweils die Gesamtfahrtzeit in Minuten.

b) Begründen Sie, dass der erste Summand des Terms $t(x)$ die für die Hinfahrt, der zweite Summand die für die Rückfahrt erforderliche Zeit in Stunden angibt.

c) Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $t(x)$ für $0 < x < 5$ nicht als Gesamtfahrtzeit interpretiert werden kann.

d) Zeigen Sie, dass die Terme $f(x)$ und $t(x)$ äquivalent sind.
(Hinweis: Der Term $f(x)$ bezieht sich auf eine andere Abituraufgabe, in welcher $f(x) = \frac{20x}{x^2-25}$ gegeben ist.)

Hebbare Definitionslücken

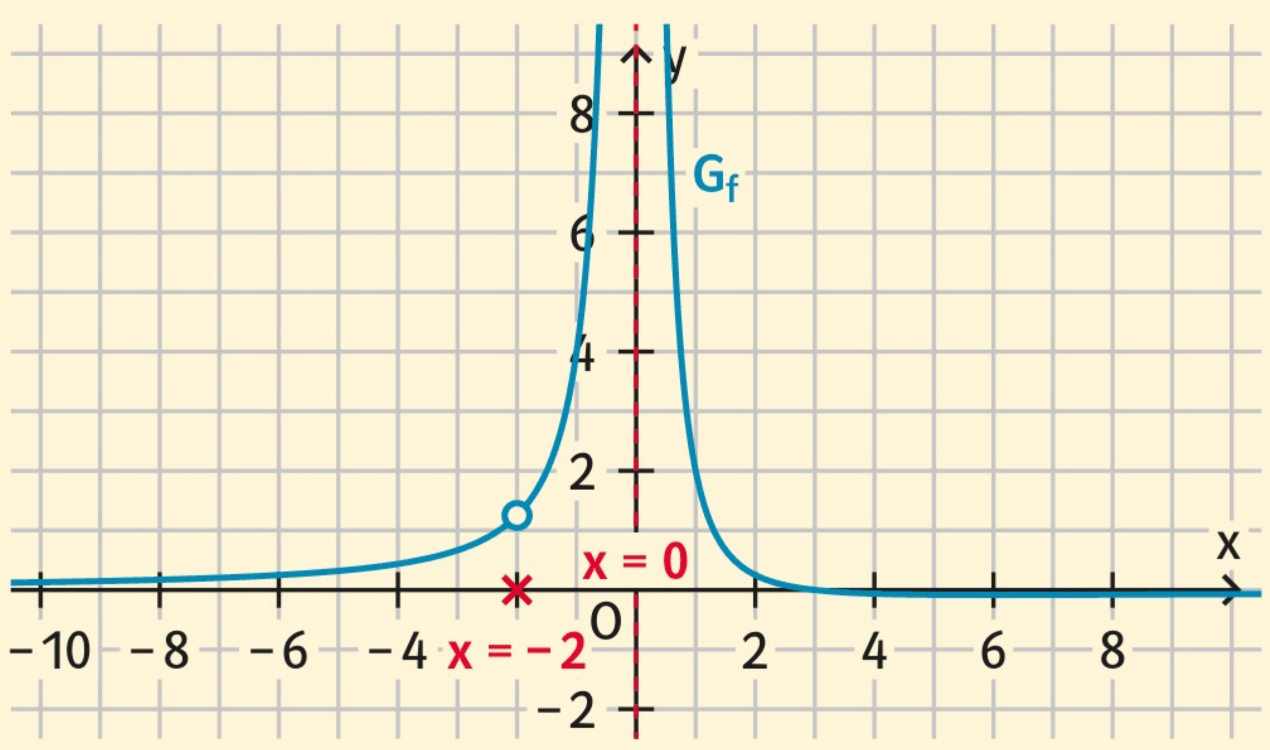
Neben den einfachen gebrochen-rationalen Funktionen, wie zum Beispiel $x \mapsto \frac{3}{x-2} + 3$ oder auch $x \mapsto \frac{4x^2 - x}{5x + 4}$, gibt es auch gebrochen-rationale Funktionen der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, deren Funktionsterme nicht in vollständig gekürzter Form gegeben sein müssen und bei denen $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, deren jeweiliger Grad auch größer als 2 sein kann:

$f\colon x \mapsto \frac{-(x-3)(x+2)}{x^2(x+2)}$ $g\colon x \mapsto \frac{7}{14x^7 - 3x^2}$ $h\colon x \mapsto \frac{4x^4 - x^2 - x + 2}{4x^3 + 2x^2 + x + 1}$ $i\colon x \mapsto \frac{(x-2)(x+2)(x-4)}{x^5}$

Sind allerdings die Terme gebrochen-rationaler Funktionen nicht vollständig gekürzt, kann es vorkommen, dass nicht jede Definitionslücke eine Polstelle ist. Ist eine Definitionslücke einer gebrochen-rationalen Funktion keine Polstelle, nennt man sie **hebbare Definitionslücke**.

Wie erkennt man eine hebbare Definitionslücke an einem Funktionsgraphen?

Am Graphen erkennt man eine hebbare Definitionslücke daran, dass er an dieser Stelle „ein Loch" hat. Das Loch entsteht dadurch, dass für die Stelle, an der das Loch vorliegt, der zugehörige Funktionswert nicht definiert ist und entsprechend die Stelle nicht in der Definitionsmenge liegt. Im Beispiel ist die Funktion an der Stelle $x = -2$ nicht definiert ($D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 0\}$).



Wie erkennt man eine hebbare Definitionslücke an einem Funktionsterm?

Eine gebrochen-rationale Funktion hat eine mögliche hebbare Definitionslücke, wenn das Zähler- und Nennerpolynom des Funktionsterms die gleiche Nullstelle x_0 aufweisen. Kann der Funktionsterm so gekürzt werden, dass x_0 keine Nullstelle des Nenners ist, so liegt tatsächlich eine hebbare Definitionslücke vor. Es gilt dann $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{-(x-3)(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{p(x)}{q(x)}$

$p(x) = -(x-3)(x+2) \Rightarrow p(-2) = 0$

$q(x) = x^2(x+2) \Rightarrow p(-2) = 0$

Mögliche hebbare Definitionslücke: $x_0 = -2$.

Wegen $\frac{-(x-3)(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{-(x-3)}{x^2}$ für alle $x \in D$ gilt $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1{,}25$. Somit ist $x_0 = -2$ eine hebbare Definitionslücke.

Hinweis:
Gilt $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a$ und $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = a$, schreibt man auch zusammenfassend $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Definition: Ist x_0 eine Definitionslücke einer Funktion f und gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$, dann ist x_0 eine **hebbare Definitionslücke** von f.

Vorgehensweise zur Untersuchung von hebbaren Definitionslücken einer Funktion der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$:

1. Bestimmen der Nullstellen von p.
2. Bestimmen der Nullstellen von q.
3. Falls p und q eine gleiche Nullstelle x_h haben, liegt eventuell eine hebbare Definitionslücke vor.
4. Faktorisieren von $p(x)$ und $q(x)$ und anschließendes Kürzen des Bruchs.
5. Einsetzen von x_h in den neuen Nenner. Ist x_h nun keine Nullstelle des Nenners mehr, ist x_h eine hebbare Definitionslücke der Funktion.

Liegt bei einer Funktion f eine hebbare Definitionslücke x_0 vor, dann kann die Funktion f an der Stelle x_0 **stetig fortgesetzt** werden. Es entsteht eine neue Funktion f_0 mit einer anderen Definitionsmenge.

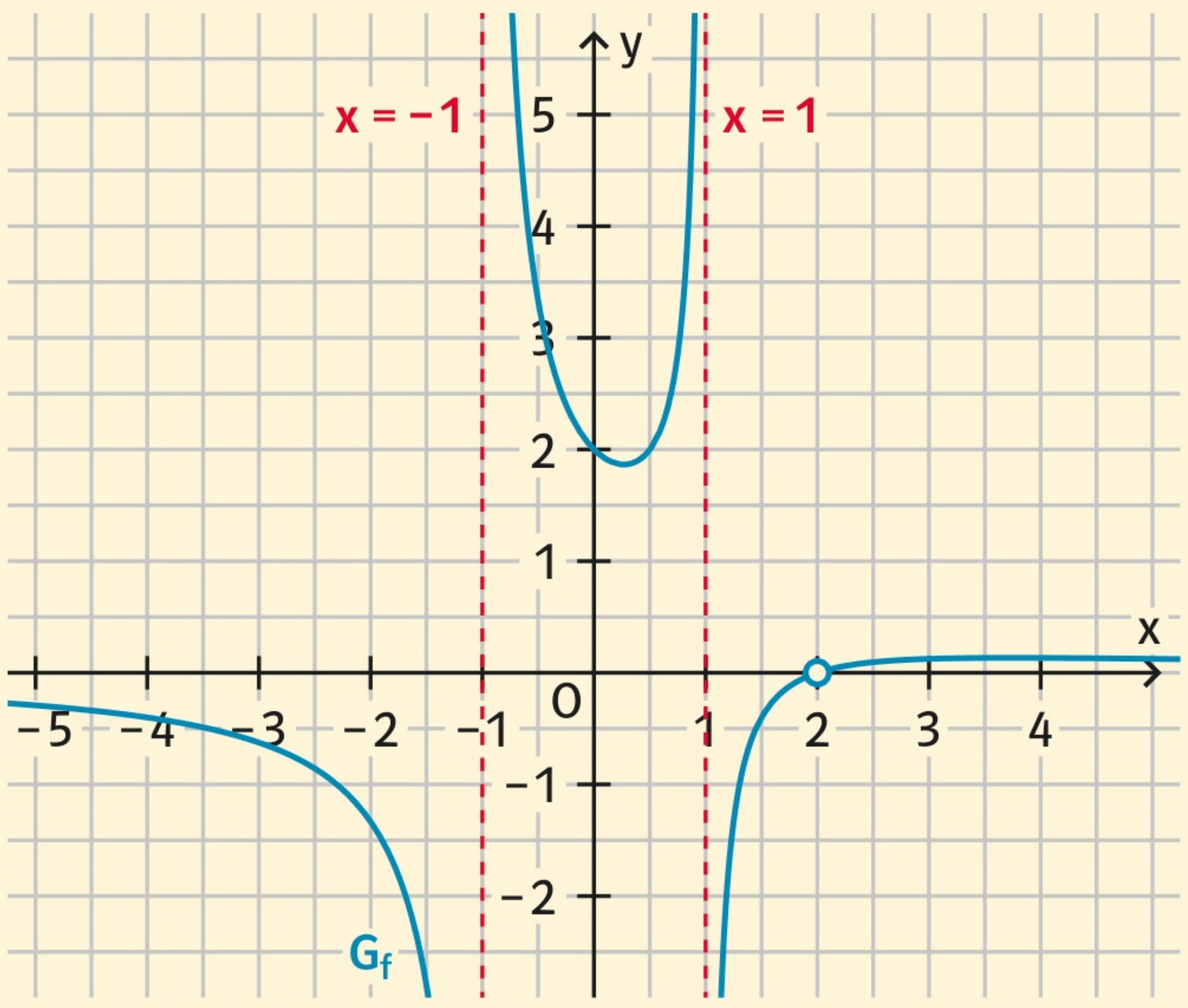
Der Punkt $(x_0 | f_0(x_0))$ gehört zum Graphen von f_0, aber nicht zum Graphen von f.

Dies wird an folgendem Beispiel verdeutlicht.

Funktionsterm von f:

$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{(x - 2)(x^2 - 1)} = \frac{(x - 2)^2}{(x - 2)(x^2 - 1)}$

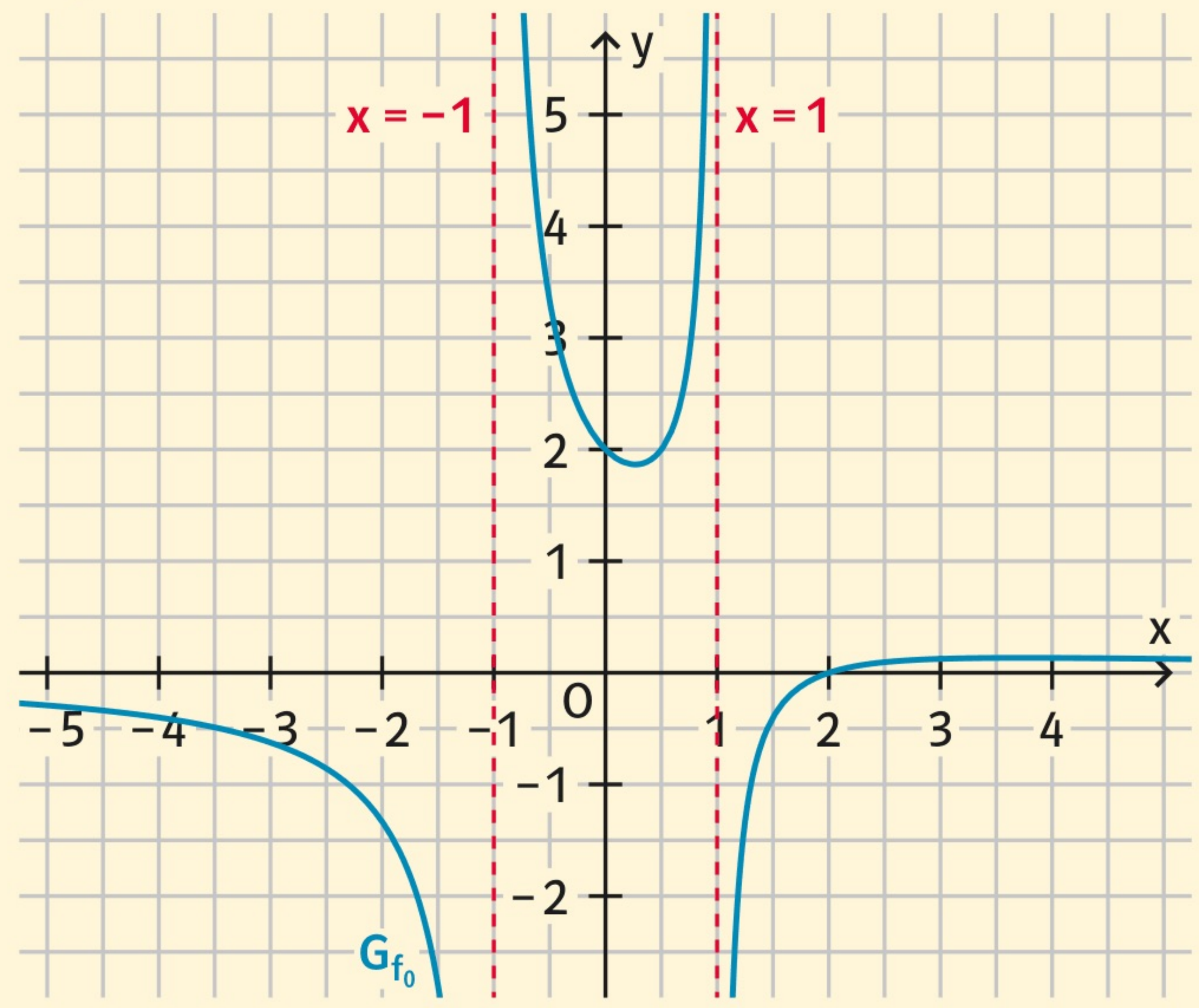
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1; 2\}$



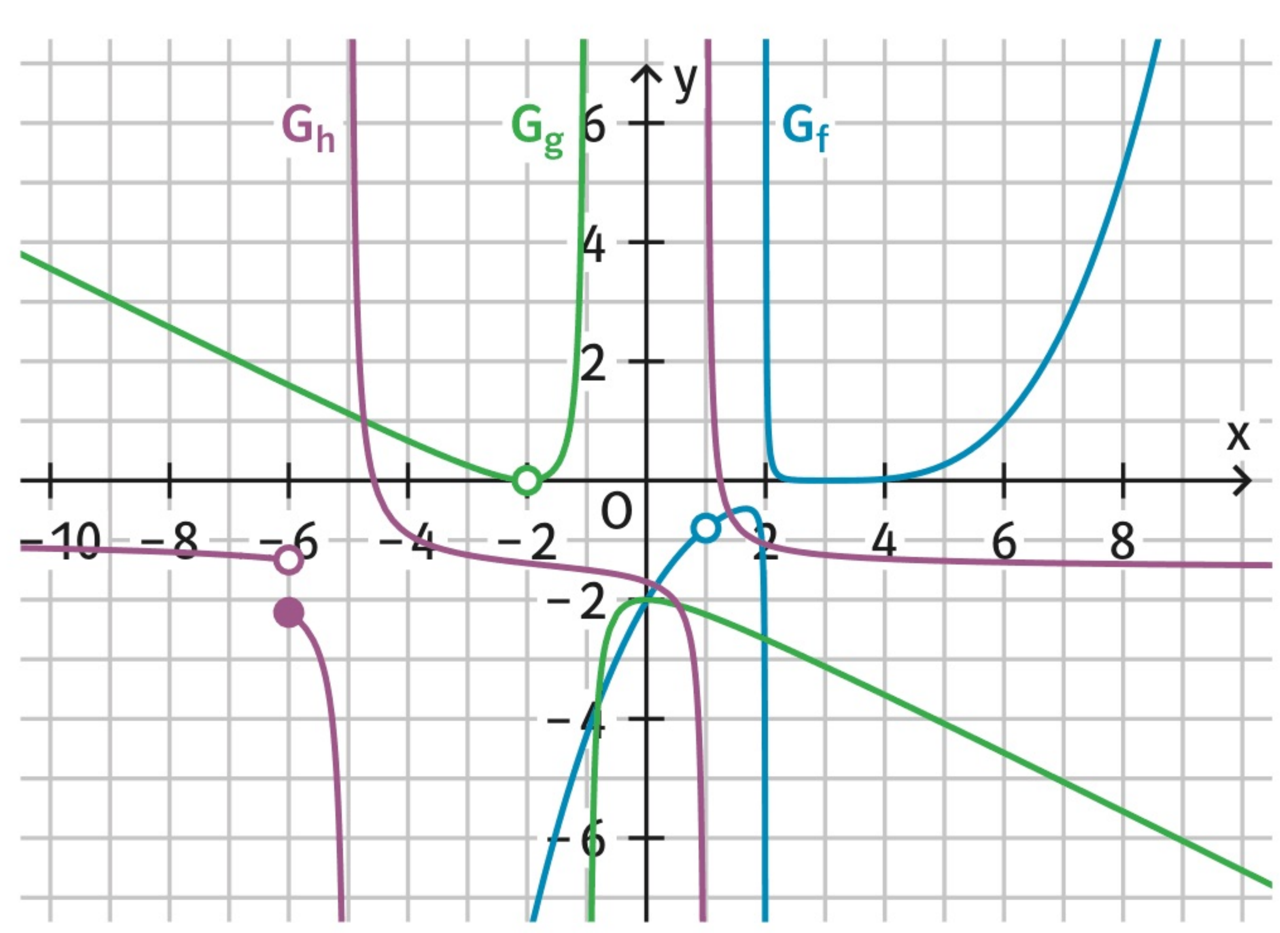
Funktionsterm der stetig fortgesetzten Funktion f_0:

$f_0(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 1}$

$D_{f_0} = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$



1 Welche der abgebildeten Graphen stellen Funktionen mit hebbaren Definitionslücken dar? Begründen Sie Ihre Antwort.



2 Zeichnen Sie den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion, die

a) die hebbare Definitionslücke $x = 3$ hat,

b) die Polstelle $x = -2$ und die hebbare Definitionslücke $x = 1$ hat,

c) die Polstellen $x = -2$ und $x = 2$ sowie die hebbare Definitionslücke $x = 1$ hat.

3 Gegeben sind die Funktionen f, g, h und i. Ermitteln Sie jeweils die Definitionslücken und ihre Art.

$f\colon x \mapsto \frac{(x - 3)(x - 2)(x - 1)}{(x - 4)(x - 3)}$ $g\colon x \mapsto \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 3)(x + 3)}$ $h\colon x \mapsto \frac{(x^2 - 4x)(x + 3)}{x(x^2 + 4)(x - 3)}$ $i\colon x \mapsto \frac{x^3 + 10x^2 + 50}{x^2 + 5x}$

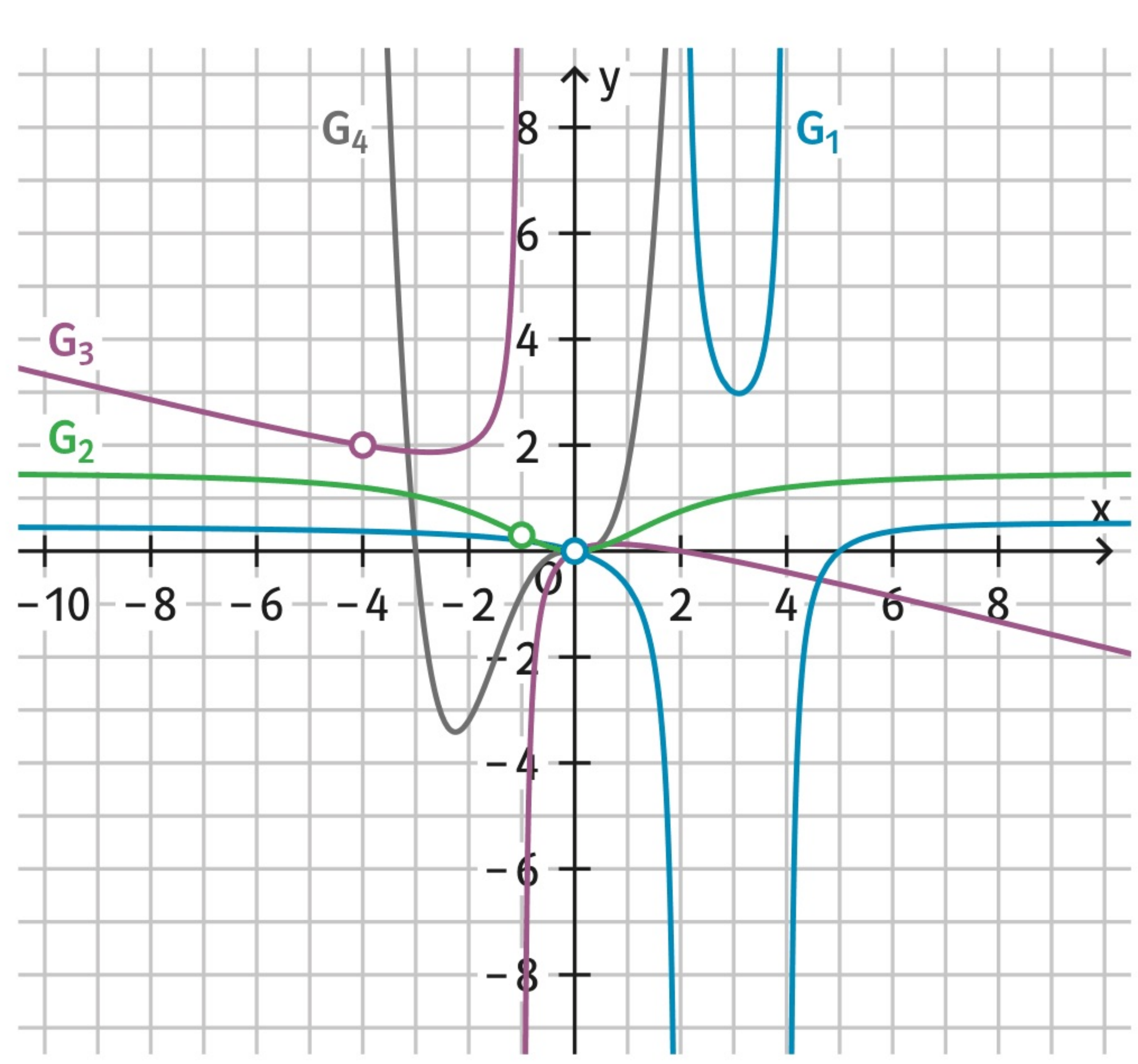
4 Gegeben sind die Funktionsterme der stetig fortsetzbaren Funktionen f, g, h und i.

a) Ordnen Sie jeder Funktion einen passenden Graphen zu. Begründen Sie dies mithilfe wesentlicher Eigenschaften der Funktionen.

b) Ermitteln Sie mithilfe der Funktionsterme alle hebbaren Definitionslücken der Funktionen f, g, h und i.

$f\colon x \mapsto \frac{0{,}4x^5 + 0{,}2x^4 - 3x^3}{x - 2{,}5}$ $g\colon x \mapsto \frac{(-0{,}25x^2 + 0{,}5x)(x + 4)}{x^2 + 5x + 4}$

$h\colon x \mapsto \frac{0{,}5x^3 - 2{,}5x^2}{x^3 - 6x^2 + 8x}$ $i\colon x \mapsto \frac{1{,}5x^3 + 1{,}5x^2}{(x^2 + 4)(x + 1)}$



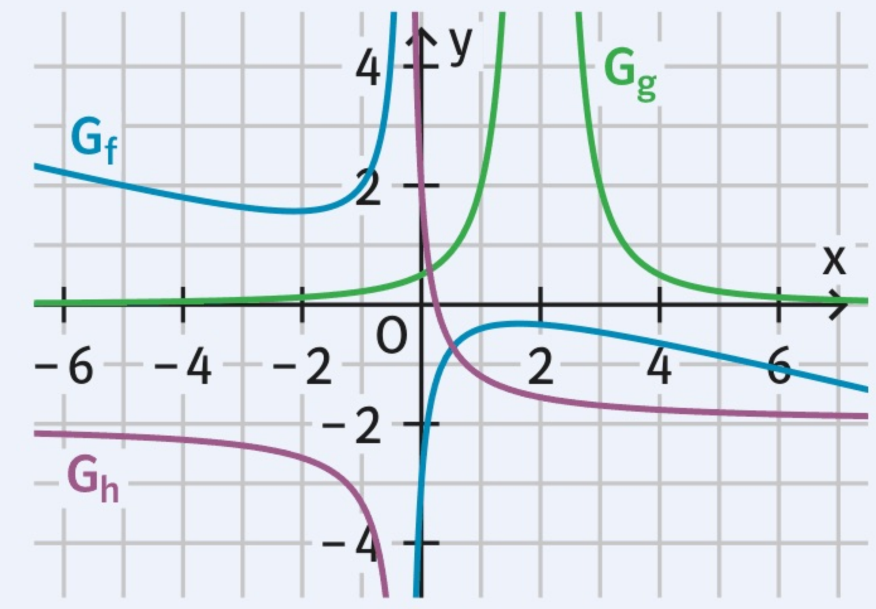
Gebrochen-rationale Funktion

Eine Funktion heißt **gebrochen-rational**, wenn man sie in der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ darstellen kann, wobei p(x) und q(x) Polynome sind und q(x) mindestens vom Grad 1 ist.
Die Nullstellen der Funktion lassen sich durch Lösen der Gleichung $p(x) = 0$ und die Definitionsmenge D mithilfe der Gleichung $q(x) = 0$ bestimmen.

$f\colon x \mapsto -\frac{x^2-2x+3}{4x+1}$

$g\colon x \mapsto \frac{2}{(x-2)^2}$

$h\colon x \mapsto \frac{4}{4x+1} - 2$



Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

Ist p(x) ein Polynom vom Grad z, q(x) ein Polynom vom Grad n und $f\colon x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochen-rationale Funktion mit Graph G_f, dann gilt:

- Ist **z < n**, **konvergiert** f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0 und G_f hat die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.
- Ist **z = n**, **konvergiert** f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen einen festen Wert $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und G_f hat die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = c$.
- Ist **z = n + 1**, **divergiert** f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ und G_f hat eine schräge Asymptote mit der Gleichung $y = mx + t$.

$f\colon x \mapsto \frac{6}{0{,}5x^2 - 2x}$

$g\colon x \mapsto \frac{2x^2-4x+6}{4x^2+3}$

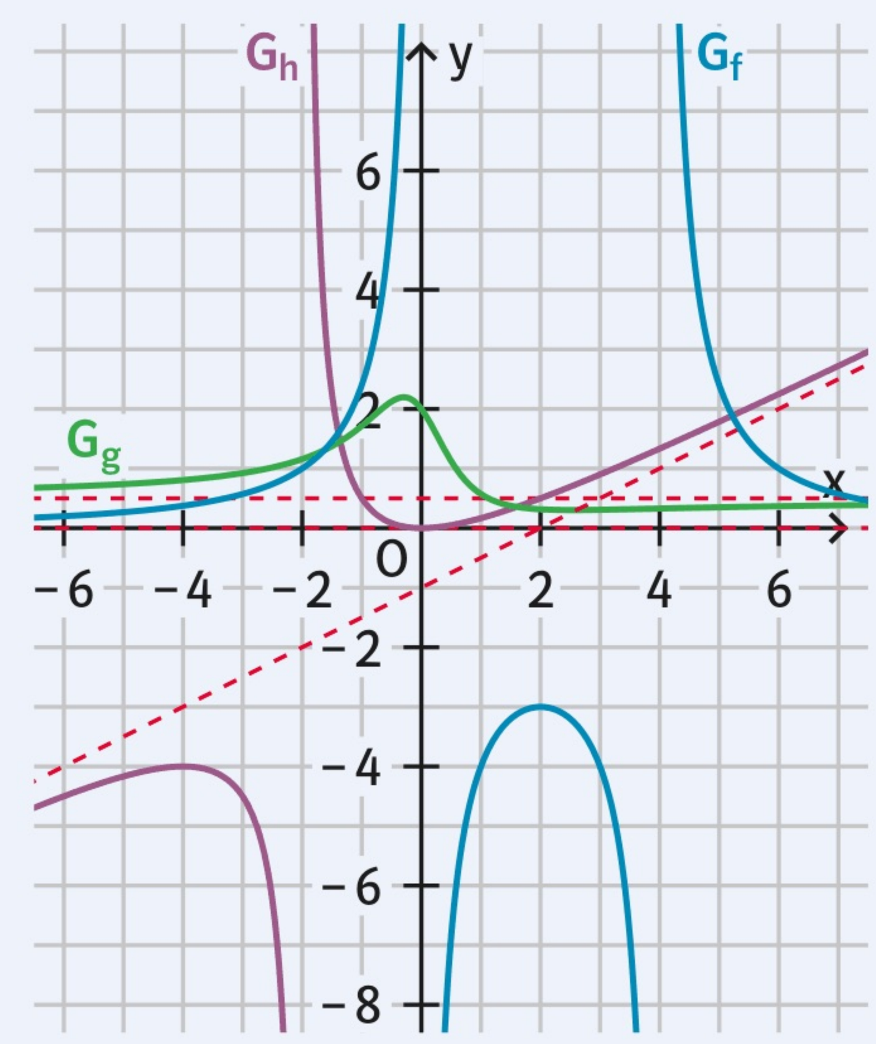
$h\colon x \mapsto \frac{0{,}5x^2}{x+2}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{6}{0{,}5x^2-2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2-4x+6}{4x^2+3} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{0{,}5x^2}{x+2} = +\infty$ und

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{0{,}5x^2}{x+2} = -\infty$



Verhalten für $x \to x_0$ und Polstellen

Wenn für eine Definitionslücke x_0 einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Graph G_f

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ und

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$

gilt, dann nennt man x_0 eine **Polstelle von f** und die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ist senkrechte Asymptote von G_f.

$f\colon x \mapsto \frac{x^2}{(x+3)(x-2)}$

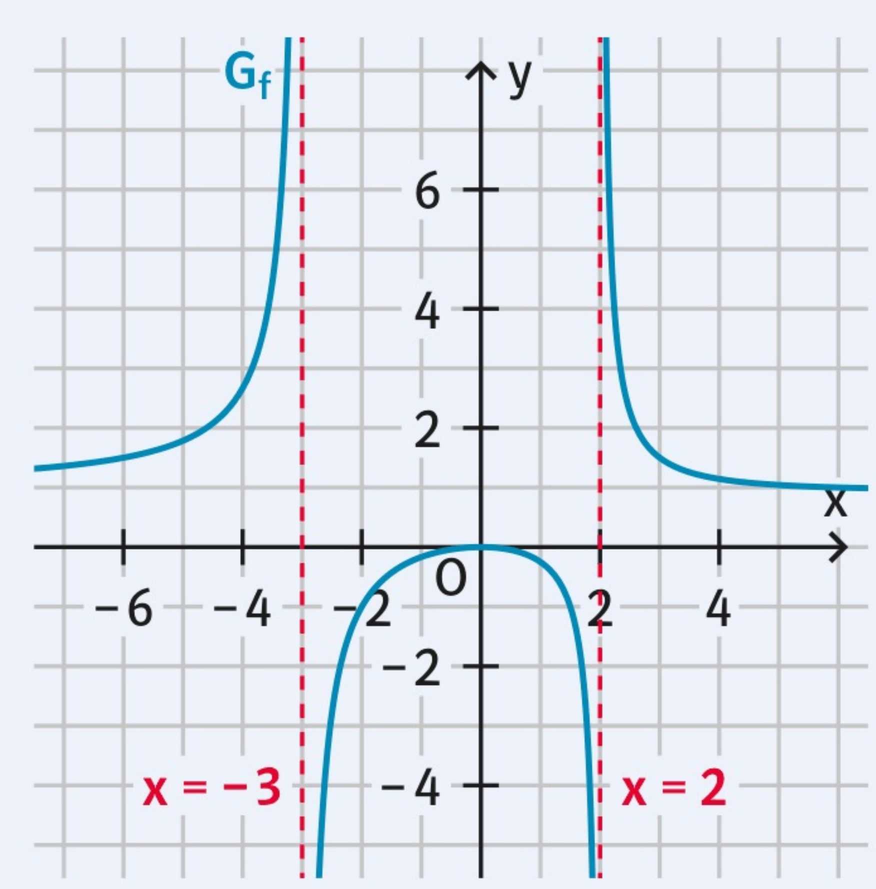
mit $D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 2\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = +\infty$



Eigenschaften einer gebrochen-rationalen Funktion f und ihres Funktionsgraphen G_f

Mithilfe des Funktionsterms können ermittelt werden:

- Definitionsmenge von f
- Symmetrieeigenschaften von G_f
- Nullstellen von f mit ihrer Vielfachheit
- Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge
- Gleichungen der Asymptoten von G_f

$f\colon x \mapsto \frac{10x}{x^2+4};\ D = \mathbb{R}$

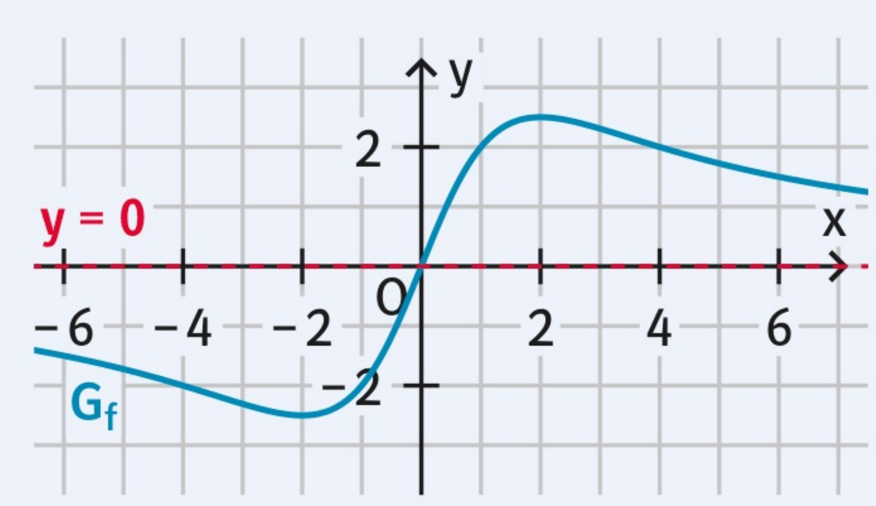
$f(-x) = \frac{-10x}{(-x)^2+4} = -f(x)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$S_y = (0\,|\,0)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{10x}{x^2+4} = 0$

Gleichung der Asymptote: $y = 0$



Bestimmung der Koordinaten von Schnittpunkten zweier Funktionsgraphen G_f und G_g

1. Gleichsetzen der Funktionsterme: $f(x) = g(x)$.
2. Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$.
3. Einsetzen der x-Koordinate eines Schnittpunktes in einen der beiden Funktionsterme und Berechnen der y-Koordinate dieses Schnittpunktes.

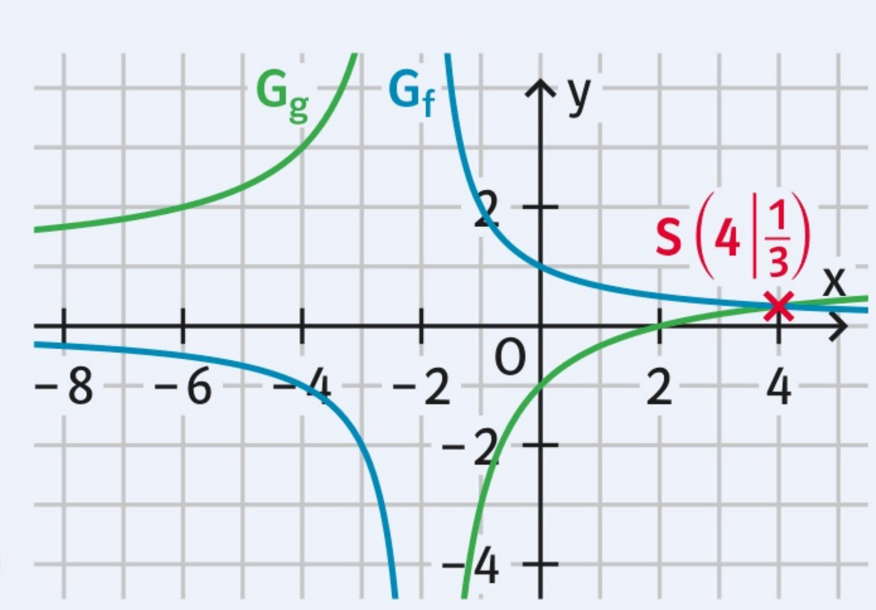
$f(x) = \frac{2}{x+2},\ g(x) = \frac{x-2}{x+2}$

$\frac{2}{x+2} = \frac{x-2}{x+2}$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2} = 1 \pm 3$

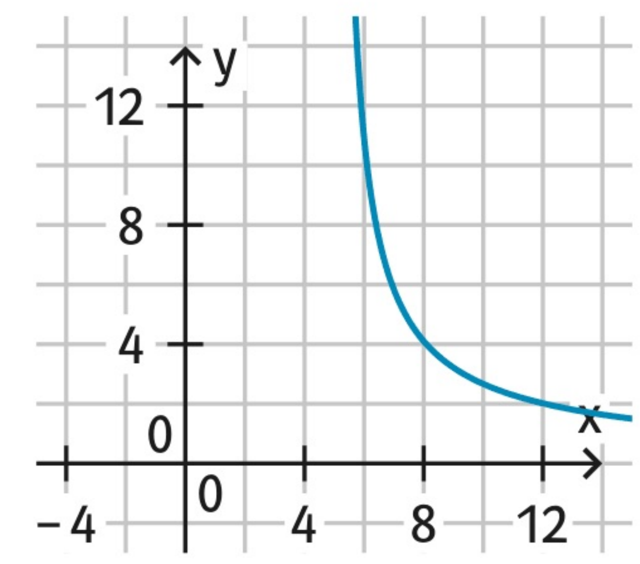
$S\left(4\,\middle|\,\frac{1}{3}\right)$ $(D_f = D_g = \mathbb{R}\setminus\{-2\})$



Lösungen | Seite 204

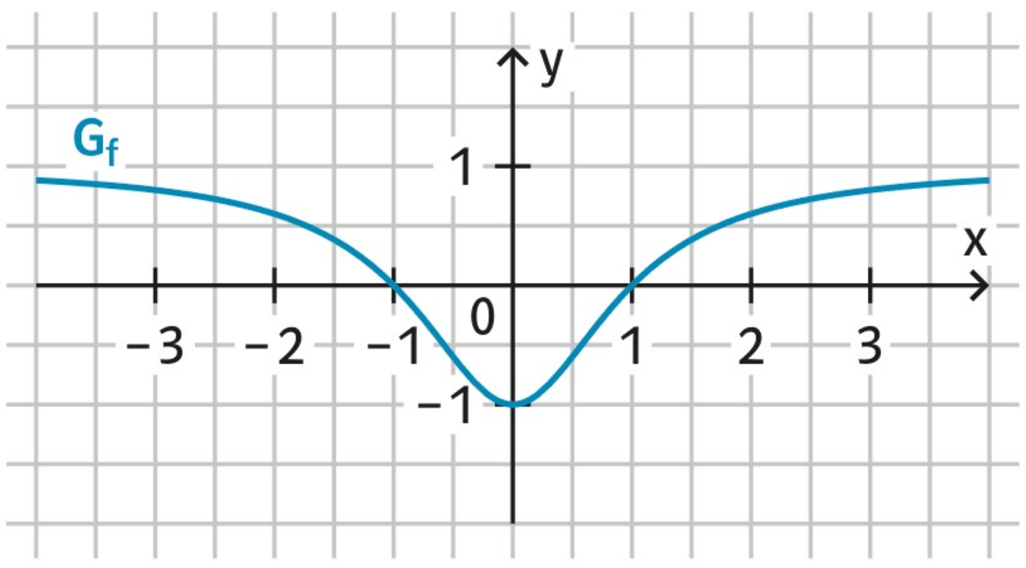
1 **Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 1a)**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{20x}{x^2 - 25}$ und maximalem Definitionsbereich D_f. Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen G_f von f. Zeigen Sie, dass $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5; 5\}$ gilt und dass G_f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Geben Sie die Nullstelle von f sowie die Gleichungen der drei Asymptoten von G_f an.



2 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 1a)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f.
Bestätigen Sie rechnerisch, dass G_f symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, und untersuchen Sie anhand des Funktionsterms das Verhalten von f für $x \to +\infty$.
Bestimmen Sie diejenigen x-Werte, für die $f(x) = 0{,}96$ gilt.



3 Die gebrochen-rationale Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle und an der Stelle $x = -4$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Außerdem hat ihr Funktionsgraph G_f die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als Asymptote. Geben Sie einen möglichen Term von f an.

4 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{x^2}{x - 1}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.

b) Zeigen Sie, dass der Term $x + 1 + \frac{1}{x - 1}$ eine andere Darstellung von $f(x)$ ist.

c) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. Geben Sie die Polstelle von f an und bestimmen Sie ihre Art.

d) Der Graph G_f berührt an der Stelle $x = 2$ die Gerade mit der Gleichung $y = 4$. Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Erkenntnisse und geben Sie die Wertemenge von f an.

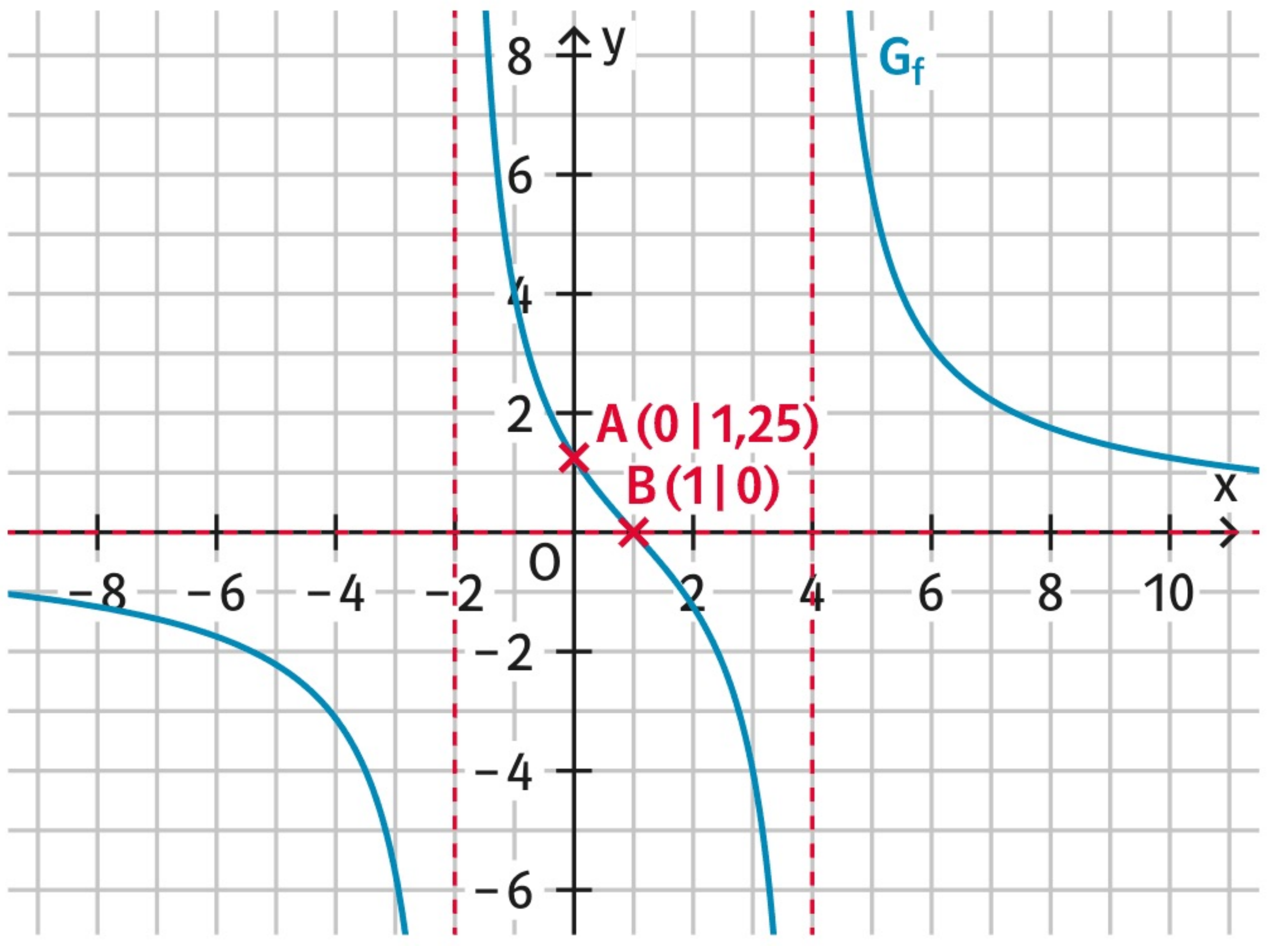
e) Beschreiben Sie das Symmetrieverhalten von G_f.

5 Abgebildet ist der Graph G_f der Funktion f.

a) Geben Sie die Definitions- und die Wertemenge von f an.

b) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

c) Ermitteln Sie einen möglichen Term von f.



6 Zeigen Sie, dass die Funktion h die gegebene Wertemenge hat.

a) $h\colon x \mapsto \frac{-5x}{(x - 3)(x + 5)}$; $W = \mathbb{R}$

b) $h\colon x \mapsto \frac{4x^2}{x^2 + 4}$; $W = [0; 4[$

7 Gegeben sind für $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktionen g und h mit $g_b(x) = 2x + b$ und $h_{a,b}(x) = \frac{6x + 9 - 2a}{2x + b}$. Ihre Graphen werden mit G_b und $G_{a,b}$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von g_b und $h_{a,b}$ in Abhängigkeit von a und b.

b) Es wird $a = b = 1$ festgelegt. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_b und $G_{a,b}$. Erklären Sie deren Bedeutung für die Funktion $f_{a,b}$ mit $f_{a,b}(x) = g_b(x) - h_{a,b}(x)$.

c) Bestimmen Sie für $b = 3$ einen Wert für a so, dass G_3 und $G_{a,3}$ genau einen Punkt gemeinsam haben.

III Bedingte Wahrscheinlichkeit





Das können Sie schon

- Mit Brüchen, Dezimalzahlen und Prozentzahlen rechnen
- Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten angeben
- Vierfeldertafeln zur Veranschaulichung von verknüpften Ereignissen nutzen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Baumdiagrammen berechnen

Test

Check-in
zu Kapitel III
Seite 192



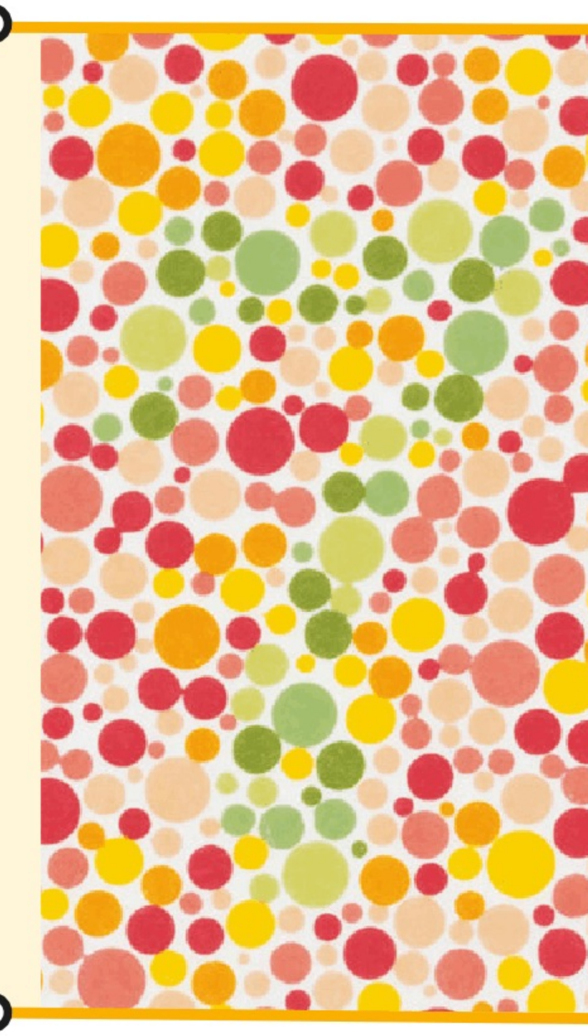
Das können Sie bald

- Bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten von anderen Wahrscheinlichkeiten unterscheiden
- Ereignisse rechnerisch auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen
- Stochastisch unabhängige Ereignisse anhand ihrer Darstellung in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen erkennen

1 Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$

Manche Menschen haben Schwierigkeiten, die Farben Rot und Grün zu unterscheiden, was auch als Rotgrünsehschwäche (RGS) bezeichnet wird. Die Vierfeldertafel beschreibt die Verteilung dieser Farbenfehlsichtigkeit unter 1000 Personen.

	Keine RGS	RGS
Männer	460	40
Frauen	498	2



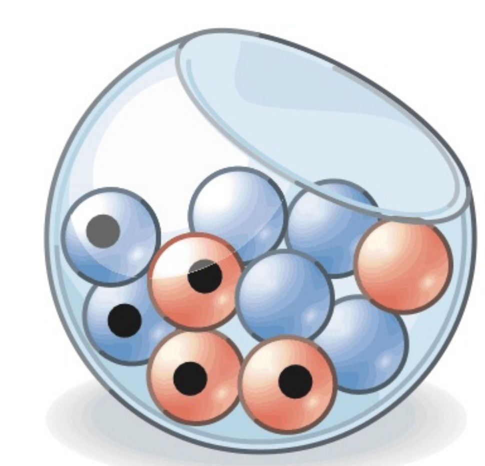
a) Eine Person wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgesuchte Person unter Rotgrünsehschwäche leidet.

b) Nun wird eine Frau zufällig ausgewählt. Beurteilen Sie, ob sich jetzt ein anderer Wert für die Wahrscheinlichkeit dafür ergibt, dass die ausgesuchte Frau unter Rotgrünsehschwäche leidet.

Es gibt Situationen, in denen Vorinformationen die Einschätzung der Lage beeinflussen. Dies lässt sich an folgendem Beispiel veranschaulichen.

Eine Urne enthält zehn Kugeln, die zwei verschiedene Merkmale besitzen. Vier der Kugeln sind rot. Drei davon sind zusätzlich mit einem Punkt markiert. Sechs Kugeln sind blau, von denen zwei mit einem Punkt markiert sind.

	M	$\overline{M}$	
R	3	1	4
$\overline{R}$	2	4	6
	5	5	10

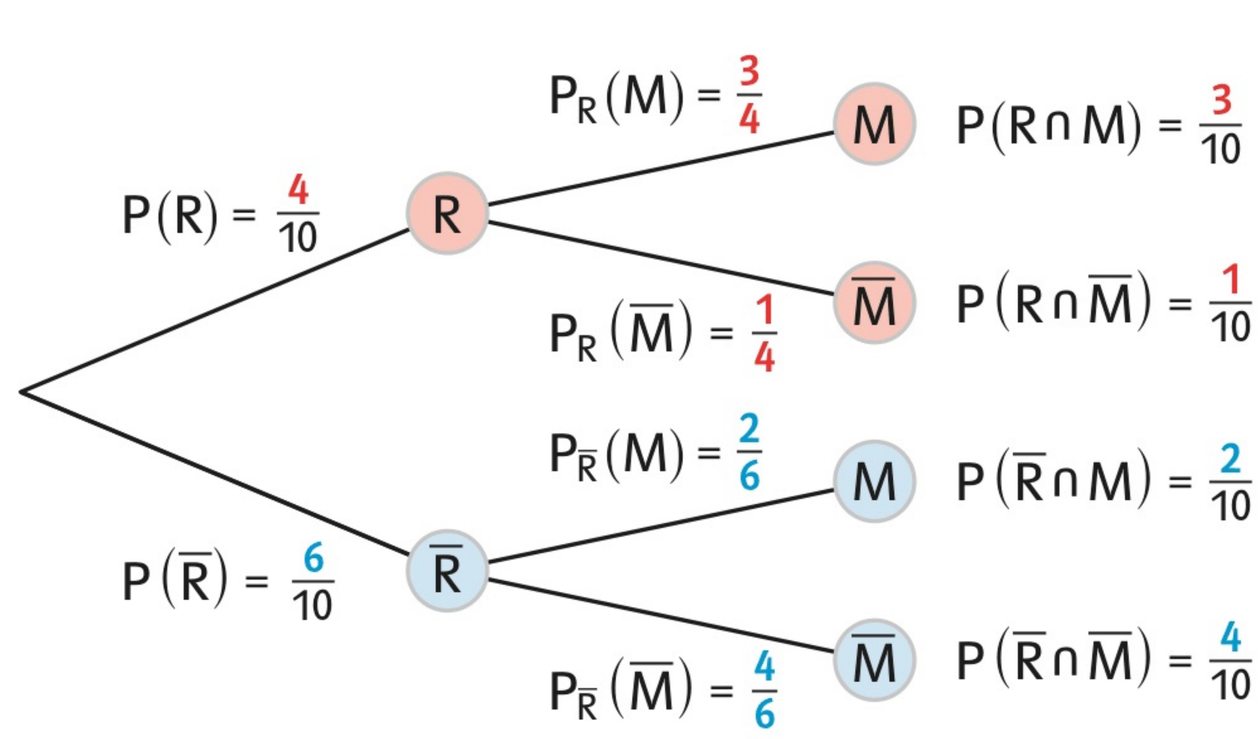


Eine der Kugeln wird zufällig gezogen. Es werden die Ereignisse R: „Die Kugel ist rot“ und M: „Die Kugel ist mit einem Punkt markiert“ betrachtet.
Für die Wahrscheinlichkeit dafür, eine markierte Kugel zu ziehen, gilt $P(M) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

Wenn man aber schon die Vorinformation besitzt, dass die gezogene Kugel rot ist, dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, eine markierte Kugel zu ziehen, mithilfe der ersten Zeile der Vierfeldertafel. Da unter den vier roten Kugeln drei markiert sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel markiert ist, nun $\frac{3}{4} = 75\,\%$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel markiert ist (Ereignis M) unter der Bedingung, dass eine rote Kugel gezogen wurde (Ereignis R), wird als **bedingte Wahrscheinlichkeit $P_R(M)$** bezeichnet.

Ebenso können die Wahrscheinlichkeiten von M bzw. $\overline{M}$, falls die Farbe bekannt ist, bestimmt werden: $P_R(\overline{M}) = \frac{1}{4}$, $P_{\overline{R}}(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P_{\overline{R}}(\overline{M}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Deutet man die Vorinformation über die Farbe als ein Ereignis, das bereits eingetreten ist, so kann man das Ziehen der Kugel aus der Urne als zweistufiges Zufallsexperiment mit dem Ereignis R auf der 1. Stufe und dem Ereignis M auf der 2. Stufe auffassen.
An den Ästen der 1. Stufe stehen die Wahrscheinlichkeiten $P(R) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ und $P(\overline{R}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. An den Ästen der 2. Stufe stehen die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eine markierte bzw. nicht markierte Kugel gezogen wird unter der Bedingung, dass die Kugel rot oder nicht rot ist. Die Wahrscheinlichkeiten am Ende des Baumdiagramms ergeben sich aus der Vierfeldertafel oder aus der 1. Pfadregel.

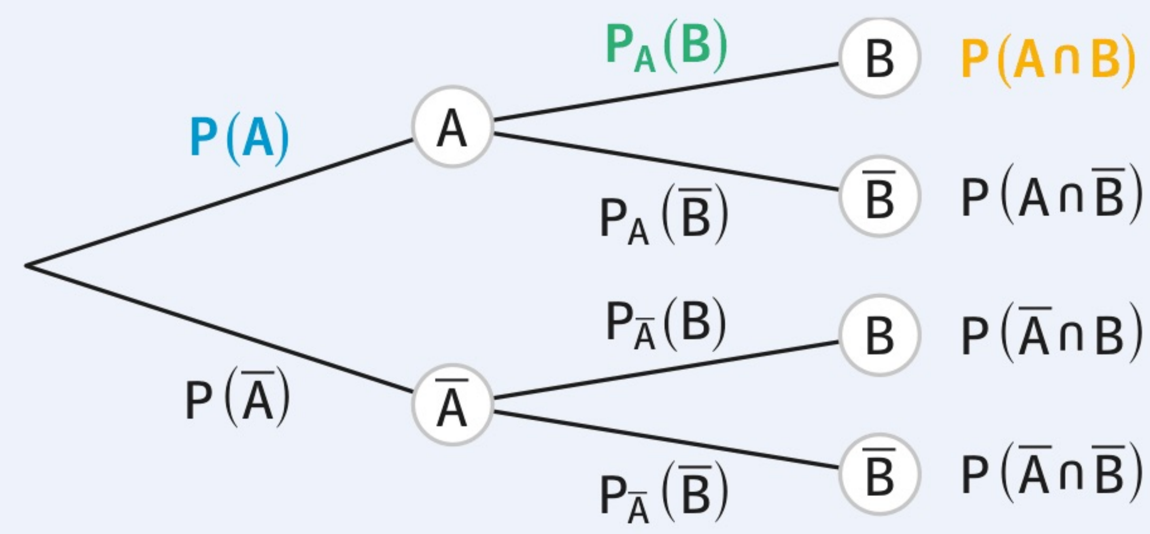


Zur Erinnerung:
„$A \cap B$“ bedeutet „A und B“.
„$A \cup B$“ bedeutet „A oder B oder beides“.

Nach der 1. Pfadregel gilt $P(R) \cdot P_R(M) = P(R \cap M)$.
Demzufolge gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_R(M) = \frac{P(R \cap M)}{P(R)}$.

Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$, so versteht man unter der bedingten **Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$** die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist.

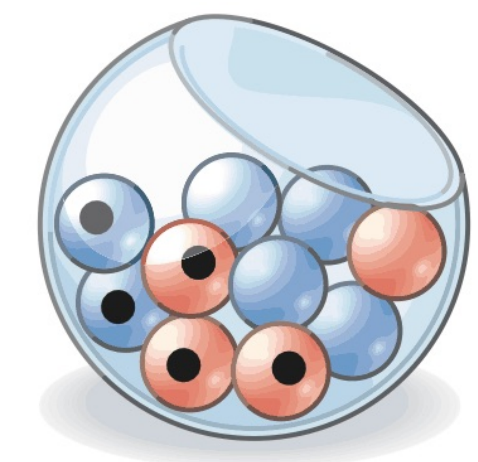
Es gilt $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.



$P_A(B)$: „Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A"

Wenn die Vierfeldertafel des Urnenexperiments Wahrscheinlichkeiten enthält, lassen sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten ebenfalls als Quotienten aus dem Eintrag einer inneren Zelle und dem einer Randzelle bestimmen.

	M	$\overline{M}$	
R	$P(R \cap M) = \frac{3}{10}$	$P(R \cap \overline{M}) = \frac{1}{10}$	$P(R) = \frac{4}{10}$
$\overline{R}$	$P(\overline{R} \cap M) = \frac{2}{10}$	$P(\overline{R} \cap \overline{M}) = \frac{4}{10}$	$P(\overline{R}) = \frac{6}{10}$
	$P(M) = \frac{5}{10}$	$P(\overline{M}) = \frac{5}{10}$	1



Es ergibt sich: $P_R(M) = \frac{P(R \cap M)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$, $\quad P_R(\overline{M}) = \frac{P(R \cap \overline{M})}{P(R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}$,

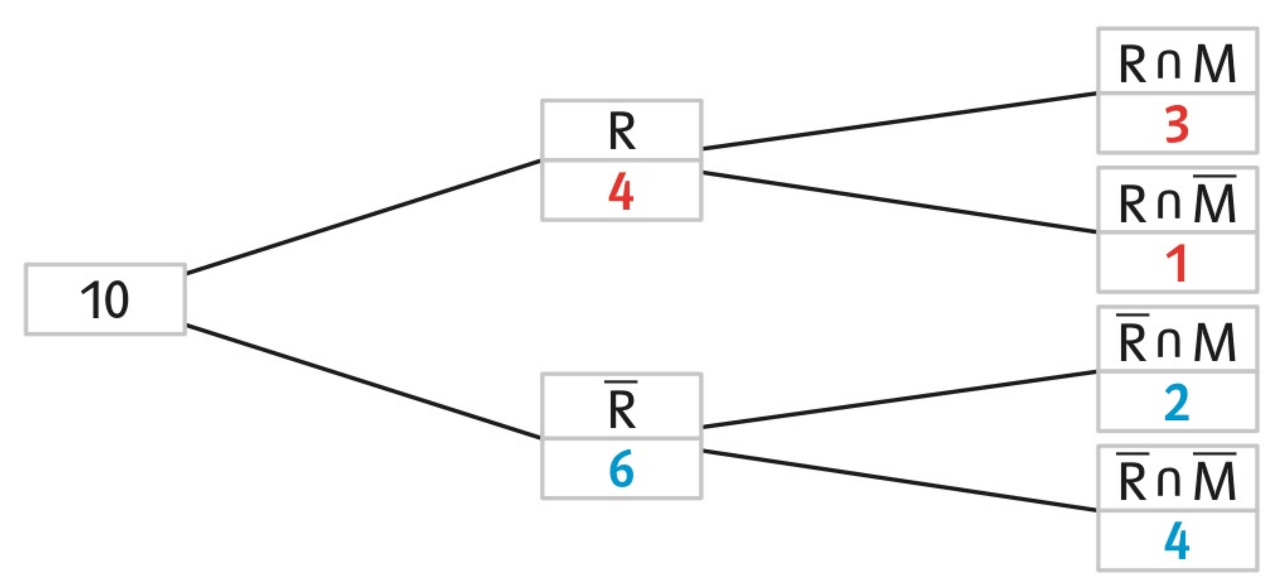
$P_{\overline{R}}(M) = \frac{P(\overline{R} \cap M)}{P(\overline{R})} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\quad P_{\overline{R}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{R} \cap \overline{M})}{P(\overline{R})} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten

Vierfeldertafeln können absolute oder relative Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten enthalten. Ebenso können auch Baumdiagramme absolute Häufigkeiten enthalten. Unter einer absoluten Häufigkeit versteht man hier die Anzahl der Objekte, die ein bestimmtes Merkmal besitzen. So ergeben sich für das Urnenexperiment die folgende Vierfeldertafel und das folgende Baumdiagramm:

Der Begriff absolute Häufigkeit bezeichnet auch, wie oft ein Ereignis bei mehrfacher Wiederholung eines Zufallsexperiments eintritt.

	M	$\overline{M}$	
R	$\lvert R \cap M \rvert = 3$	$\lvert R \cap \overline{M} \rvert = 1$	$\lvert R \rvert = 4$
$\overline{R}$	$\lvert \overline{R} \cap M \rvert = 2$	$\lvert \overline{R} \cap \overline{M} \rvert = 4$	$\lvert \overline{R} \rvert = 6$
	$\lvert M \rvert = 5$	$\lvert \overline{M} \rvert = 5$	$\lvert \Omega \rvert = 10$



Auch aus dem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten können bedingte Wahrscheinlichkeiten direkt berechnet werden:

$P_R(M) = \frac{\lvert R \cap M \rvert}{\lvert R \rvert} = \frac{3}{4}$, $\quad P_R(\overline{M}) = \frac{\lvert R \cap \overline{M} \rvert}{\lvert R \rvert} = \frac{1}{4}$, $\quad P_{\overline{R}}(M) = \frac{\lvert \overline{R} \cap M \rvert}{\lvert \overline{R} \rvert} = \frac{2}{6}$, $\quad P_{\overline{R}}(\overline{M}) = \frac{\lvert \overline{R} \cap \overline{M} \rvert}{\lvert \overline{R} \rvert} = \frac{4}{6}$.

Beachten Sie:

Bei zwei Ereignissen A und B muss sorgfältig zwischen der Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge $P(A \cap B)$ und den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_B(A)$ unterschieden werden.
Sind beispielsweise in einer Gruppe von Schülern Sportler (S) sowie Gamer (G), dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Schüler Gamer ist, der auch Sport treibt, die Wahrscheinlichkeit einer Schnittmenge, nämlich $P(G \cap S)$.
Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Sportler Gamer ist, eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich $P_S(G)$.

Weitere typische Formulierungen für

die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_S(G)$:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter
- Schüler, der Sportler ist, Gamer ist,
- Schüler Gamer ist, obwohl er Sportler ist,
- Schüler Gamer ist, wenn bekannt ist, dass er Sportler ist,
- Schüler Gamer ist, wenn er Sportler ist.

die Wahrscheinlichkeit $P(G \cap S)$:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter
- Schüler ein Gamer ist, der auch Sportler ist,
- Schüler Gamer und Sportler ist,
- Schüler Sportler und Gamer ist,
- Schüler ein Sport treibender Gamer ist.

Beispiel 1

E und F sind Ereignisse eines Zufallsexperiments. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_E(F)$ und $P_F(E)$.

	E	$\overline{E}$	
F	25 %	5 %	30 %
$\overline{F}$	35 %	35 %	70 %
	60 %	40 %	100 %

Lösung

$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{25\,\%}{60\,\%} = \frac{5}{12}$

$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{25\,\%}{30\,\%} = \frac{5}{6}$

Beispiel 2

Bei der Herstellung eines elektronischen Bauteils sind erfahrungsgemäß von 10 000 Bauteilen etwa 200 defekt. Die Bauteile werden bei einer Qualitätskontrolle geprüft. Dabei werden defekte Bauteile mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % beanstandet. Ein funktionierendes Bauteil wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97 % nicht beanstandet.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einer Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten dar.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes

(1) Bauteil nicht beanstandet wird, (2) defektes Bauteil nicht beanstandet wird.

Lösung

a) D: „Das Bauteil ist defekt."
B: „Das Bauteil wird beanstandet."

$|D \cap B| = 99\,\%$ von 200
$= 0{,}99 \cdot 200 = 198$

$|\overline{D} \cap \overline{B}| = 97\,\%$ von 9800
$= 0{,}97 \cdot 9800 = 9506$

	B	$\overline{B}$	
D	198	**2**	200
$\overline{D}$	**294**	9506	**9800**
	492	**9508**	10 000

b) (1) $P(\overline{B}) = \frac{9508}{10\,000} = 95{,}08\,\%$

(2) $P_D(\overline{B}) = \frac{|D \cap \overline{B}|}{|D|} = \frac{2}{200} = 1\,\%$

Beispiel 3

Bei einer Fahrgastkontrolle in Stadtbussen unter 155 Personen sind 80 weiblich. Von den weiblichen Fahrgästen haben 95 % einen Fahrschein. Von den kontrollierten Fahrgästen sind 72 nicht weiblich und haben einen Fahrschein. Eine der 155 Personen wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse W: „Die Person ist weiblich" und F: „Die Person hat einen Fahrschein" werden betrachtet.

Die Bezeichnung „nicht weiblich" bedeutet immer „männlich oder divers". Ebenso wird unter „nicht männlich" immer „weiblich oder divers" verstanden.

a) Beschreiben Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{W}}(F)$ in Worten. Berechnen Sie diese.

b) Erstellen Sie ein mit absoluten Häufigkeiten beschriftetes Baumdiagramm.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

(1) eine kontrollierte Person, die weiblich ist, keinen Fahrschein hat,

(2) eine kontrollierte Person weiblich ist und keinen Fahrschein hat.

Lösung

a) $P_{\overline{W}}(F)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter nicht weiblicher Fahrgast einen Fahrschein hat.

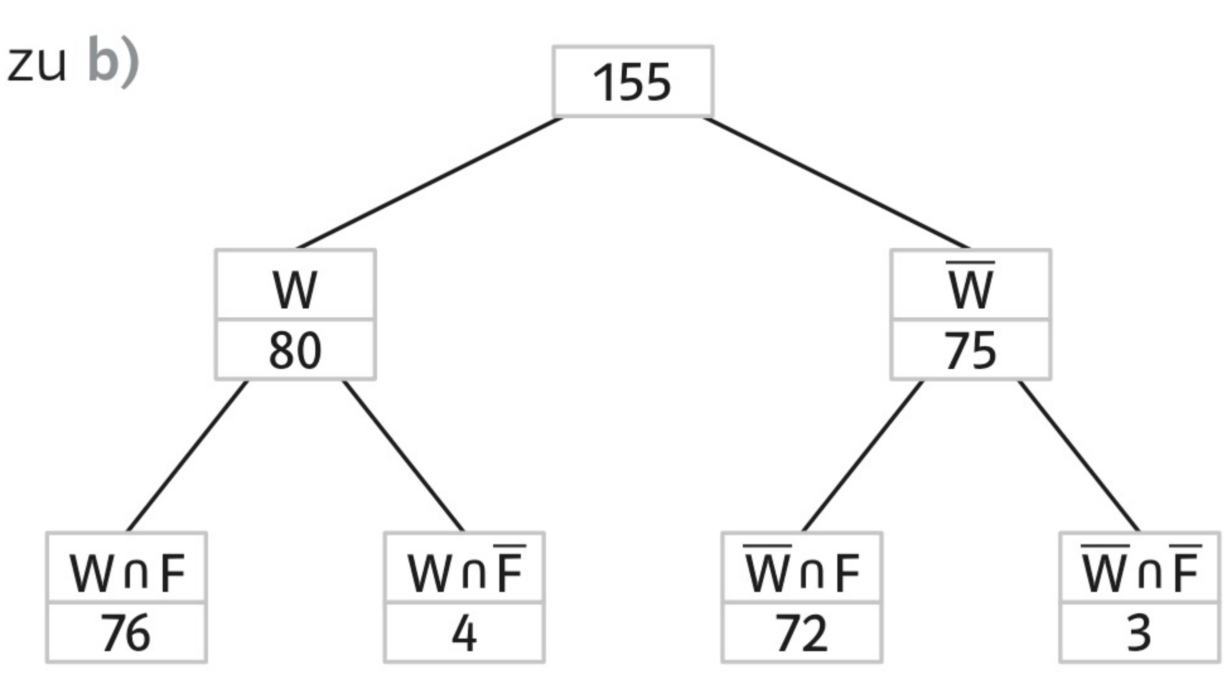
$P_{\overline{W}}(F) = \frac{|\overline{W} \cap F|}{|\overline{W}|} = \frac{72}{75} = \frac{24}{25} = 96\,\%$

b) $95\,\%$ von $80 = 0{,}95 \cdot 80 = 76$

c) (1) $P_W(\overline{F}) = \frac{|W \cap \overline{F}|}{|W|} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20} = 5\,\%$

(2) $P(W \cap \overline{F}) = \frac{4}{155} \approx 2{,}6\,\%$

zu b)



Aufgaben

1 Bei einem Zufallsexperiment werden die Ereignisse A und B betrachtet.

a) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel im Heft.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, $P_{\overline{A}}(B)$ und $P_A(B)$.

	B	$\overline{B}$	
A		0,4	
$\overline{A}$	0,12		0,3

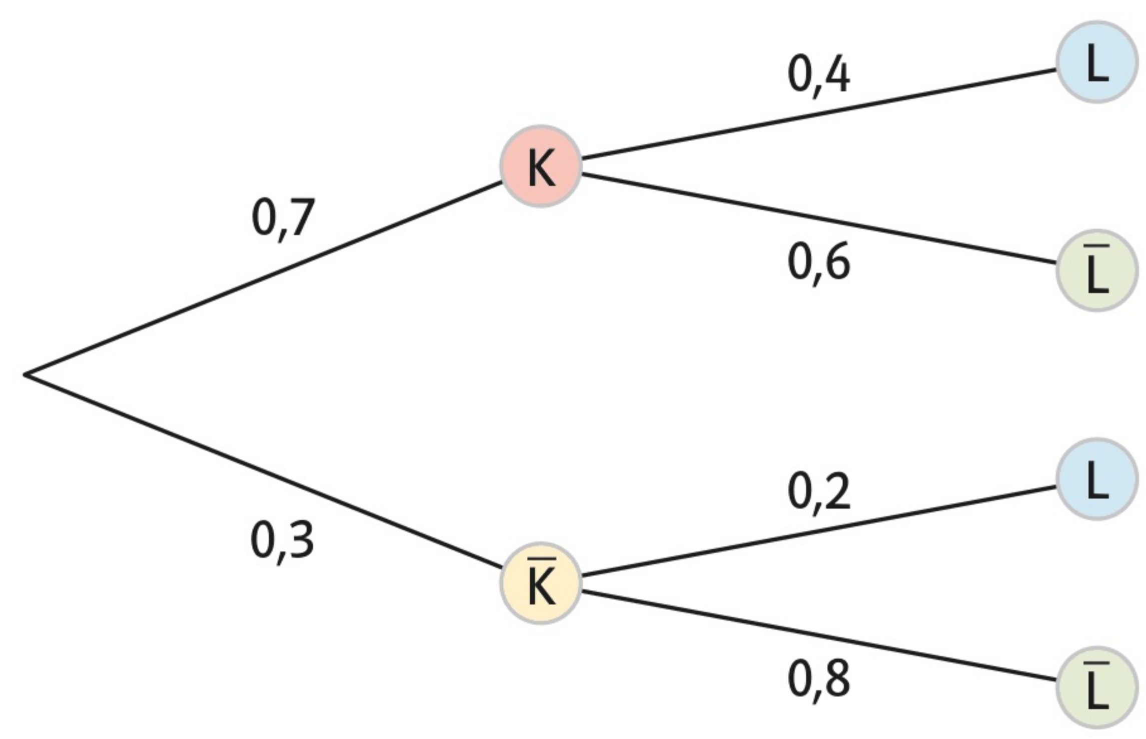
Strategie | Seite 188
Betrachten von etwas Gegenteiligem

2 In jedem Jahrgang erhalten die drei besten Teilnehmenden eines Mathewettbewerbs besondere Preise. Unter den restlichen 40 Teilnehmenden werden weitere Preise verlost, unter anderem eine Freikarte fürs Kino.

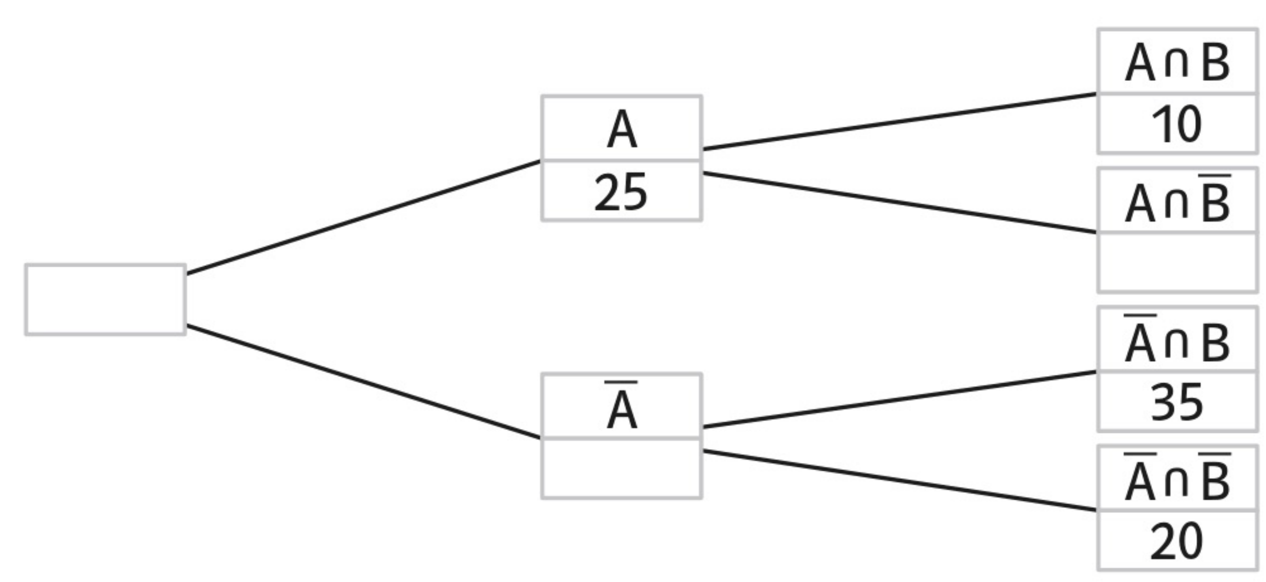
	weiblich	nicht weiblich
Unter- und Mittelstufe	16	6
Oberstufe	8	10

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) ein Mädchen aus der Oberstufe die Kinokarte erhält,
b) jemand aus der Oberstufe die Karte bekommt, wenn ein Mädchen gezogen wurde,
c) jemand aus der Mittel- oder Unterstufe die Karte bekommt, wenn eine männliche oder diverse Person gezogen wurde.

3 Bei einem zweistufigen Zufallsexperiment werden die Ereignisse K und L betrachtet. Über die Wahrscheinlichkeiten ihres Eintretens gibt das Baumdiagramm Auskunft.
a) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit mit dem Wert 0,4.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $\overline{K} \cap \overline{L}$ und $\overline{L} \cap K$.
c) Berechnen Sie $P(L)$ und $P(\overline{L})$.
d) Ermitteln Sie $P_{\overline{K}}(L)$ und $P(\overline{K} \cap L)$.
e) Geben Sie die Symbolschreibweise und den Wert der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass $\overline{L}$ eintritt, wenn $\overline{K}$ eingetreten ist.



4 Bei einem Zufallsexperiment werden die Ereignisse A und B betrachtet.
a) Ergänzen Sie das Baumdiagramm im Heft.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ und $P(B)$.

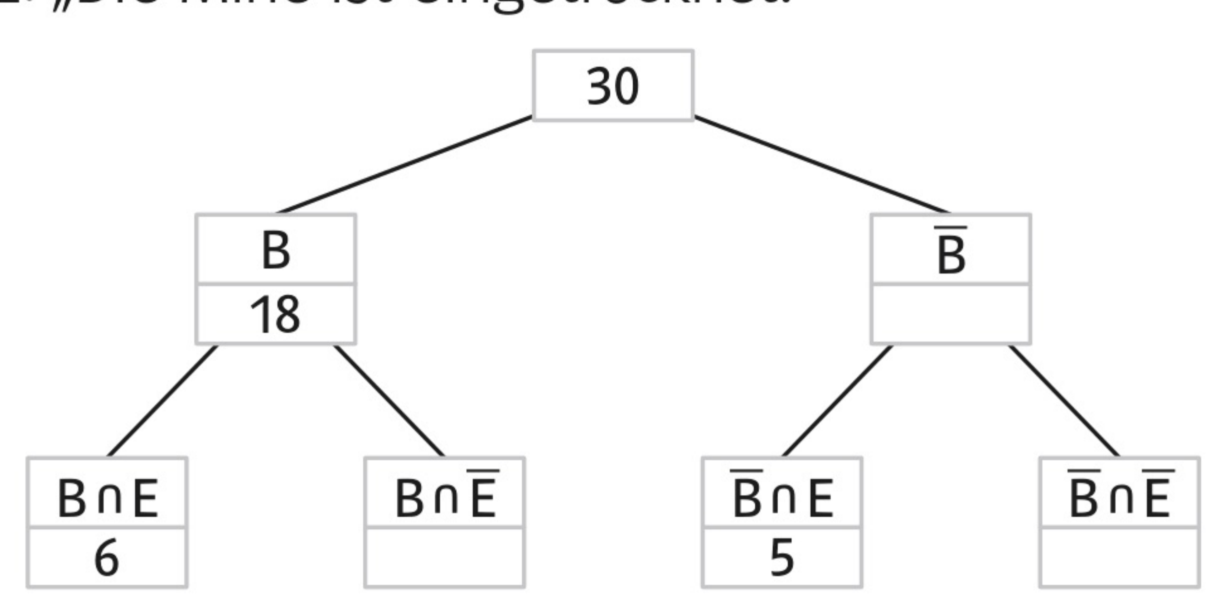


Test 1

Lösungen | Seite 205

5 In einer Schublade sind 30 Farbstifte, die sich nur in der Farbe der Kappen unterscheiden. Bei sechs der 18 blauen und bei fünf der zwölf andersfarbigen Stifte ist die Mine eingetrocknet. Anton greift ohne hinzusehen in die Schublade und nimmt einen Stift.

B: „Der Farbstift ist blau."
E: „Die Mine ist eingetrocknet."



a) Ergänzen Sie das Baumdiagramm im Heft.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) der Farbstift schreibt,
(2) der Farbstift blau ist und schreibt,
(3) der Farbstift schreibt, wenn Anton einen blauen Farbstift gezogen hat.

6 In einer Klasse sind 15 Jungen und zwölf Mädchen, von denen sechs bzw. drei blond sind. Eine Person wird ausgelost. Die Merkmale W: „Weiblich" und B: „Blond" werden betrachtet.

	B	$\overline{B}$	
W	3		12
$\overline{W}$	6		15

a) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel im Heft.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(B \cap W)$, $P(\overline{B} \cup \overline{W})$, $P_W(B)$ und $P_{\overline{W}}(B)$.

7 Unter allen Schülerinnen und Schülern aus einer Klasse werden die Merkmale M: „Die Person ist männlich" und V: „Die Person spielt gerne Volleyball" unterschieden. Es wird eine Person ausgelost. Ordnen Sie gemeinsam die angegebenen Ereignisse passend den Wahrscheinlichkeiten $P_V(M)$, $P_M(V)$ und $P(V \cap M)$ zu (Mehrfachzuordnungen sind möglich).

A „Eine zufällig ausgewählte Person, die männlich ist, spielt gerne Volleyball."

B „Eine zufällig ausgewählte Person ist männlich und spielt gerne Volleyball."

C „Ein zufällig ausgewählter Junge spielt gerne Volleyball."

D „Eine zufällig ausgewählte Person spielt gerne Volleyball und ist männlich."

E „Eine zufällig ausgewählte Person, die gerne Volleyball spielt, ist männlich."

F „Eine zufällig ausgewählte Person ist ein Junge, der gerne Volleyball spielt."

8 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
In Sonnenstadt gibt es 6000 Einfamilienhäuser, von denen 2400 mit einer Holzpelletheizung ausgestattet sind. Bei zwei Dritteln der Einfamilienhäuser mit Holzpelletheizung ist diese mit einer solarthermischen Anlage kombiniert. 50 % aller Einfamilienhäuser sind weder mit einer Holzpelletheizung noch mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet.
a) Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf.
b) Ein zufällig ausgewähltes Einfamilienhaus ist mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es eine Holzpelletheizung?

9 Zur 11. Jahrgangsstufe des Markgraf-Wilhelm-Gymnasiums gehören 120 Personen. Davon haben 52 Latein, 84 haben Spanisch, zwölf haben weder das eine noch das andere Fach.
Herr Hanninger ist Oberstufenkoordinator und sucht Personen der 11. Klassen mit bestimmten Fächerkombinationen.
a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Elftklässler, den Herr Hanninger trifft, kein Spanisch hat, wenn Herr Hanninger weiß, dass er Latein hat.
b) Herr Hanninger trifft zufällig eine Elftklässlerin. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Latein und Spanisch hat.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

10 Von den 150 Personen der Jahrgangsstufen 10 und 11 haben 120 bei einem Ausflug zum Christkindlesmarkt eine Mütze dabei und alle tragen diese auch. Davon haben 100 auch Handschuhe dabei. Insgesamt haben 30 keine Handschuhe dabei. Auf einer Bühne werden Preise verlost. Ein Set aus Mütze und Handschuhen geht an Herrn Winkler, der die Sachen jemandem unter den 150 Jugendlichen zufällig weiterschenken möchte.
a) Stellen Sie eine Vierfeldertafel für die Merkmale M: „Trägt eine Mütze" und H: „Hat Handschuhe dabei" mit absoluten Häufigkeiten auf.
b) Stellen Sie ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten auf, bei dem auf der ersten Stufe das Merkmal M steht und auf der zweiten Stufe das Merkmal H.
c) Herr Winkler geht im Kopf einige Namen durch. Er überlegt, ob Jakob Mütze und Handschuhe gebrauchen könnte. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jakob weder Handschuhe noch Mütze dabeihat.
d) Herr Winkler trifft zufällig auf Jakob, der eine Mütze trägt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er keine Handschuhe dabeihat.
e) Herr Winkler trifft zufällig auf Emilia, die keine Mütze trägt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie keine Handschuhe dabeihat.

11 Vanja würfelt mit zwei Würfeln und betrachtet die Augensumme.
a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Vanja die Augensumme 5 erhält.
b) Vanja sagt, dass die Augensumme eine Primzahl sei. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die Augensumme 5 erhalten hat.
c) Vanja sagt, dass sie zwei Primzahlen gewürfelt habe. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die Augensumme 5 erhalten hat.

12 Von den 60 Personen eines Lehrerkollegiums brauchen $\frac{2}{3}$ eine Lesebrille, bei den 24 Männern des Lehrerkollegiums ist es die Hälfte.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft
(1) nicht männlich ist,
(2) nicht männlich ist und eine Lesebrille benötigt,
(3) eine Lesebrille trägt, wenn sie nicht männlich ist.

b) Eine Lesebrille liegt neben dem Telefon im Lehrerzimmer. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Brille keiner männlichen Lehrkraft gehört.

13 Zeigen Sie, dass bei einem Zufallsexperiment für die Ereignisse A und B stets $P_A(B) \geq P(A \cap B)$ gilt.

14 **Abiturprüfung 2011 (Bayern), Stochastik, Aufgabengruppe I, Aufgabe 1**
Ein Investor plant, in einer Gemeinde, die aus den Orten Oberberg und Niederberg besteht, eine Windkraftanlage zu errichten.
Um sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben stehen, beschließt der Gemeinderat, eine Umfrage unter den Wahlberechtigten der Gemeinde durchzuführen. In Niederberg werden 1722, in Oberberg 258 Einwohner befragt. 1089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage, darunter sind allerdings nur 27 Einwohner von Oberberg. Die übrigen befragten Personen sprechen sich gegen die Windkraftanlage aus.

a) Bestimmen Sie jeweils den prozentualen Anteil der Gegner der Windkraftanlage unter den Befragten von Niederberg und unter den Befragten von Oberberg.

Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt.

b) Ermitteln Sie
- die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt und sich gegen die Windkraftanlage aussprach.
- die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

c) Begründen Sie, dass kein Ergebnis der Umfrage denkbar ist, bei dem $p_1 > p_2$ ist.

Test 2

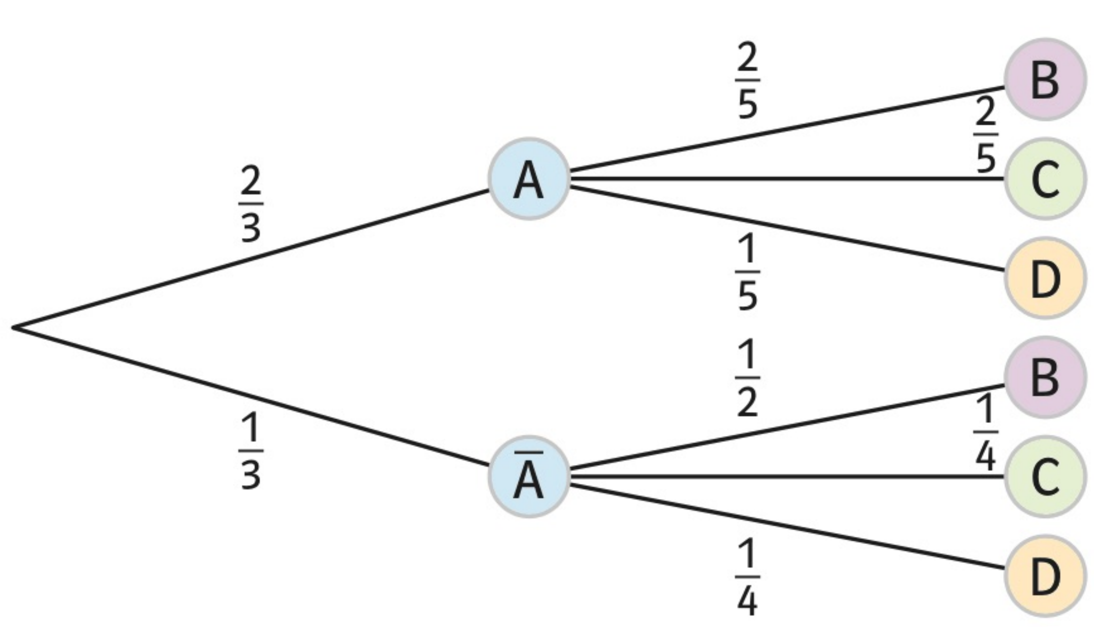
Lösungen | Seite 205

15 In einer Fabrik werden von Montag bis Freitag täglich 200 Autos produziert. Montags treten die meisten Mängel auf; das betrifft etwa 10 % der Autos. Ab Dienstag liegt die Mängelrate bei 4 % täglich. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Auto aus dieser Fabrik

a) mit Mängeln zu erhalten,
b) mit Mängeln zu erhalten, wenn man weiß, dass es an einem Montag produziert wurde,
c) zu haben, das an einem Montag produziert wurde, wenn man weiß, dass es Mängel hat.

16 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit.
(1) $P(\overline{A} \cap C)$ (2) $P(\overline{A} \cup C)$ (3) $P(C)$
(4) $P(D)$ (5) $P_{\overline{A}}(C)$ (6) $P_A(D)$

b) Erstellen Sie entsprechend zur Vierfeldertafel eine Sechsfeldertafel und bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten $P_C(\overline{A})$ und $P_D(A)$.



Grundwissen Test

Lösungen | Seite 205

G 17 Entscheiden Sie zunächst, ob es sich um eine Exponential- oder um eine Potenzgleichung (also eine Gleichung, die auf die Form $x^n = c$ zurückgeführt werden kann) handelt oder ob keine dieser beiden Gleichungsarten vorliegt. Lösen Sie anschließend die Gleichung.

a) $2^x = 64$ **b)** $7t - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} + 3t$ **c)** $2x^5 + 6 = 4$ **d)** $4 \cdot 6^x = 20$
e) $3t^4 = 243$ **f)** $10 - \frac{1}{2}x^3 = -2$ **g)** $x - 2 = 3x^{-1}$ **h)** $3^{t+1} - 43 = 200$

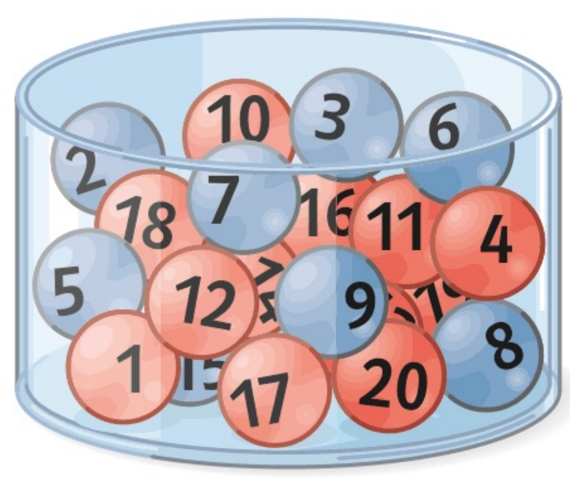
2 Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$ und $P_A(B)$

Leiten Sie aus der Vierfeldertafel zwei verschiedene Baumdiagramme ab, die vollständig beschriftet sind.

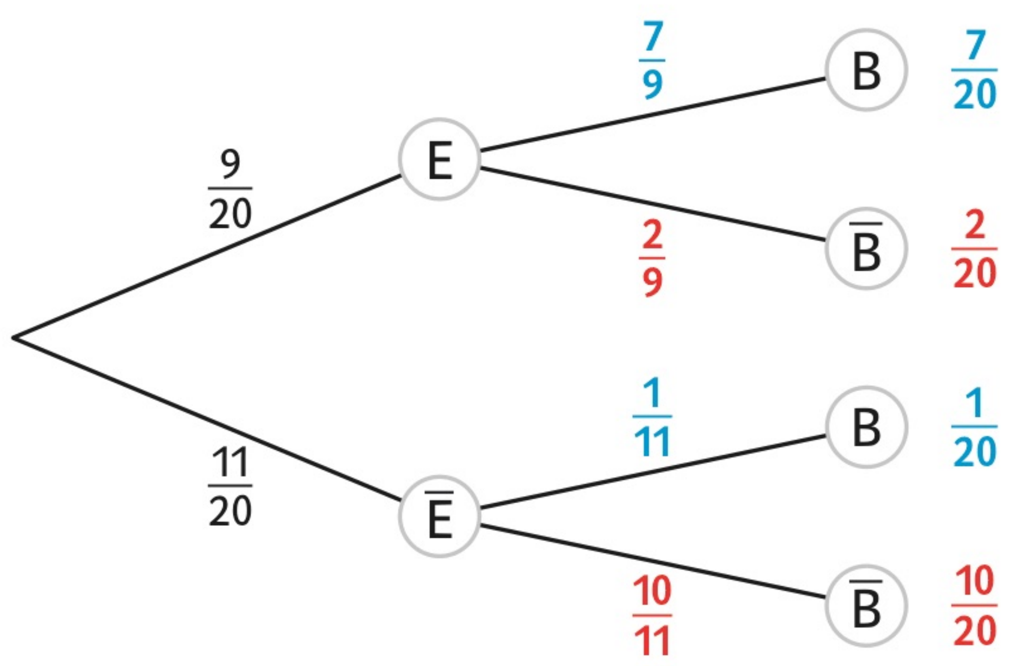
	B	$\overline{B}$	
A	17 %	44 %	61 %
$\overline{A}$	28 %	11 %	39 %
	45 %	55 %	100 %

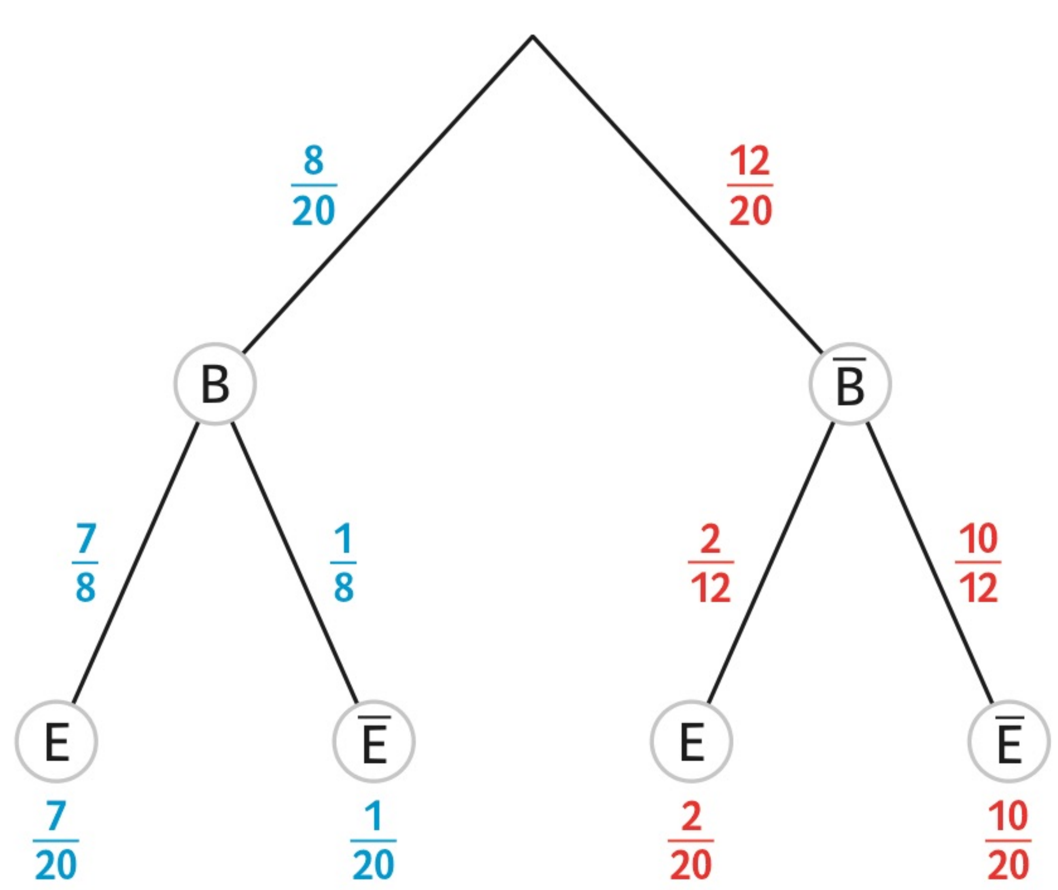
Liegt für ein Zufallsexperiment eine Vierfeldertafel vor, können daraus zwei Baumdiagramme mit unterschiedlichen bedingten Wahrscheinlichkeiten entwickelt werden.

In einer Urne befinden sich zwölf rote und acht blaue Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 20 beschriftet sind. Zwei der roten und sieben der blauen Kugeln sind mit einstelligen Zahlen beschriftet, der Rest mit zweistelligen Zahlen. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Die Ereignisse B: „Die Kugel ist blau“ und E: „Die Zahl auf der Kugel ist einstellig“ werden betrachtet. Für diese Situation lässt sich eine Vierfeldertafel aufstellen, aus der sich zwei verschiedene Baumdiagramme ableiten lassen.



	B	$\overline{B}$	
E	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{9}{20}$
$\overline{E}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{11}{20}$
	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$	1



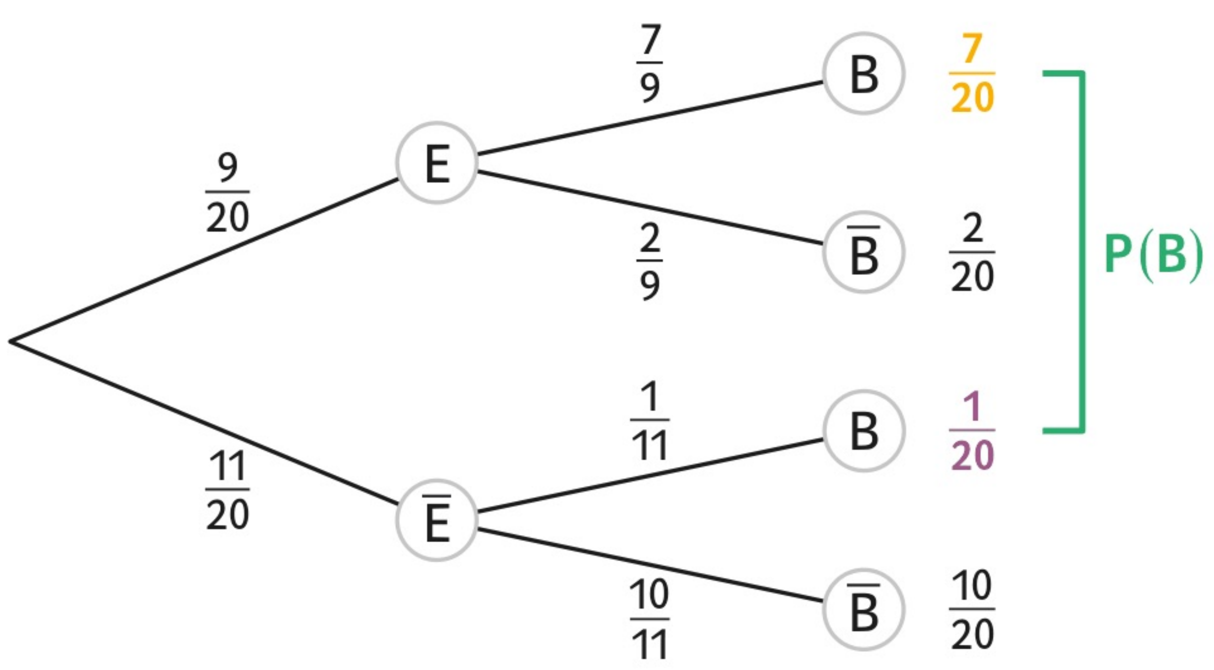


Wird zuerst das Ereignis E und dann das Ereignis B betrachtet, so stehen an der zweiten Stufe die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_E(B) = \frac{7}{9}$, $P_E(\overline{B}) = \frac{2}{9}$, $P_{\overline{E}}(B) = \frac{1}{11}$ und $P_{\overline{E}}(\overline{B}) = \frac{10}{11}$.

Wird zuerst das Ereignis B und dann das Ereignis E betrachtet, so stehen an der zweiten Stufe die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(E) = \frac{7}{8}$, $P_B(\overline{E}) = \frac{1}{8}$, $P_{\overline{B}}(E) = \frac{2}{12}$ und $P_{\overline{B}}(\overline{E}) = \frac{10}{12}$.

Nur die Wahrscheinlichkeiten $P(B \cap E) = \frac{7}{20}$, $P(B \cap \overline{E}) = \frac{1}{20}$, $P(\overline{B} \cap E) = \frac{2}{20}$ und $P(\overline{B} \cap \overline{E}) = \frac{10}{20}$ kommen in beiden Baumdiagrammen vor.

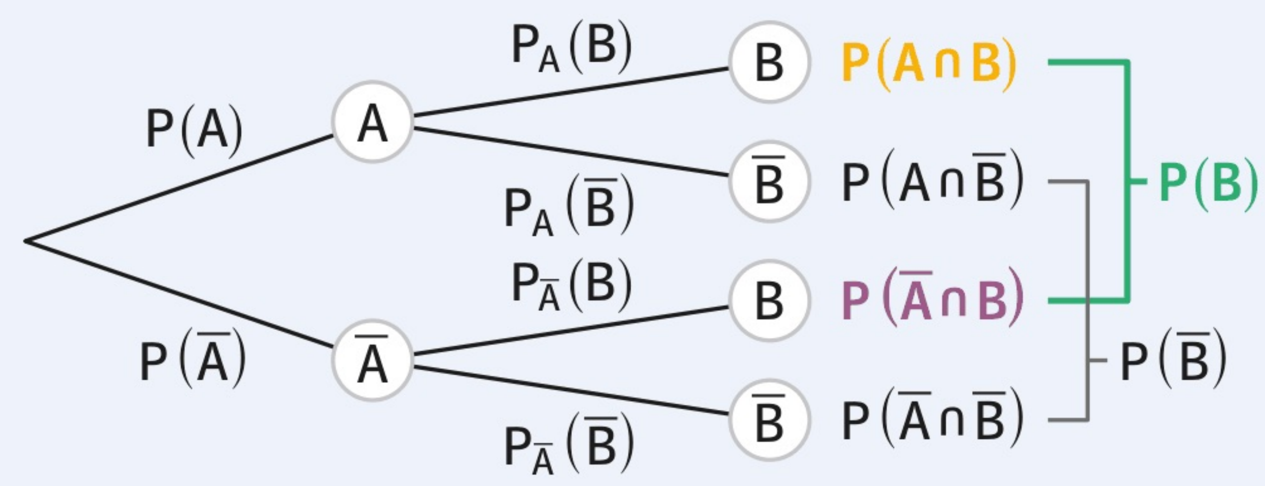
Liegt ausschließlich das nebenstehende Baumdiagramm vor, so können die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_E(B)$, $P_E(\overline{B})$, $P_{\overline{E}}(B)$ und $P_{\overline{E}}(\overline{B})$ direkt entnommen werden. Andere bedingte Wahrscheinlichkeiten wie $P_B(E)$ können daraus auf folgende Weise ermittelt werden:
Anwenden der 2. Pfadregel liefert
$P(B) = P(E \cap B) + P(\overline{E} \cap B) = \frac{7}{20} + \frac{1}{20} = \frac{8}{20}$.



Damit ergibt sich $P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{8}{20}} = \frac{7}{8}$.

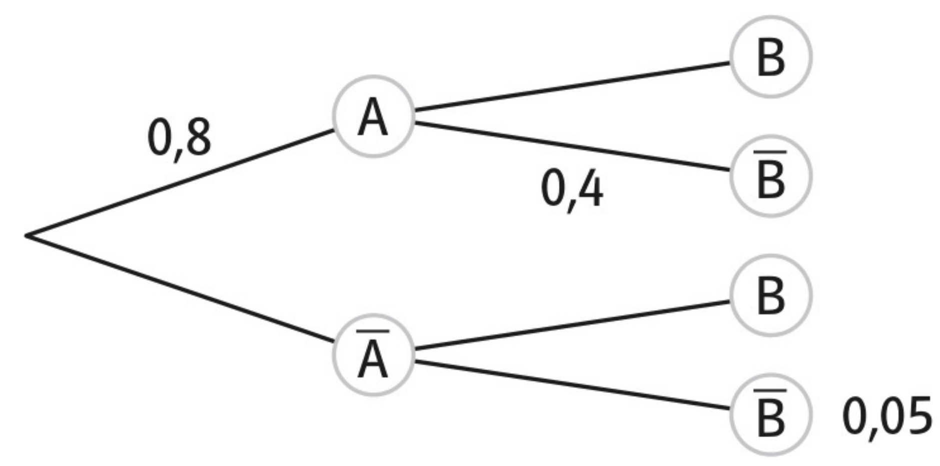
Liegt ein Baumdiagramm für die Ereignisse A und B vor, bei dem zuerst nach dem Ereignis A unterschieden wird, lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ wie folgt berechnen:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}.$$



Beispiel 1

Das abgebildete Baumdiagramm gehört zu einem zweistufigen Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B. Vervollständigen Sie das Baumdiagramm im Heft und berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$, $P_{\overline{B}}(A)$ und $P_{\overline{B}}(\overline{A})$.



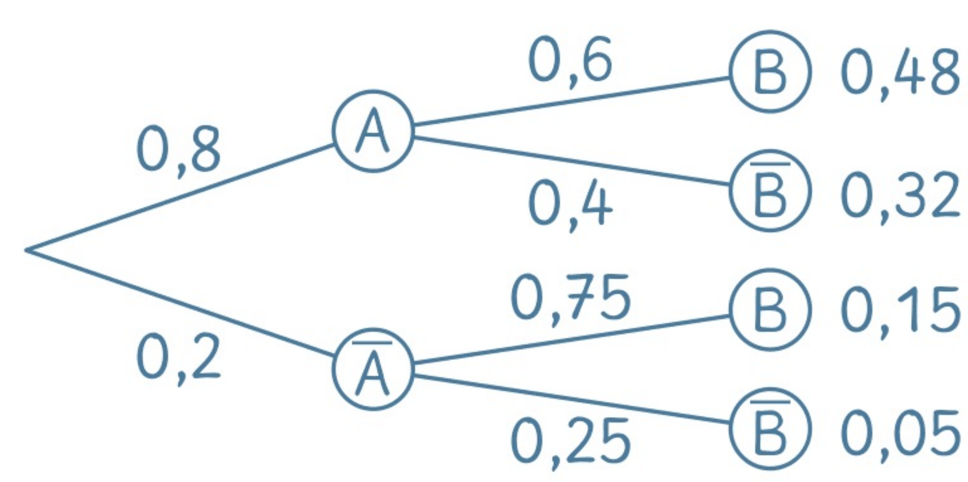
Lösung

$P_B(A) = \frac{0{,}48}{0{,}48 + 0{,}15} = \frac{0{,}48}{0{,}63} \approx 0{,}762 = 76{,}2\,\%$

$P_B(\overline{A}) = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}48} = \frac{0{,}15}{0{,}63} \approx 0{,}238 = 23{,}8\,\%$

$P_{\overline{B}}(A) = \frac{0{,}32}{0{,}32 + 0{,}05} = \frac{0{,}32}{0{,}37} \approx 0{,}865 = 86{,}5\,\%$

$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}32} = \frac{0{,}05}{0{,}37} \approx 0{,}135 = 13{,}5\,\%$



Beispiel 2

Mittels eines Speichelschnelltests werden Personen auf die Infektion mit einem bestimmten Virus getestet. Es werden die Ereignisse V: „Eine zufällig ausgewählte Person ist mit dem Virus infiziert“ und T: „Der Test fällt positiv aus“ betrachtet.

In der Bevölkerung sind aktuell 0,1 % mit dem Virus infiziert. Der Schnelltest fällt bei 98 % der Infizierten positiv aus. Bei 99 % der Nichtinfizierten fällt der Test negativ aus.

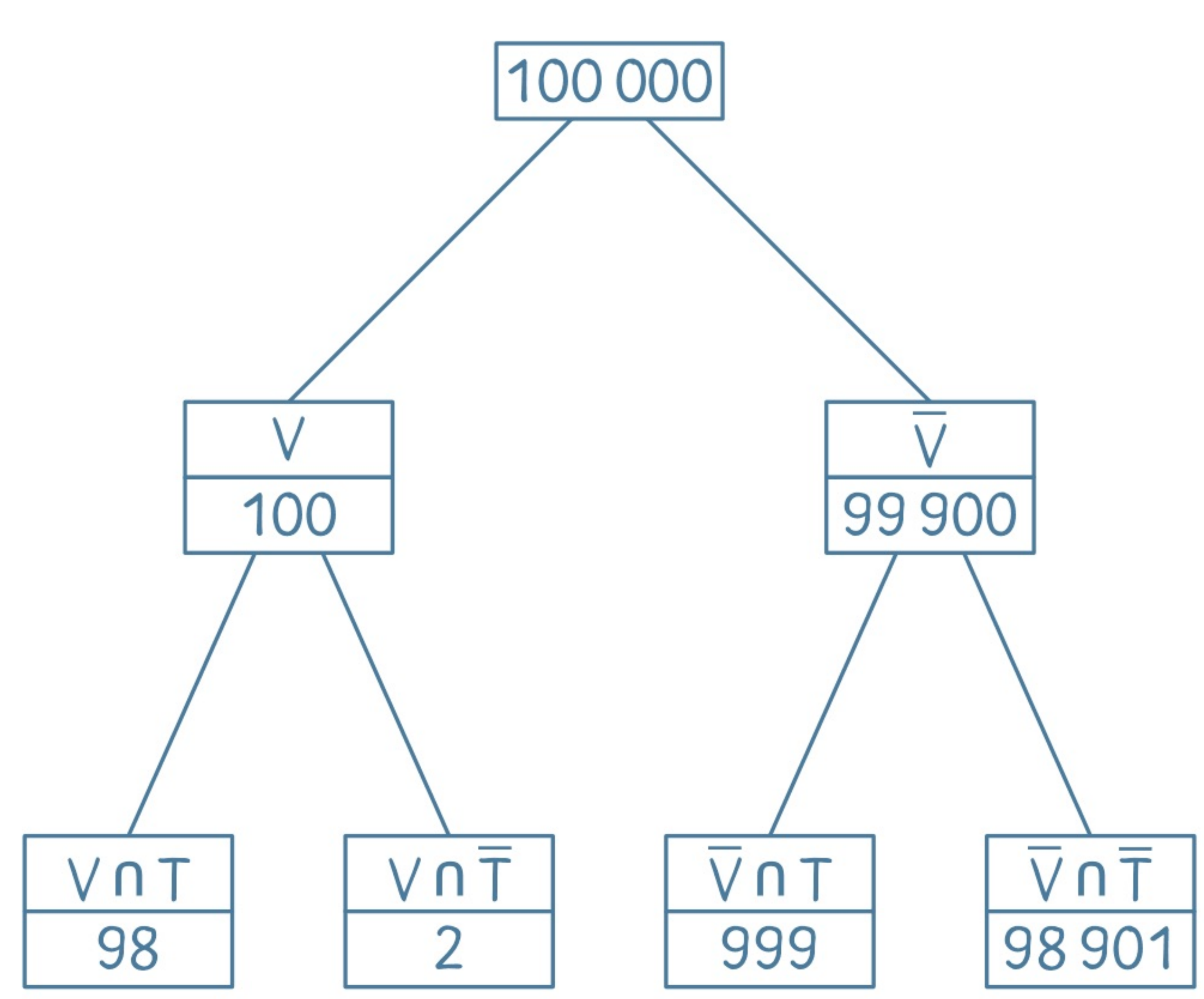
a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten für insgesamt 100 000 Personen, das zuerst bezüglich des Ereignisses V unterscheidet.

b) Eine Person wird positiv auf das Virus getestet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich mit dem Virus infiziert ist. Folgern Sie daraus, ob weitere Untersuchungen angebracht sind oder nicht.

Zeigt ein Test eine Infektion an, so spricht man von einem positiven Testergebnis.
Zeigt ein Test an, dass keine Infektion vorliegt, so spricht man von einem negativen Testergebnis.

Lösung

a) Anzahl derjenigen, die
- mit dem Virus infiziert sind:
  $0{,}001 \cdot 100\,000 = 100$
- nicht mit dem Virus infiziert sind:
  $100\,000 - 100 = 99\,900$
- infiziert und positiv getestet sind:
  $0{,}98 \cdot 100 = 98$
- infiziert und negativ getestet sind:
  $100 - 98 = 2$
- nicht infiziert und negativ getestet sind:
  $0{,}99 \cdot 99\,900 = 98\,901$
- nicht infiziert und positiv getestet sind:
  $99\,900 - 98\,901 = 999$



Darstellungen mit absoluten Zahlen sind in Sachkontexten oft verständlicher als die Angabe von Wahrscheinlichkeiten.

b) $P_T(V) = \frac{|T \cap V|}{|T|} = \frac{|T \cap V|}{|T \cap V| + |T \cap \overline{V}|} = \frac{98}{98 + 999} = \frac{98}{1097} \approx 0{,}089 = 8{,}9\,\%$

Da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die positiv getestet wird, tatsächlich infiziert ist, hier nur bei knapp 9 % liegt, sollten weitere Untersuchungen (z. B. mit anderen Tests) vorgenommen werden.

Aufgaben

1 Aus einer Klasse mit 24 Personen wird eine zufällig ausgewählt. Die Ereignisse B: „Trägt Brille" und W: „Weiblich" werden betrachtet.

	B	$\overline{B}$	
W	3	6	9
$\overline{W}$	5	10	15
	8	16	24

a) Erläutern Sie den Unterschied der Wahrscheinlichkeiten $P_W(B)$ und $P_B(W)$ und berechnen Sie diese.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte nicht weibliche Person keine Brille trägt, in Symbolschreibweise an und berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

2 Von 10 000 Personen wird eine ausgelost. Die Ereignisse A und B werden betrachtet.

	B	$\overline{B}$	
A	1750		
$\overline{A}$			2300
		6200	10 000

a) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel im Heft.

b) Berechnen Sie $P_A(B)$, $P_A(\overline{B})$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P_{\overline{A}}(\overline{B})$, $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$, $P_{\overline{B}}(A)$ und $P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

c) Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten
(1) mit dem Ereignis A auf der ersten Stufe, (2) mit dem Ereignis B auf der ersten Stufe.

3 In der Vierfeldertafel sind Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperiments mit den Ereignissen E und F eingetragen.

	F	$\overline{F}$	
E			0,7
$\overline{E}$	0,2		
		0,4	1

a) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel im Heft.

b) Berechnen Sie $P_E(F)$, $P_E(\overline{F})$, $P_{\overline{E}}(F)$, $P_{\overline{E}}(\overline{F})$, $P_F(E)$, $P_F(\overline{E})$, $P_{\overline{F}}(E)$ und $P_{\overline{F}}(\overline{E})$.

c) Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten
(1) mit dem Ereignis E auf der ersten Stufe, (2) mit dem Ereignis F auf der ersten Stufe.

4 In einer Straßenumfrage unter 120 Personen gaben 102 an, Informationen über Onlinemedien zu beziehen. Von diesen 102 Personen hören 72 auch Nachrichten im Radio. Von den Befragten gaben zehn an, sich ausschließlich über andere Medien zu informieren. Eine befragte Person wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse O: „Die Person informiert sich online" und R: „Die Person hört Radionachrichten" werden betrachtet.

a) Erstellen Sie eine geeignete Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_R(O)$, $P_R(\overline{O})$, $P_{\overline{R}}(O)$ und $P_{\overline{R}}(\overline{O})$ und erstellen Sie das Baumdiagramm, das diese Wahrscheinlichkeiten enthält.

5 Riccardo nimmt in einer Quizshow teil und darf unter 20 Personen aus dem Publikum eine zufällig auswählen, die ihm bei der Beantwortung einer Frage behilflich ist. Von den 20 Personen sind sich elf sicher, die richtige Antwort zu wissen, aber nur neun davon liegen tatsächlich richtig. Zwölf der 20 Personen würden die richtige Antwort wählen. Riccardo wählt zufällig eine Person aus. Die Ereignisse S: „Die gewählte Person ist sich sicher, dass ihre Antwort richtig ist" und R: „Die gewählte Person würde die richtige Antwort wählen" werden betrachtet.

a) Erstellen Sie eine geeignete Vierfeldertafel.

b) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die ausgewählte Person
(1) sich unsicher ist, obwohl sie die richtige Antwort wählen würde,
(2) richtigliegt, obwohl sie sich unsicher ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese ausgewählte Person sich sicher ist und mit ihrer Antwort richtigliegt.

d) Riccardo wählt eine Person aus, die sich sicher ist, die Antwort zu wissen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person nicht richtigliegt.

e) Erstellen Sie zwei verschiedene mit Wahrscheinlichkeiten beschriftete Baumdiagramme und heben Sie die in den Teilaufgaben b) bis d) berechneten Wahrscheinlichkeiten hervor.

Test 1

Lösungen | Seite 206

6 Im Rahmen einer Umfrage wurden 100 Studierende im Alter von 20 bis 25 Jahren nach ihrer sportlichen Aktivität und ihrem allgemeinen Gesundheitszustand befragt. Dabei gaben 75 Studierende an, sportlich aktiv zu sein. Fünf davon sind mit ihrem Gesundheitszustand nicht zufrieden. Insgesamt sind neun Studierende mit ihrem Gesundheitszustand unzufrieden. Eine dieser Personen wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse S: „Die Person ist sportlich aktiv" und Z: „Die Person ist mit ihrem Gesundheitszustand zufrieden" werden betrachtet.

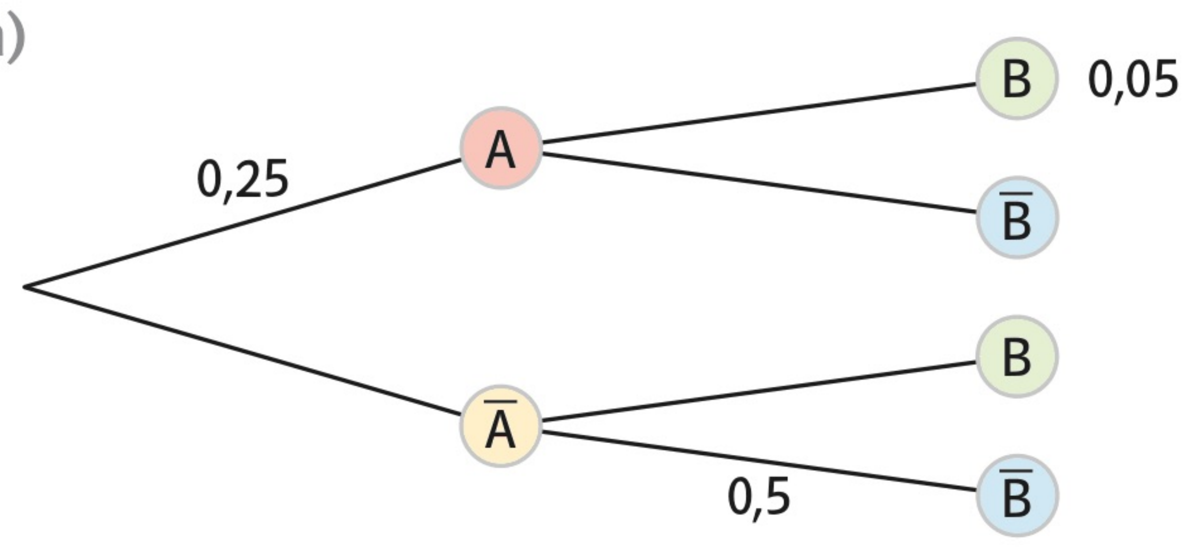
a) Erstellen Sie zur Sachsituation eine geeignete Vierfeldertafel.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte
(1) Person sportlich aktiv und mit ihrem Gesundheitszustand unzufrieden ist,
(2) sportlich aktive Person nicht mit ihrem Gesundheitszustand zufrieden ist,
(3) Person, die mit ihrem Gesundheitszustand unzufrieden ist, sportlich aktiv ist.

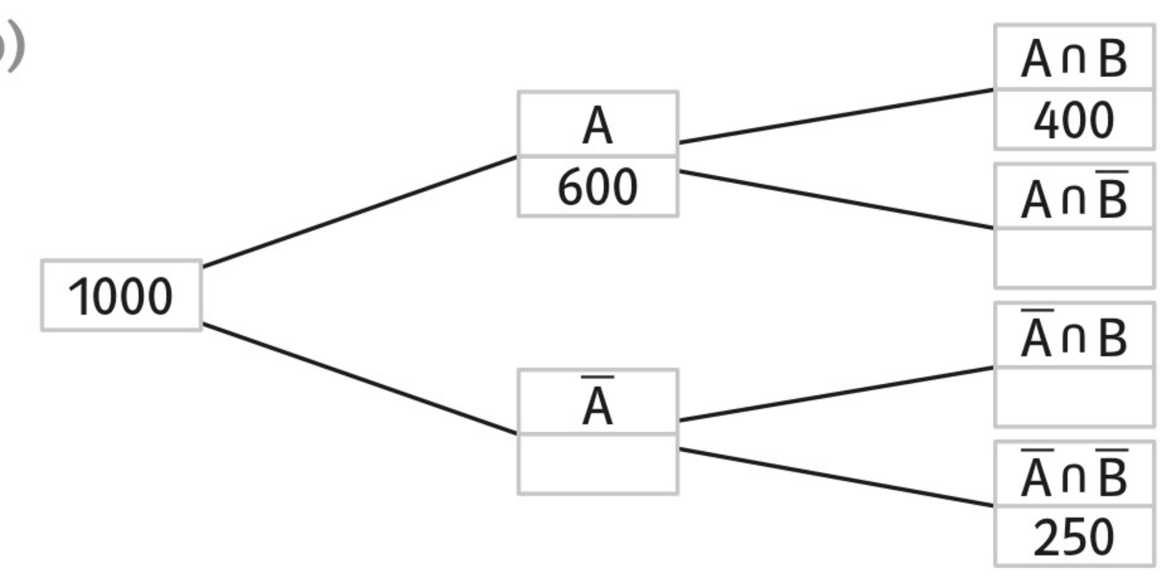
c) Erstellen Sie zwei verschiedene mit Wahrscheinlichkeiten beschriftete Baumdiagramme.

7 Das abgebildete Baumdiagramm gehört zu einem zweistufigen Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B. Vervollständigen Sie das Baumdiagramm im Heft und berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$, $P_{\overline{B}}(A)$ und $P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

a)

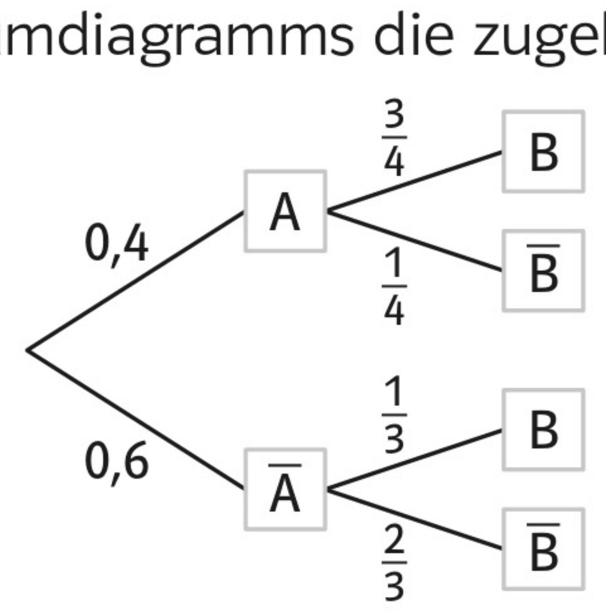


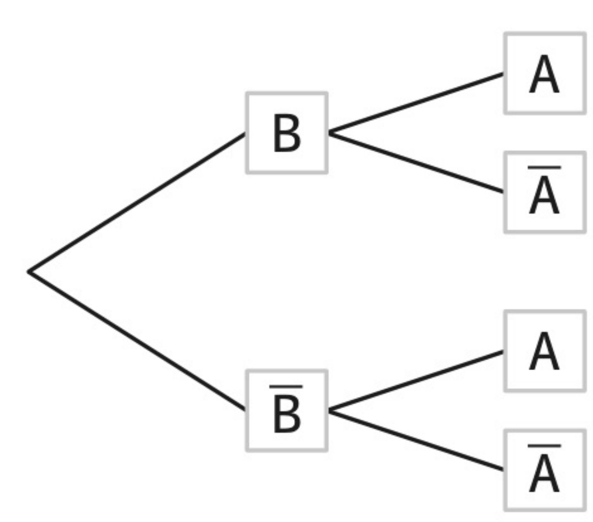
b)



8 **Abiturprüfung 2016 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
Die beiden Baumdiagramme gehören zum selben Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(B) und ergänzen Sie anschließend an allen Ästen des rechten Baumdiagramms die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

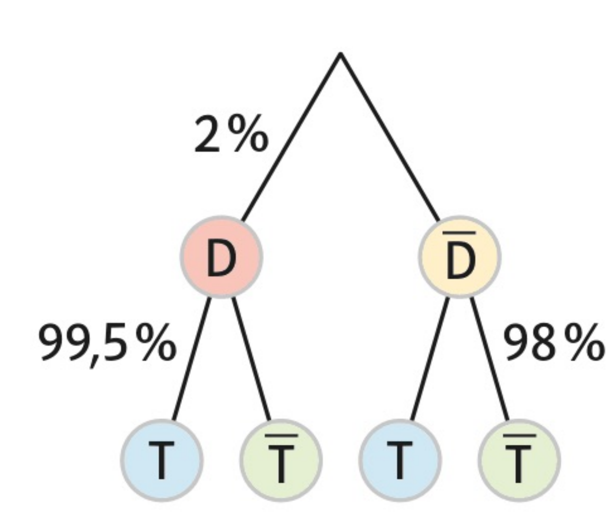
Hinweis zu Aufgabe 8:
Übertragen Sie zunächst das Baumdiagramm in Ihr Heft und ergänzen Sie es in dieser Zeichnung.





(Teilergebnis: P(B) = 0,5)

9 An einem internationalen Leichtathletikwettbewerb nehmen 2010 Personen teil. Ein Experte geht davon aus, dass etwa 2 % der Teilnehmenden gedopt sind. Ein bestimmter Dopingtest zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5 % ein positives Testergebnis an, wenn Doping vorliegt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % zeigt er ein negatives Ergebnis an, wenn kein Doping vorliegt.



Eine teilnehmende Person wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse D: „Die Person hat gedopt" und T: „Der Dopingtest fällt positiv aus" werden betrachtet.

a) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten im Heft und stellen Sie die Situation auch in einem Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten dar.

b) Ein Athlet berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter
(1) gedopter Athlet negativ getestet wird, (2) positiv getesteter Athlet gedopt hat.

c) Begründen Sie, warum die am Wettbewerb Teilnehmenden darauf bestehen, dass der Test verbessert wird.

10 Bei einer großen Halloween-Party der 11. Klassen tragen 72 % der Gäste eine Verkleidung, unter der man nicht erkennen kann, um wen es sich handelt. Unter allen Gästen stammen 16 % aus der Klasse 11 a und sind unkenntlich verkleidet. Ein Siebtel aller identifizierbaren Personen besucht die Klasse 11 a.

a) Bestimmen Sie den Anteil derjenigen Partygäste, die nicht aus der 11 a kommen und unter der Verkleidung nicht identifizierbar sind.

b) Bestimmen Sie den Anteil derjenigen Partygäste, die aus der 11 a kommen.

c) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{0{,}16}{0{,}16 + 0{,}28 \cdot \frac{1}{7}}$ im Sachzusammenhang.

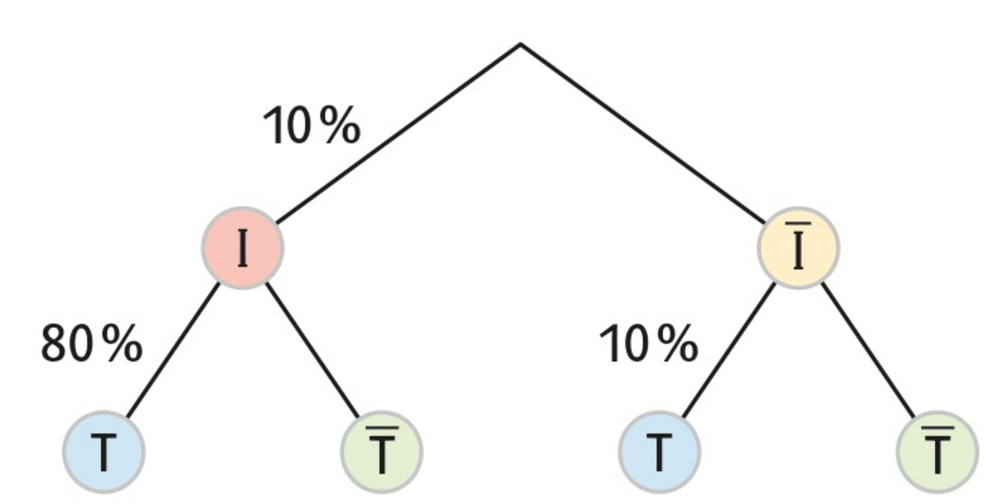
d) Lorenz trifft auf der Party zuerst zufällig auf ein Gespenst an der Bar und erkennt nicht, um wen es sich handelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person im Gespensterkostüm nicht aus der 11 a stammt.

e) Auf der Party sind 125 Personen aus den 11. Klassen. Berechnen Sie, wie viele Personen zur Klasse 11 a gehören, wenn drei Schüler der Klasse 11 a nicht gekommen sind.

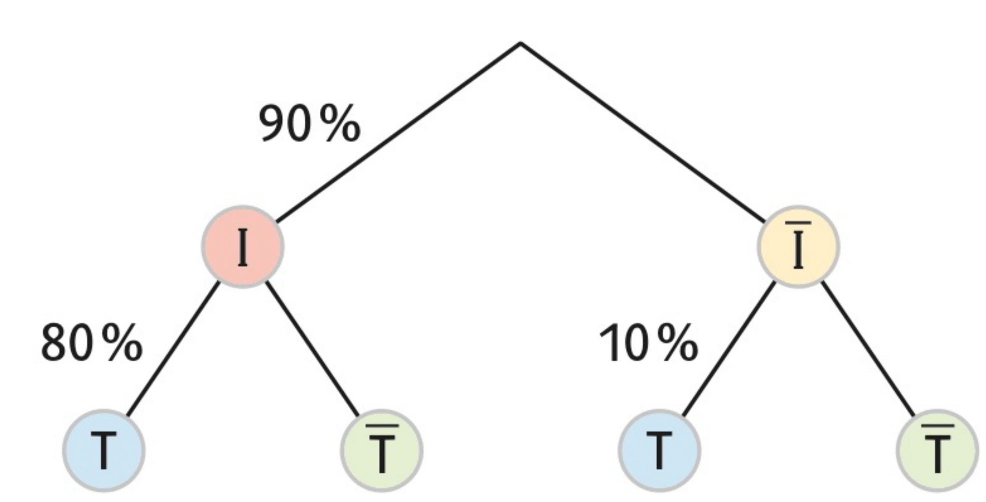
11 In der Praxis von Frau Dr. Wohl wird ein Urinschnelltest für eine bestimmte Harnwegsinfektion verwendet, der bei 80 % aller infizierten Frauen die Infektion feststellt. Allerdings zeigt der Test auch bei 10 % aller nicht infizierten Frauen fälschlicherweise an, dass eine Infektion vorliegt. Durch eine Laboruntersuchung, die länger dauert, kann das Testergebnis anschließend bestätigt oder verworfen werden.
Eine Patientin wird zufällig ausgesucht. Die Ereignisse I: „Die Patientin hat eine Harnwegsinfektion" und T: „Der Urintest zeigt eine Harnwegsinfektion an" werden betrachtet.

a) Beschreiben Sie die Bedeutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_T(\bar{I})$ und $P_{\bar{T}}(I)$.

b) In der Praxis von Frau Dr. Wohl werden oft auch Patientinnen mit allgemeinem Krankheitsgefühl dem Test unterzogen. Davon haben 10 % die beschriebene Harnwegsinfektion. Vervollständigen Sie das Baumdiagramm im Heft und berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_T(\bar{I})$ und $P_{\bar{T}}(I)$.



c) Von den Patientinnen mit Symptomen, die für Harnwegsinfektionen typisch sind, haben 90 % die beschriebene Harnwegsinfektion. Vervollständigen Sie das Baumdiagramm im Heft und berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_T(\bar{I})$ und $P_{\bar{T}}(I)$.



d) Diskutieren Sie untereinander, welchen Hinweis Frau Dr. Wohl Patientinnen mit typischen Symptomen vor dem Schnelltest geben könnte, und begründen Sie Ihre Entscheidung: „Wir sollten auf jeden Fall eine genauere Laboruntersuchung veranlassen,

A da Sie typische Symptome haben, egal wie der Schnelltest ausfällt."

B wenn der Schnelltest positiv ausfällt."

C wenn der Schnelltest negativ ausfällt."

e) Verfassen Sie gemeinsam einen Hinweis in der Art von Teilaufgabe d), den Frau Dr. Wohl Patientinnen ohne typische Symptome vor dem Schnelltest geben könnte.

f) Deuten Sie den Term $\frac{0{,}9 \cdot 0{,}8}{0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}1}$ im Sachzusammenhang.

g) Erläutern Sie, warum zwischen $P_T(I)$, $P_I(T)$ und $P(I \cap T)$ unterschieden werden muss.

12 In Urne 1 befinden sich drei schwarze, vier rote und drei weiße Kugeln, in Urne 2 befinden sich drei schwarze und drei weiße Kugeln und in Urne 3 sind vier schwarze und vier rote. Eine der drei Urnen wird zufällig ausgewählt und es wird eine Kugel daraus gezogen. Diese ist rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus Urne 1 gezogen wurde.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

13 In die Klasse 11b gehen 25 Mädchen und Jungen. Sahar berichtet: „Die meisten mit den Noten 1 oder 2 in der Matheschulaufgabe der Klasse 11b sind Jungen." Kathi hat dagegen beobachtet, dass die meisten Mädchen in der Klasse 11b eine 1 oder 2 in Mathe hatten. Alicja sagt, dass die Mehrheit der Jungen keine 1 oder 2 in der Schulaufgabe gehabt habe.
Eine Person der Klasse 11b wird zufällig ausgelost. Die Ereignisse M: „Mädchen" und G: „Gut oder sehr gut in der Matheschulaufgabe" werden betrachtet.

a) Notieren Sie die Aussagen von Sahar, Kathi und Alicja mit bedingten Wahrscheinlichkeiten in Form von geeigneten Ungleichungen.

b) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten, die zeigt, dass sich die Beobachtungen der drei Mädchen nicht widersprechen müssen. Überprüfen Sie gegenseitig, ob die Daten der Vierfeldertafeln die Ungleichungen aus Teilaufgabe a) erfüllen.

c) Berechnen Sie für die Werte Ihrer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) eine zufällig ausgewählte Person mit einer 1 oder 2 in der Matheschulaufgabe ein Junge ist,
(2) ein zufällig ausgewähltes Mädchen eine 1 oder 2 in der Matheschulaufgabe hatte.

Test 2

Lösungen | Seite 206

14 In der Telefonzentrale einer Firma sind Baki und Laura für die telefonischen Kundenanfragen zuständig. Da Baki es schafft, die Kundenanfragen insgesamt deutlich schneller zu bearbeiten, landen 60 % der Anrufe bei ihm und nur 40 % bei Laura. Am Ende jeder Telefonberatung wird eine automatisierte, kurze Umfrage zur Kundenzufriedenheit durchgeführt. Mit Baki sind 70 % seiner Anrufenden zufrieden, mit Laura 90 %. Unter den Teilnehmenden der Umfrage werden per Zufall Personen ausgewählt, mit denen eine ausführlichere Befragung durchgeführt wird. Die Ereignisse B: „Baki hat beraten" und Z: „Die anrufende Person ist mit der Beratung zufrieden" werden betrachtet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine anrufende Person mit der Telefonberatung nicht zufrieden ist.

b) Eine anrufende Person ist mit der Telefonberatung nicht zufrieden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Beratung von Baki stammt.

c) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{0{,}4 \cdot 0{,}9}{0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}9}$ im Sachzusammenhang.

15 In Urne 1 befinden sich eine schwarze, drei rote und zwei goldene Kugeln. In Urne 2 sind zwei schwarze, fünf rote und drei goldene Kugeln. Eine Urne wird zufällig ausgewählt.

a) Aus der gewählten Urne wird zufällig eine Kugel gezogen. Die Kugel ist golden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel aus Urne 1 gezogen worden ist.

b) Aus der gewählten Urne werden zufällig zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Beide Kugeln sind gleichfarbig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogenen Kugeln aus Urne 1 stammen.

c) Diskutieren Sie, wie die Kugeln umsortiert werden könnten, sodass die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe b)
(1) maximal wird, (2) genau 50 % beträgt.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 206

G 16 a) In Herrn Ronges Lieblingseisdiele kostet eine Kugel Eis 1,50 €. Vor acht Jahren kostete eine Kugel dort noch 20 % weniger als heute. Berechnen Sie, wie viel eine Eiskugel vor acht Jahren kostete. Berechnen Sie zudem, wie viel eine Eiskugel in acht Jahren kosten würde, wenn sich deren Preis noch einmal um den gleichen Prozentsatz erhöhen würde wie in den vergangenen acht Jahren, und runden Sie diesen Preis auf 10 ct genau.

b) Herrn Ronges Eiskugel hat einen Durchmesser von 6 cm und befindet sich so in einer Waffel, dass die halbe Kugel sichtbar ist. Herr Ronge hat von der oberen Eiskugelhälfte in etwa so viel verzehrt, dass die verbleibende obere Eishalbkugel einen Durchmesser von 5 cm hat. Berechnen Sie, wie viel Prozent des Eiskugelvolumens noch übrig ist.

3 Stochastische Unabhängigkeit

Kurz vor einer wichtigen Landtagswahl hat der Spitzenkandidat der XY-Partei ein ausführliches Fernsehinterview zu aktuellen Themen gegeben. Am Tag danach ergibt eine repräsentative Umfrage unter 1200 Personen das in der Vierfeldertafel dargestellte Ergebnis. Untersuchen Sie, ob die gegebenen Daten dafür sprechen, dass das Fernsehinterview einen Einfluss auf das geplante Wahlverhalten der Zuschauerinnen und Zuschauer hatte.

F: „Die Person hat das Fernsehinterview gesehen."
X: „Die Person würde die XY-Partei wählen."

	F	$\overline{F}$	
X	63	273	336
$\overline{X}$	162	702	864
	225	975	1200

Zwei Ereignisse A und B werden als **stochastisch unabhängig** bezeichnet, wenn das Eintreten von A keinen Einfluss auf das Eintreten von B hat und auch das Eintreten von B keinen Einfluss auf das Eintreten von A hat.

Bei stochastischer Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit von B gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A:

$$P(B) = P_A(B).$$

Ebenso ist bei stochastischer Unabhängigkeit die Wahrscheinlichkeit von A gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B:

$$P(A) = P_B(A).$$

Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhält man jeweils:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad | \cdot P(A) \qquad\qquad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad | \cdot P(B)$$

Beide Gleichungen führen auf die gemeinsame Gleichung

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Andernfalls nennt man A und B **stochastisch abhängig**.

Beachten Sie, dass die Gleichung $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ nur dann gilt, wenn die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. Hingegen gilt für Ereignisse A und B aufgrund der ersten Pfadregel stets $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Da die Gleichungen $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, $P_B(A) = P(A)$ und $P_A(B) = P(B)$ äquivalent zueinander sind, kann jede der drei Gleichungen verwendet werden, um zwei Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit zu prüfen.

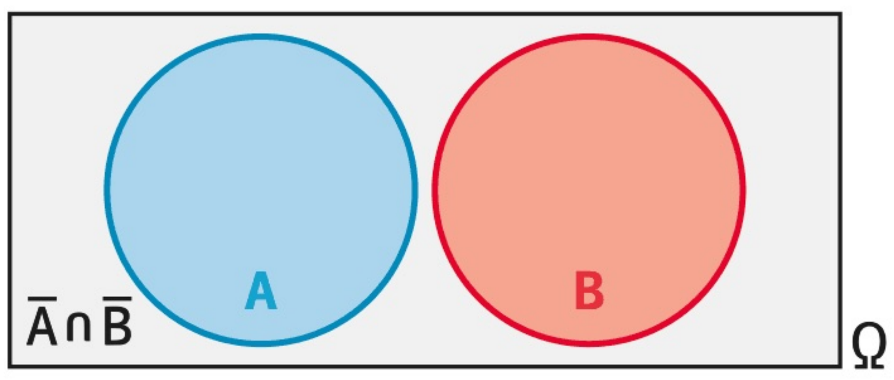
Die Spezialfälle $P(A) = 0$, $P(A) = 1$ und $P(A \cap B) = 0$

- Für $P(A) = 0$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ zwar nicht definiert, aber eine Aussage zur stochastischen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit kann dennoch getroffen werden: Gilt $P(A) = 0$ für das Ereignis A, so gilt $P(A) \cdot P(B) = 0 \cdot P(B) = 0$ und $P(A \cap B) = 0$. Somit sind A und B in diesem Fall stochastisch unabhängig.
- Für den Spezialfall $P(A) = 1$ gilt $P(A) \cdot P(B) = 1 \cdot P(B) = P(B)$ und auch $P(A \cap B) = P(B)$. Somit sind A und B auch in diesem Fall stochastisch unabhängig.
- Gilt $P(A \cap B) = 0$ und $P(A) \neq 0 \neq P(B)$ für die Ereignisse A und B, so gilt $P(A) \cdot P(B) \neq 0 = P(A \cap B)$. Somit sind A und B in diesem Fall stochastisch abhängig.

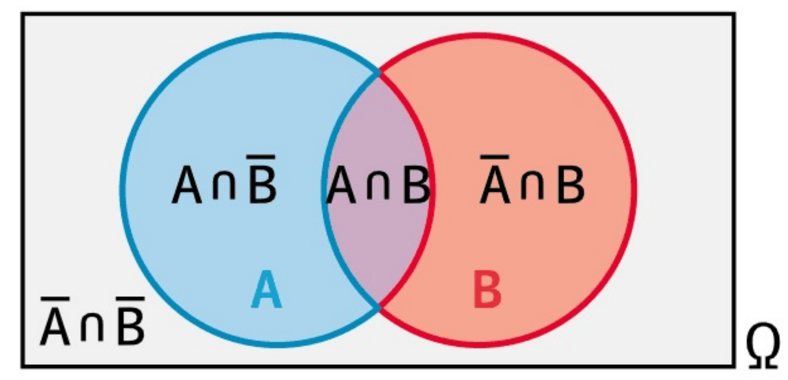
Unvereinbarkeit und stochastische Unabhängigkeit

Die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B darf nicht mit deren Unvereinbarkeit (dem Sichausschließen), also $A \cap B = \{\ \}$, verwechselt werden.

Bei der Unvereinbarkeit überlappen sich die Darstellungen der Ereignisse A und B im Mengenbild nicht. Es gilt $P(A \cap B) = 0$, die Ereignisse A und B sind also stochastisch abhängig.



Bei stochastischer Unabhängigkeit muss eine nichtleere Schnittmenge von A und B vorhanden sein. Stochastische Unabhängigkeit ist nur eine Eigenschaft der Wahrscheinlichkeiten.



Stochastisch unabhängige Ereignisse in Vierfeldertafeln

Trägt man in eine Vierfeldertafel die zu den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B gehörigen Wahrscheinlichkeiten ein, so steht im Feld für $A \cap B$ das Produkt $P(A) \cdot P(B)$.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Für das Feld $A \cap \overline{B}$ gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A) \cdot (1 - P(B)) \\ &= P(A) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, sind also auch A und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig. Analog kann man zeigen, dass dann auch $\overline{A}$ und B bzw. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig sind. Damit ergibt sich für diesen Fall folgende Vierfeldertafel:

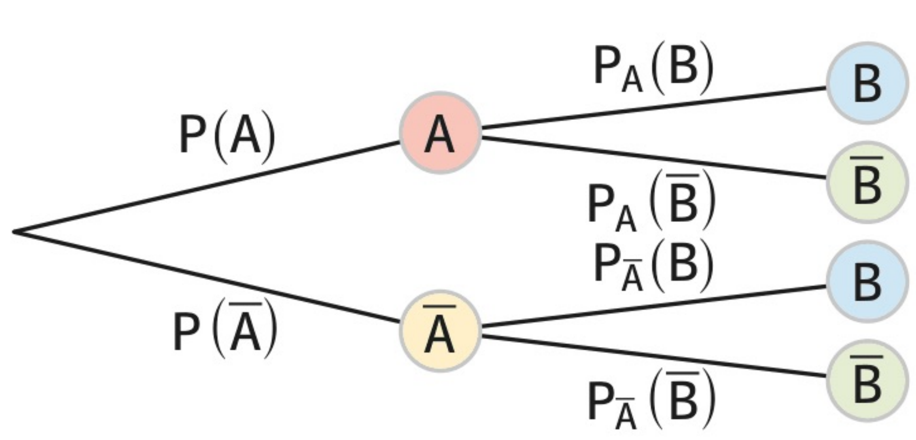
	B	$\overline{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}) \cdot P(B)$	$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Die Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten stochastisch unabhängiger Ereignisse A und B ist eine sogenannte Multiplikationstafel, da die Einträge der inneren Felder das Produkt der zugehörigen Randfelder sind.

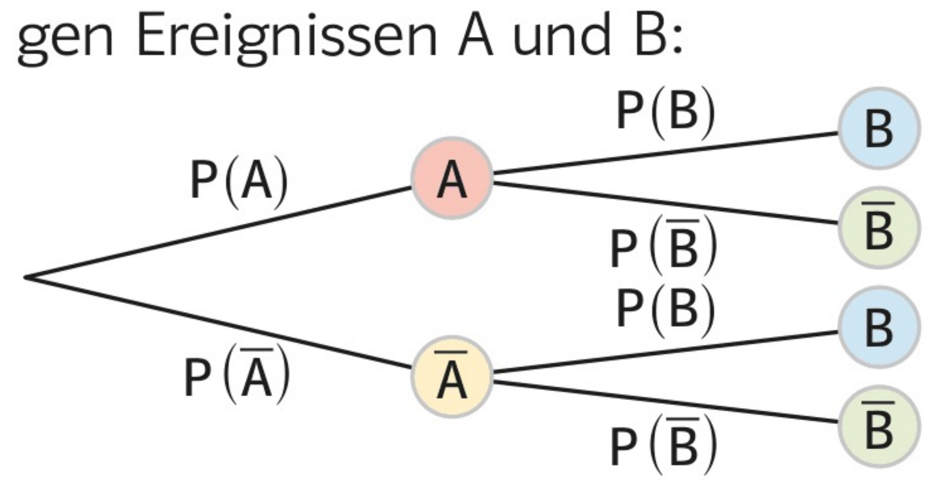
Stochastisch unabhängige Ereignisse in Baumdiagrammen

Da aus der stochastischen Unabhängigkeit von A und B auch die von A und $\overline{B}$ bzw. $\overline{A}$ und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ folgt, gilt $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$ und $P_A(\overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B})$. Für das Baumdiagramm bedeutet dies, dass an den Ästen der zweiten Stufe die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ durch die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ ersetzt werden kann. Entsprechendes gilt für die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{\overline{A}}(B)$, $P_A(\overline{B})$ und $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Allgemeines Baumdiagramm:



Baumdiagramm mit stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B:



Beispiel 1

Bei der Fertigung eines Bauteils treten unabhängig voneinander die Fehler A und B auf. Hat ein Bauteil keinen der beiden Fehler, ist es funktionstüchtig. Fehler A tritt mit der Wahrscheinlichkeit 12 % auf und beide Fehler gleichzeitig mit 6 %. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) dass Fehler B auftritt,

b) dass das Bauteil funktionstüchtig ist.

Lösung

a) A und B stochastisch unabhängig: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, also $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}06}{0{,}12} = \frac{1}{2} = 50\,\%$.

b) Da A und B stochastisch unabhängig sind, gilt dies auch für $\overline{A}$ und $\overline{B}$. Folglich gilt
$P(\text{„Funktionstüchtig"}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 0{,}88 \cdot 0{,}5 = 44\,\%$.

Beispiel 2

Es haben sich 1363 Patienten dazu bereit erklärt, an einer Studie zur Wirksamkeit eines neuen Medikaments teilzunehmen. Davon bekommen 450 das neue Medikament, die anderen ein Placebo. Kein Patient weiß jedoch, ob er ein Placebo oder das Medikament bekommen hat. Insgesamt kommt es im Beobachtungszeitraum bei 903 Patienten zu einer Besserung des Gesundheitszustands, davon bei 558 Patienten der Placebogruppe. Ein Patient wird zufällig ausgesucht. Untersuchen Sie die Ereignisse B: „Es kam zu einer Besserung des Gesundheitszustands" und M: „Der Patient hat das Medikament bekommen" auf stochastische Unabhängigkeit.

Ein Placebo ist ein Präparat, welches in einer für Medikamente üblichen Darreichungsform hergestellt wird, jedoch keine wirksamen Inhaltsstoffe besitzt.

Lösung

$P(M \cap B) = \frac{345}{1363} \approx 25{,}3\,\%$

$P(M) \cdot P(B) = \frac{450}{1363} \cdot \frac{903}{1363} \approx 21{,}9\,\% \neq P(M \cap B)$

Die Ereignisse M und B sind folglich stochastisch abhängig.

	B	$\overline{B}$	
M	**345**	**105**	450
$\overline{M}$	558	**355**	**913**
	903	**460**	1363

Beispiel 3

Im Jahr 2019 wurden im Durchschnitt 510 von 100 000 Personen aus der bayerischen Bevölkerung bei einem Verkehrsunfall verletzt. Jede sechste verunglückte Person gehörte zur Altersgruppe der 18- bis 24-Jährigen, obwohl der Anteil dieser Altersgruppe an der Gesamtbevölkerung nur 8 % betrug. Die Ereignisse J: „Gehört zur Gruppe der 18- bis 24-Jährigen" und U: „Gehört zu den Unfallopfern" werden betrachtet.

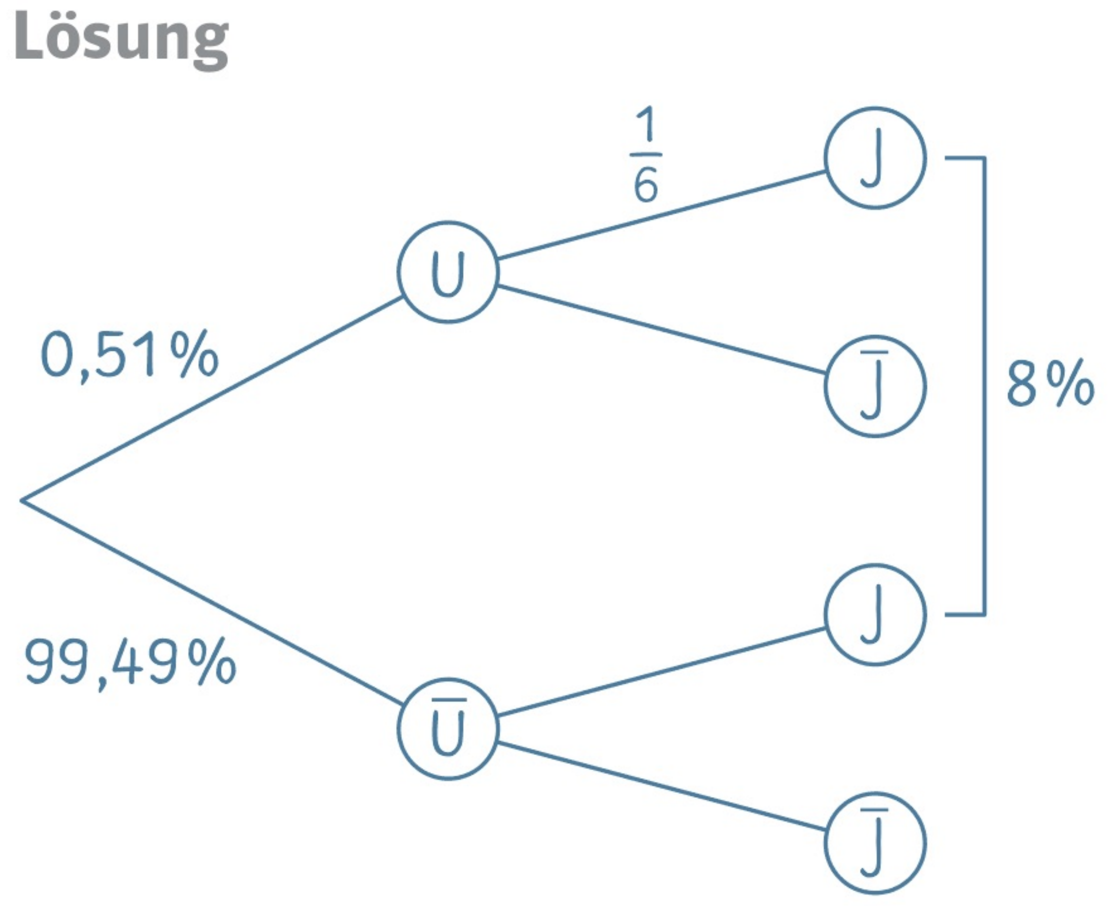
a) Stellen Sie die Aussage „Jede sechste verunglückte Person gehörte zu der Altersgruppe der 18- bis 24-Jährigen" mithilfe einer bedingten Wahrscheinlichkeit dar.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person aus Bayern Opfer eines Verkehrsunfalls und zwischen 18 und 24 Jahre alt war.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person der 18- bis 24-Jährigen Opfer eines Verkehrsunfalls wurde.

d) Erläutern Sie, wie groß der Anteil der 18- bis 24-Jährigen unter den Unfallopfern sein müsste, damit die Ereignisse J und U stochastisch unabhängig sind.

Lösung



a) $P_U(J) = \frac{1}{6}$

b) $P(U \cap J) = P(U) \cdot P_U(J) = 0{,}51\,\% \cdot \frac{1}{6} = 0{,}085\,\%$

c) $P_J(U) = \frac{P(U \cap J)}{P(J)} = \frac{0{,}085\,\%}{8\,\%} \approx 0{,}011 = 1{,}1\,\%$

d) Der Anteil der 18- bis 24-Jährigen unter den Unfallopfern beträgt $\frac{1}{6}$, also ca. 17 %. Damit die Ereignisse U und J stochastisch unabhängig sind, müsste dieser Anteil aber gleich dem Anteil der 18- bis 24-Jährigen an der Gesamtbevölkerung sein, also 8 %.

Aufgaben

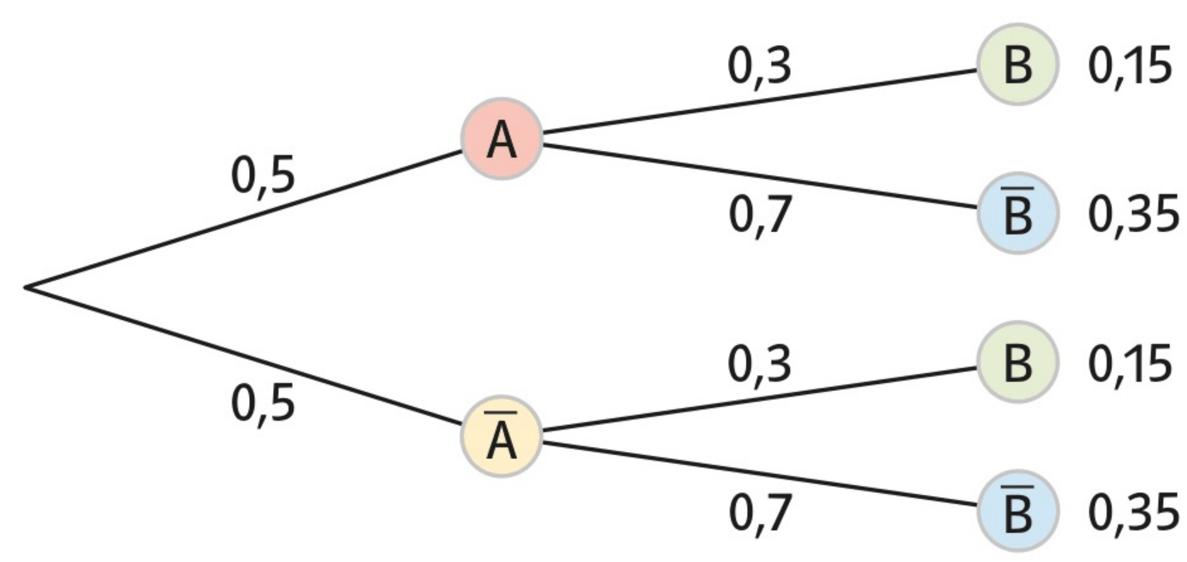
1 Bei einem Sehtest aller achtjährigen Kinder einer Stadt wurden 4445 Jungen und 4379 Mädchen untersucht. Bei den Jungen trugen 268 und bei den Mädchen 256 eine Brille. Mithilfe einer Kartei aller Achtjährigen wird ein Kind zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie die Ereignisse J: „Das Kind ist ein Junge" und B: „Das Kind trägt eine Brille" auf stochastische Unabhängigkeit.

2 Ein Zufallsexperiment hat die Ergebnismenge $\Omega = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ und die abgebildete Verteilung. Untersuchen Sie die Ereignisse $A = \{a; d\}$ und $B = \{c; d\}$ auf stochastische Unabhängigkeit.

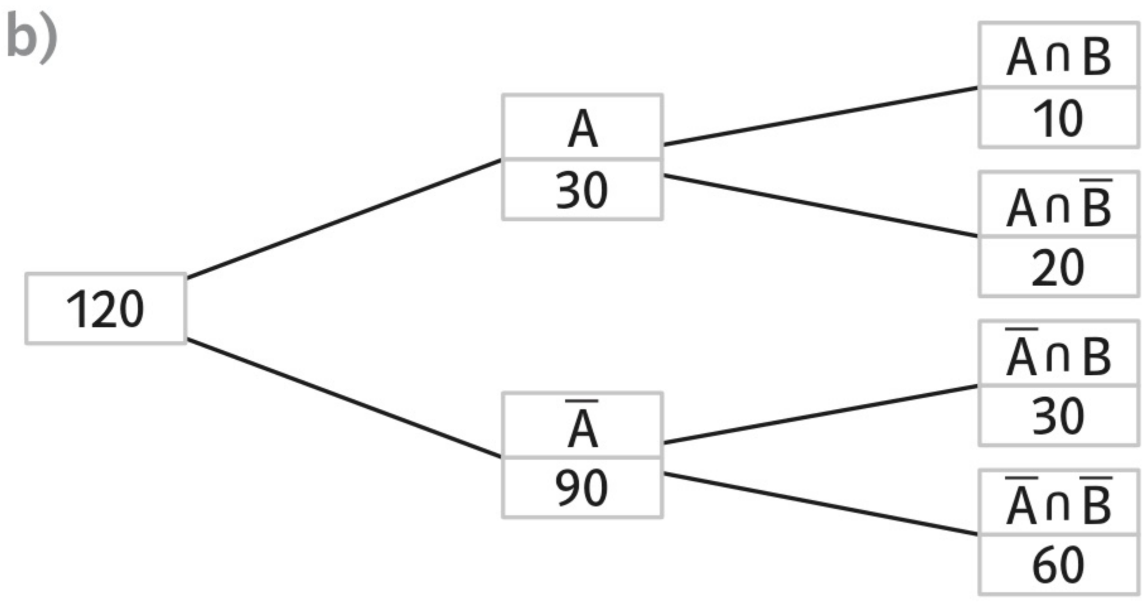
ω_i	a	b	c	d	e	f	g	h
$P(\omega_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

3 Beschreiben Sie, woran man schnell erkennen kann, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

a)



b)



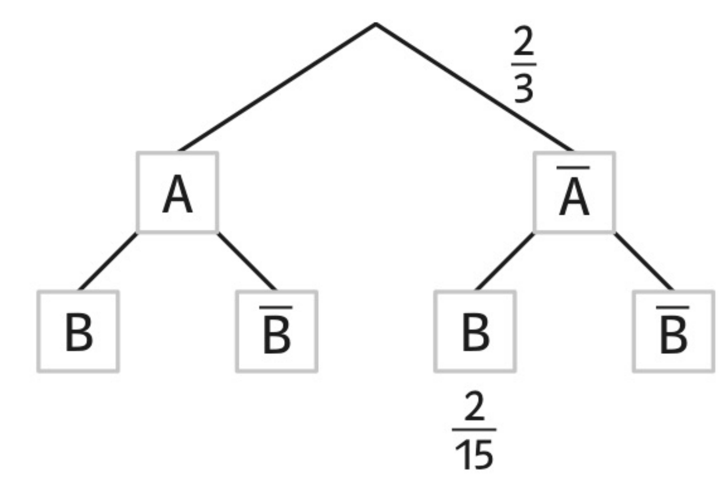
c)

	B	$\overline{B}$	
A	0,06	0,14	0,2
$\overline{A}$	0,24	0,56	0,8
	0,3	0,7	1

d)

	B	$\overline{B}$	
A	120	360	480
$\overline{A}$	240	720	960
	360	1080	1440

4 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3**
Das Baumdiagramm in der Abbildung gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B.



Test 1

Lösungen | Seite 206

5 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
In einer Gemeinde gibt es 6250 Haushalte, von denen 2250 über einen schnellen Internetanschluss verfügen. Zwei Drittel der Haushalte, die über einen schnellen Internetanschluss verfügen, besitzen auch ein Abonnement eines Streamingdiensts. 46 % aller Haushalte verfügen weder über einen schnellen Internetanschluss noch besitzen sie ein Abonnement eines Streamingdiensts.
Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

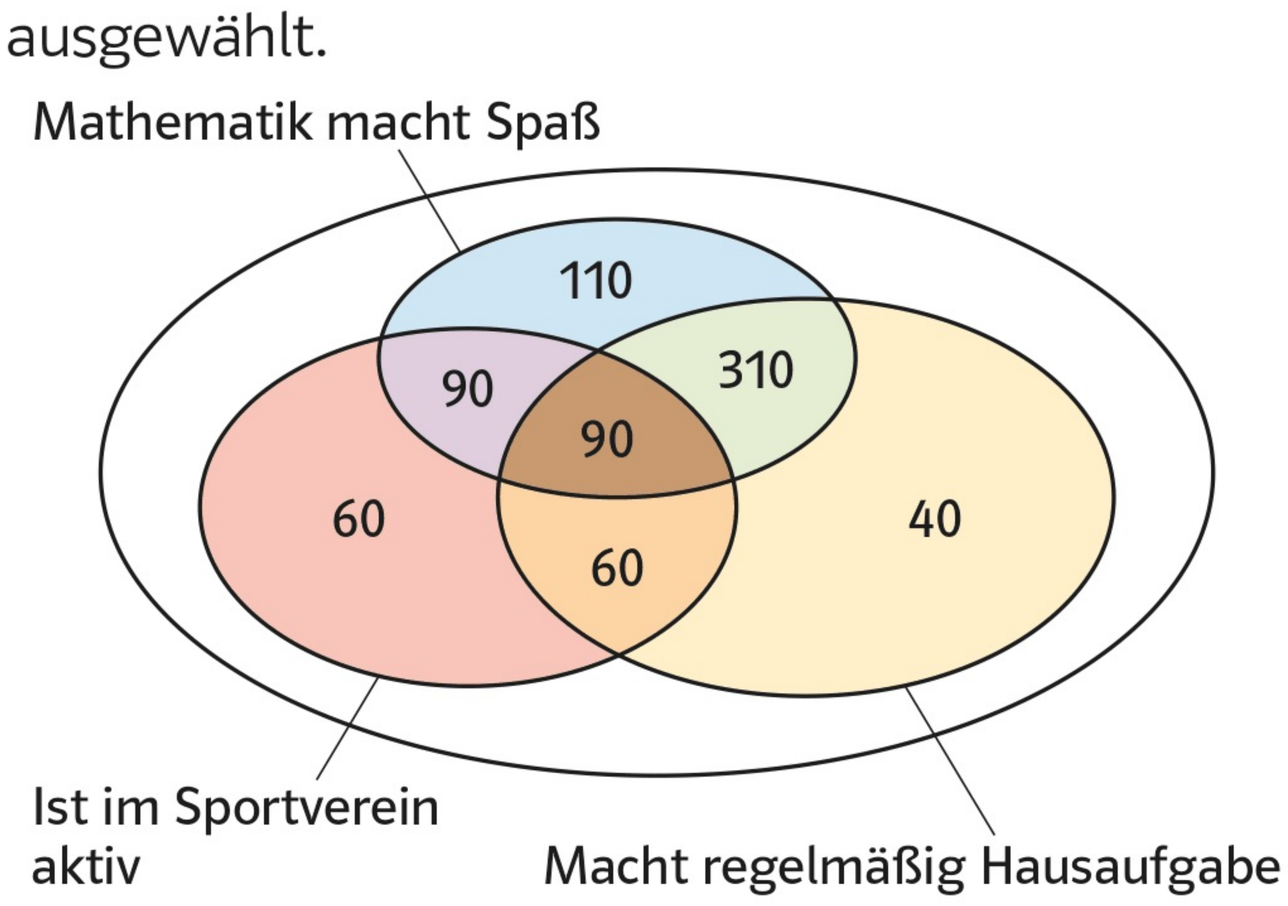
A: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt verfügt über einen schnellen Internetanschluss."
B: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt besitzt ein Abonnement eines Streamingdiensts."

Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf und überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

6 Bei einer Befragung von 1000 Schülerinnen und Schülern wurden drei Fragen gestellt:
A: „Machst du regelmäßig deine Hausaufgaben?"
B: „Macht dir Mathematik in der Schule Spaß?"
C: „Bist du aktives Mitglied in einem Sportverein?"
Im Mengendiagramm ist jeweils die Anzahl der Ja-Antworten eingetragen. Eine befragte Schülerin bzw. ein befragter Schüler wird zufällig ausgewählt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) sie bzw. er alle drei Fragen mit „nein" beantwortet hat,
(2) sie bzw. er Spaß an Mathematik hat und in einem Sportverein aktiv ist.

b) Durch die drei gestellten Fragen werden Ereignisse festgelegt. Untersuchen Sie alle möglichen Paare auf stochastische Unabhängigkeit.



7 Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen E und F. Die Wahrscheinlichkeit p ist größer als 0.

a) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit p nicht 0,15 betragen kann.

b) Ermitteln Sie den Wert für p, für die die Ereignisse E und F stochastisch unabhängig sind.

	E	$\overline{E}$	
F			$1-4p$
$\overline{F}$		p	$4p$
		$5p$	

8 Die Vierfeldertafel zeigt, wie viele Schülerinnen und Schüler am Theodor-Heuss-Gymnasium und am Lise-Meitner-Gymnasium einheimisch oder auswärtig sind.

	THG	LMG	Gesamt
Einheimisch	240	180	420
Auswärtig	360	270	630
Gesamt	600	450	1050

a) Eine Schülerin oder ein Schüler wird zufällig ausgewählt. Weisen Sie nach, dass die Ereignisse „Einheimischsein“ und „Zum-THG-gehen“ stochastisch unabhängig sind.

b) Eine auswärtige Schülerin verlässt das THG. Untersuchen Sie, wie sich das auf die stochastische Unabhängigkeit in Teilaufgabe a) auswirkt.

9 Zwei Würfel werden nacheinander geworfen.

a) Stellen Sie eine geeignete Ergebnismenge auf und bestimmen Sie ihre Mächtigkeit.

b) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E: „Der erste Würfel zeigt eine 6“ und
(1) F: „Die Augensumme beträgt 7“ stochastisch unabhängig sind,
(2) F: „Die Augensumme beträgt 8“ stochastisch unabhängig sind.

Um Ereignisse eines Zufallsexperiments auf stochastische Abhängigkeit zu untersuchen, ist es nicht immer erforderlich, Vierfeldertafeln zu betrachten.

10 Für die Herstellung von Kugelschreibern werden unter anderem Kunststoffhülsen und Minen angeliefert. Von den Kunststoffhülsen sind 10 % und von den Minen 5 % nicht einwandfrei. Ohne zu wissen, ob die beiden Teile in Ordnung sind, werden daraus Kugelschreiber gebaut.

a) Begründen Sie, warum die Fehler als stochastisch unabhängig aufgefasst werden können.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) beide Teile einwandfrei sind, (2) beide Teile defekt sind, (3) mindestens ein Teil defekt ist.

Strategie | Seite 188
Betrachten von etwas Gegenteiligem

11 Bei der Wahl der W-Seminare unter den 90 Schülerinnen und Schülern der 11. Klassen waren die Seminare der Fächer Sport und Geschichte am beliebtesten. In den Tabellen sind die Anzahlen der Erstwünsche und der Zulassungen für diese beiden Seminare zusammengestellt.

Geschichte	Erstwunsch	Zugelassen	Anteil
Mädchen	16	14	$a = \frac{14}{16}$
Jungen	1	1	b
	17	15	c

Sport	Erstwunsch	Zugelassen	Anteil
Mädchen	14	6	$d = \frac{6}{14}$
Jungen	19	9	e
	33	15	f

a) Berechnen Sie die Anteile erfüllter Erstwünsche a, b, c, d, e und f in Prozent. Erläutern Sie, warum sich aufgrund dieser Ergebnisse Mädchen benachteiligt fühlen könnten.

b) Berechnen Sie für beide Seminare zusammen den Anteil der Mädchen mit Zulassung und den Anteil der Jungen mit Zulassung in Prozent. Erläutern Sie, wer sich aufgrund dieses Ergebnisses benachteiligt fühlen könnte.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) und erläutern Sie, welche Besonderheiten im Wahlverhalten von Jungen und Mädchen zu diesen scheinbar widersprüchlichen Ergebnissen führen.

d) Die übrigen Schülerinnen und Schüler konnten auf die 60 Plätze der anderen vier Seminare so verteilt werden, dass alle ihren Erstwunsch erfüllt bekamen. Bestimmen Sie den Anteil der Mädchen mit erfülltem Erstwunsch unter allen Mädchen und den entsprechenden Anteil der Jungen, wenn unter den übrigen 40 Mädchen und Jungen noch
(1) 20 Mädchen sind, (2) 15 Mädchen sind, (3) zehn Mädchen sind.

Ergeben sich bei der Betrachtung einzelner Gruppen einer Gesamtstichprobe Zusammenhänge, die denen der Gesamtstichprobe widersprechen, so spricht man vom **Simpson-Paradoxon** (vgl. auch Aufgabe 10 auf Seite 93).

Edward Hugh Simpson (1922 – 2019) war ein britischer Statistiker.

12 a) Vervollständigen Sie die Einträge in der Vierfeldertafel im Heft. Die Ereignisse R und S sind stochastisch unabhängig.

Strategie | Seite 189
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

(1)

	S	$\overline{S}$	
R		$\frac{4}{15}$	
$\overline{R}$		$\frac{2}{15}$	
			1

(2)

	S	$\overline{S}$	
R		15%	
$\overline{R}$	30%		
			1

b) Stellen Sie sich gegenseitig vergleichbare Aufgaben.

Info

Fehlinterpretation von stochastischer Abhängigkeit

Im Rahmen einer Umfrage einer Zeitung wurden 30 Personen aus einer Rehaklinik nach ihrer sportlichen Aktivität und ihrem Gesundheitszustand befragt. Betrachtet werden die Merkmale „Sportlich aktiv" und „Fühlt sich gesund". Die Ergebnisse sind in der Vierfeldertafel dargestellt.

	Fühlt sich gesund	Fühlt sich nicht gesund	
Sportlich aktiv	6	14	20
Nicht sportlich aktiv	6	4	10
	12	18	30

Wählt man eine der Personen zufällig aus und betrachtet die Ereignisse G: „Die ausgewählte Person fühlt sich gesund" und S: „Die ausgewählte Person ist sportlich aktiv", so ergibt sich $P(G \cap S) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\,\%$ und $P(G) \cdot P(S) = \frac{12}{30} \cdot \frac{20}{30} = \frac{4}{15} = 26{,}\overline{6}\,\%$. Die Ereignisse G und S sind also stochastisch abhängig.

Da die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_S(\overline{G}) = \frac{14}{20} = 70\,\%$ deutlich über $P_S(G) = 30\,\%$ liegt, fühlen sich unter den Befragten die sportlich Aktiven mehrheitlich nicht gesund. Aufgrund dieses Ergebnisses erstellt die Zeitung die Schlagzeile *„Sport beeinträchtigt die Gesundheit"*. Die Zeitungsmeldung legt nahe, dass bei der zufälligen Auswahl einer Person aus der Gesamtbevölkerung die Ereignisse G und S stochastisch abhängig seien. Es gebe also einen Zusammenhang zwischen den Merkmalen „Sportlich aktiv" und „Fühlt sich nicht gesund". Einen solchen Zusammenhang nennt man in der Statistik auch **Korrelation**.

Bei der Zeitungsmeldung handelt es sich um eine Fehlinterpretation. Mögliche Gründe können folgende sein:

- Mit 30 Personen ist der Umfang der Stichprobe viel zu klein, um repräsentativ für die Gesamtbevölkerung zu sein.
- Die Wahl der Personengruppe ist ungeeignet, da bei der Umfrage in der Rehaklinik überdurchschnittlich viele gesundheitlich Beeinträchtigte befragt worden sein können.
- Die sportliche Betätigung der befragten Personen muss nicht der Grund für den Gesundheitszustand sein.

Eine Korrelation kann nur ein Indiz dafür sein, dass eine **Kausalität**, also ein ursächlicher Zusammenhang, besteht. Wird eine Korrelation zwischen zwei Merkmalen festgestellt, lässt sich daraus keine Kausalität ableiten. Ob eine Kausalität vorliegt, ist keine Frage der Mathematik, sondern eine Frage der Interpretation, die außerhalb der Mathematik liegt.

13 Der Engländer Francis Galton (1822–1911) ermittelte Daten zu Augenfarben von Vätern und Söhnen. Ein Vater-Sohn-Paar wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse V: „Der Vater ist helläugig" und S: „Der Sohn ist helläugig" werden betrachtet.

	S	$\overline{S}$	
V	471	151	622
$\overline{V}$	148	230	378
Gesamt	619	381	1000

Weisen Sie mithilfe der Vierfeldertafel nach, dass V und S stochastisch abhängig sind. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang in Bezug auf Kausalität.

14 Unter allen Schülerinnen und Schülern eines Jahrgangs wurden die letzten Zeugnisnoten in Mathematik und Physik anonym erfragt und in einer Vierfeldertafel zusammengefasst. Eine der befragten Personen wird zufällig ausgewählt.

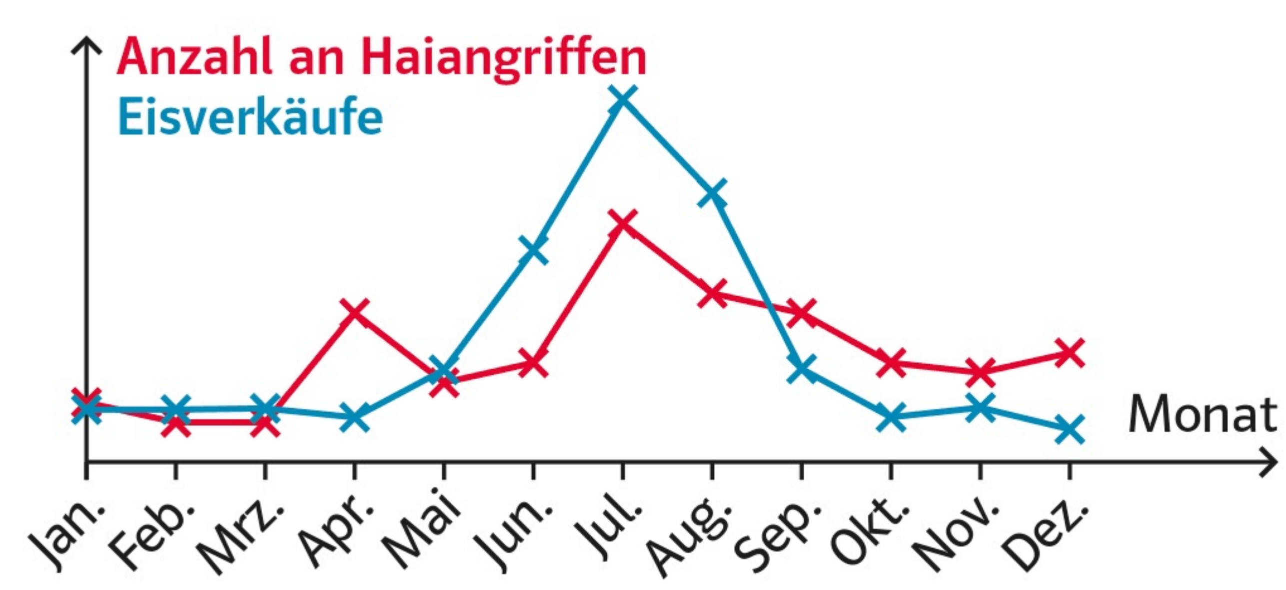
	M	$\overline{M}$	
P	35	15	50
$\overline{P}$	20	55	75
	55	70	125

a) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse M: „Die Person hat eine 1 oder 2 in Mathematik" und P: „Die Person hat eine 1 oder 2 in Physik" stochastisch abhängig sind.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(P \cap M)$ und $P_M(P)$ und beschreiben Sie die Korrelation der Merkmale „1 oder 2 in Physik" und „1 oder 2 in Mathematik" in Worten. Nennen Sie eine mögliche Ursache für die Korrelation im Sachzusammenhang.

15 Nach dem Sporttag der 5. bis 10. Klassen wertet ein Schüler für die Schülerzeitung die erfassten Personendaten und die Wettkampfergebnisse der Teilnehmenden aus und stellt eine Korrelation zwischen der Körpermasse und Sprungweite beim Weitsprung fest. Die Schülerzeitung macht daraus die Schlagzeile „Je schwerer, desto weiter!". Nehmen Sie dazu Stellung.

16 Auf einer Internetseite wird berichtet, dass die Anzahl von Haiangriffen in den USA und der Umsatz durch Eisverkäufe an dortigen Stränden korrelieren, und es wird das Diagramm rechts dazu abgebildet. Erläutern Sie, wie es zu der Korrelation zwischen Haiangriffen und Eisverkäufen kommt.



Test 2

Lösungen | Seite 207

17 In einem schwarzen Strumpf befinden sich vier rote und drei blaue Kugeln, in einem weißen Strumpf befinden sich acht rote und sechs blaue Kugeln. Es wird ein Strumpf zufällig ausgewählt und eine Kugel aus dem gewählten Strumpf gezogen.

a) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A: „Der schwarze Strumpf wird gewählt" und B: „Eine blaue Kugel wird gezogen" stochastisch unabhängig sind. Beurteilen Sie, ob $\overline{A}$ und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig sind oder nicht.

b) Franz hat noch sechs weitere rote Kugeln. Ermitteln Sie, wie die Kugeln auf die Strümpfe verteilt werden können, sodass A und B
(1) stochastisch unabhängig bleiben, (2) stochastisch abhängig werden.

18 E und F sind zwei Merkmale von Personen. Die Vierfeldertafel gibt an, wie die absoluten Häufigkeiten verteilt sind. Wählt man zufällig eine Person aus, so werden durch E und F Ereignisse festgelegt. E und F sind stochastisch unabhängig. Begründen Sie, dass aus der stochastischen Unabhängigkeit von E und F die Beziehung $ad = bc$ folgt.

	E	$\overline{E}$
F	a	b
$\overline{F}$	c	d

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 207

G 19 Geben Sie alle Gleichungen an, die man ohne Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen geschickt lösen kann, und berechnen Sie deren Lösung ohne Lösungsformel. Lösen Sie anschließend alle übrigen Gleichungen unter Nutzung der Lösungsformel.

1 $x^2 + 2x = 5$

2 $\frac{1}{2}t = \frac{1}{4}t^2$

3 $\frac{1}{5}(x^2 - 4x + 2) = -\frac{1}{5}$

4 $6x + 5x^2 = x^2$

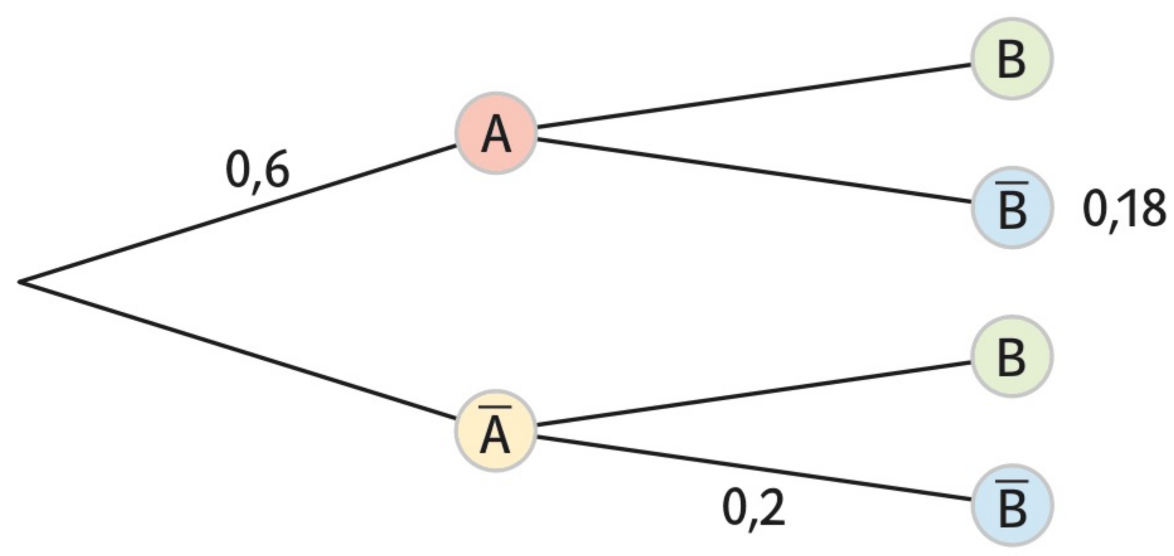
5 $2(1 - 3x)(x + 2) = 0$

6 $0 = 4(2 - 0{,}25t)^2$

7 $(2x - 2)(x + 2) = 2$

Wiederholen

1 A und B sind Ereignisse eines Zufallsexperiments.



a) Berechnen Sie $P_A(\overline{B})$, $P_A(B)$ und $P_{\overline{A}}(B)$ und ergänzen Sie das Baumdiagramm im Heft.

b) Erstellen Sie zu A und B eine passende Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten.

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$.

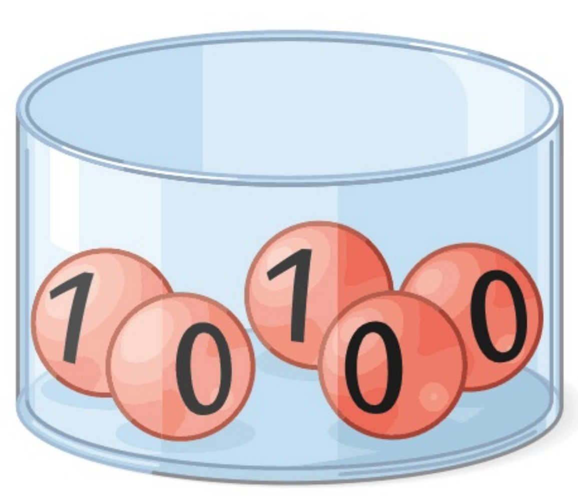
d) Erstellen Sie ein passendes Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten, bei dem das Ereignis B auf der ersten Stufe steht.

2 Ein Autobesitzer sucht wegen merkwürdiger Motorgeräusche seine Werkstatt auf. Dort hört sich eine Mechatronikerin die Geräusche an und stellt zunächst die Vermutung „Motor defekt“ (D) oder nicht $(\overline{D})$ auf. Bei der folgenden genaueren Untersuchung stellt sie dann einen Motorschaden (M) fest oder nicht $(\overline{M})$.

a) Beschreiben Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten jeweils mit Worten.
(1) $P_M(D)$ (2) $P_{\overline{M}}(D)$ (3) $P_{\overline{M}}(\overline{D})$ (4) $P_D(M)$ (5) $P_{\overline{D}}(M)$ (6) $P_{\overline{D}}(\overline{M})$

b) Erläutern Sie, welche der in Teilaufgabe a) genannten Wahrscheinlichkeiten aus Sicht des Autobesitzers möglichst groß bzw. möglichst klein sein sollten.

3 Aus einer Urne mit fünf Kugeln, von denen drei mit 0 und zwei mit 1 beschriftet sind, werden nacheinander zwei zufällig entnommen. Es werden die Ereignisse A: „Die erste Kugel ist mit 0 beschriftet“ und B: „Die zweite Kugel ist mit 1 beschriftet“ betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ und ermitteln Sie, ob die Ereignisse stochastisch unabhängig sind, wenn die erste Kugel nach dem Ziehen



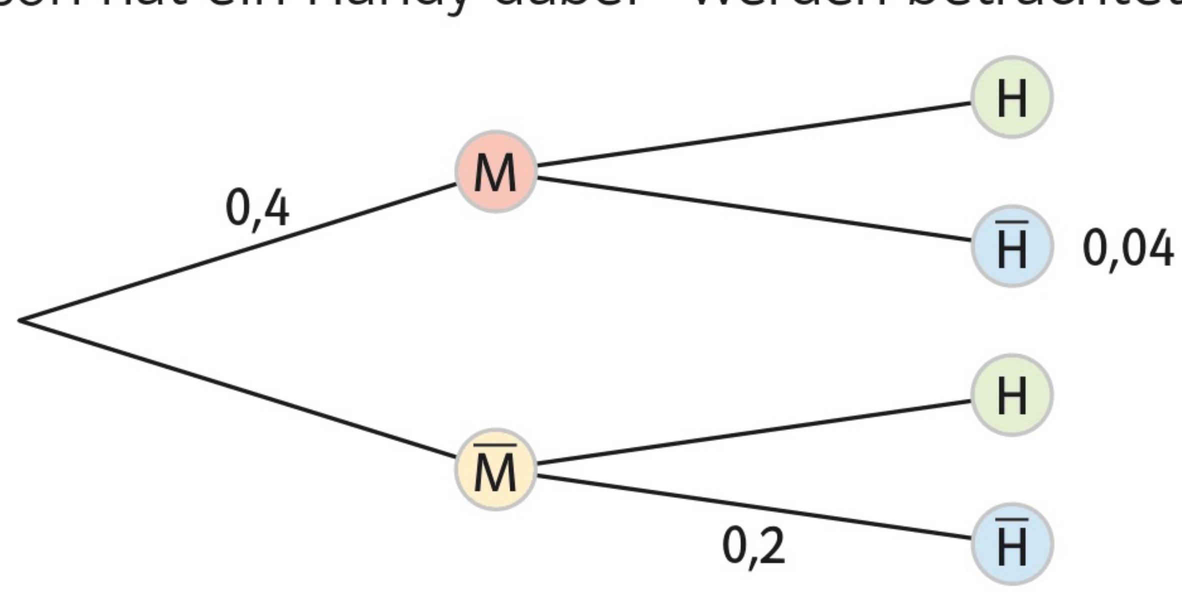
a) zurückgelegt wird, **b)** nicht zurückgelegt wird.

4 In einer Urne mit acht schwarzen und zwei goldenen Kugeln werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Es werden die Ereignisse A: „Im ersten Zug wird eine goldene Kugel gezogen“, B: „Im zweiten Zug wird eine schwarze Kugel gezogen“ und C: „Es wird genau eine goldene Kugel gezogen“ betrachtet. Weisen Sie nach, dass die Ereignisse

a) A und B stochastisch unabhängig sind, **b)** A und C stochastisch abhängig sind.

5 In der Oberstufe sind 4 % männlich und haben kein Handy dabei. Insgesamt sind 40 % männlich. Unter nicht männlichen Personen haben 20 % kein Handy dabei. Johannas Handyakku ist leer. Sie möchte die erste Person der Oberstufe, die sie zufällig trifft, um ein Telefonat bitten. Die Ereignisse M: „Die Person ist männlich“ und H: „Die Person hat ein Handy dabei“ werden betrachtet.

a) Ergänzen Sie das Baumdiagramm im Heft.



b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Person des Jahrgangs, die Johanna trifft, ein Handy dabeihat.

c) Johanna trifft zuerst einen Jungen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er ein Handy dabeihat.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Person, die Johanna trifft, ein Junge mit Handy ist.

e) Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{M}}(H)$ in Worten und berechnen Sie diese.

f) Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{M} \cap H)$ in Worten und berechnen Sie diese.

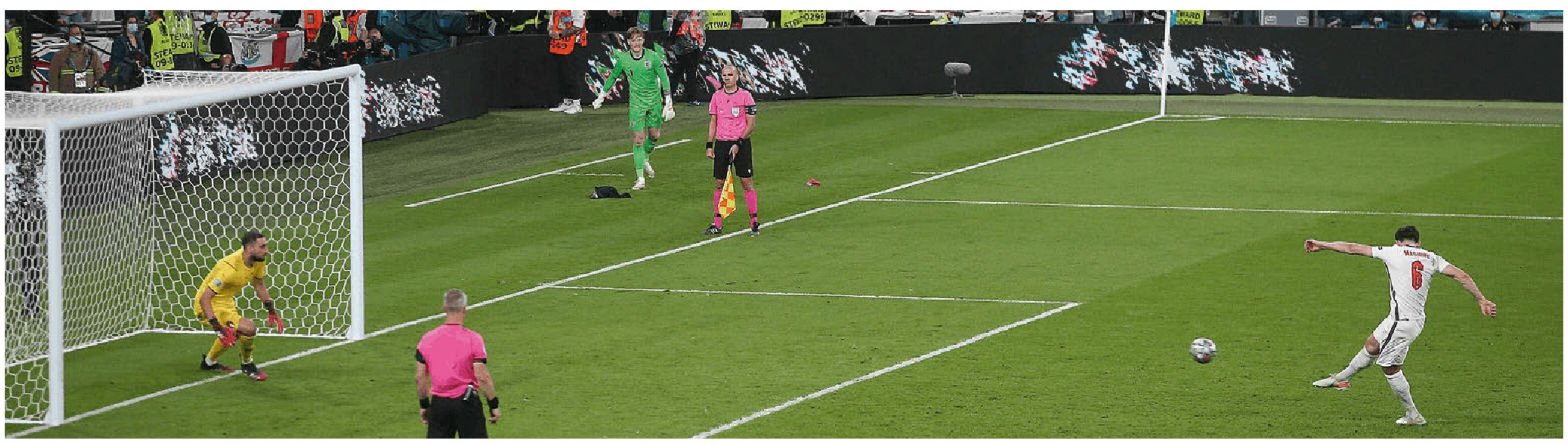
g) Einen Tag später findet Johanna bei einer Infoveranstaltung für die Oberstufe ein Handy. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Handy einem Jungen gehört.

h) Deuten Sie den Term $\frac{0{,}04}{0{,}04 + 0{,}6 \cdot 0{,}2}$ im Sachzusammenhang.

6 Eine Untersuchung von Elfmetern bei Fußball-Welt- und -Europameisterschaften der Männer aus 50 Jahren zeigte, dass die Schützen bei etwa 22 % aller Elfmeter halbhoch schossen und trafen. Insgesamt führten etwa 75 % aller Elfmeter zu einem Tor. Etwa 27 % der Elfmeter wurden halbhoch geschossen. Ein Elfmeter aus der Untersuchung wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse H: „Der Schütze schoss den Ball halbhoch auf das Tor“ und T: „Der Schütze erzielte einen Treffer“ werden betrachtet.

	H	$\overline{H}$	
T	22 %		75 %
$\overline{T}$			
	27 %		

a) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel im Heft.
b) Untersuchen Sie die Ereignisse H und T auf stochastische Unabhängigkeit.
c) Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P_H(T)$ und $P_{\overline{H}}(T)$ in Worten und berechnen Sie diese.
d) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben b) und c) im Sachzusammenhang.



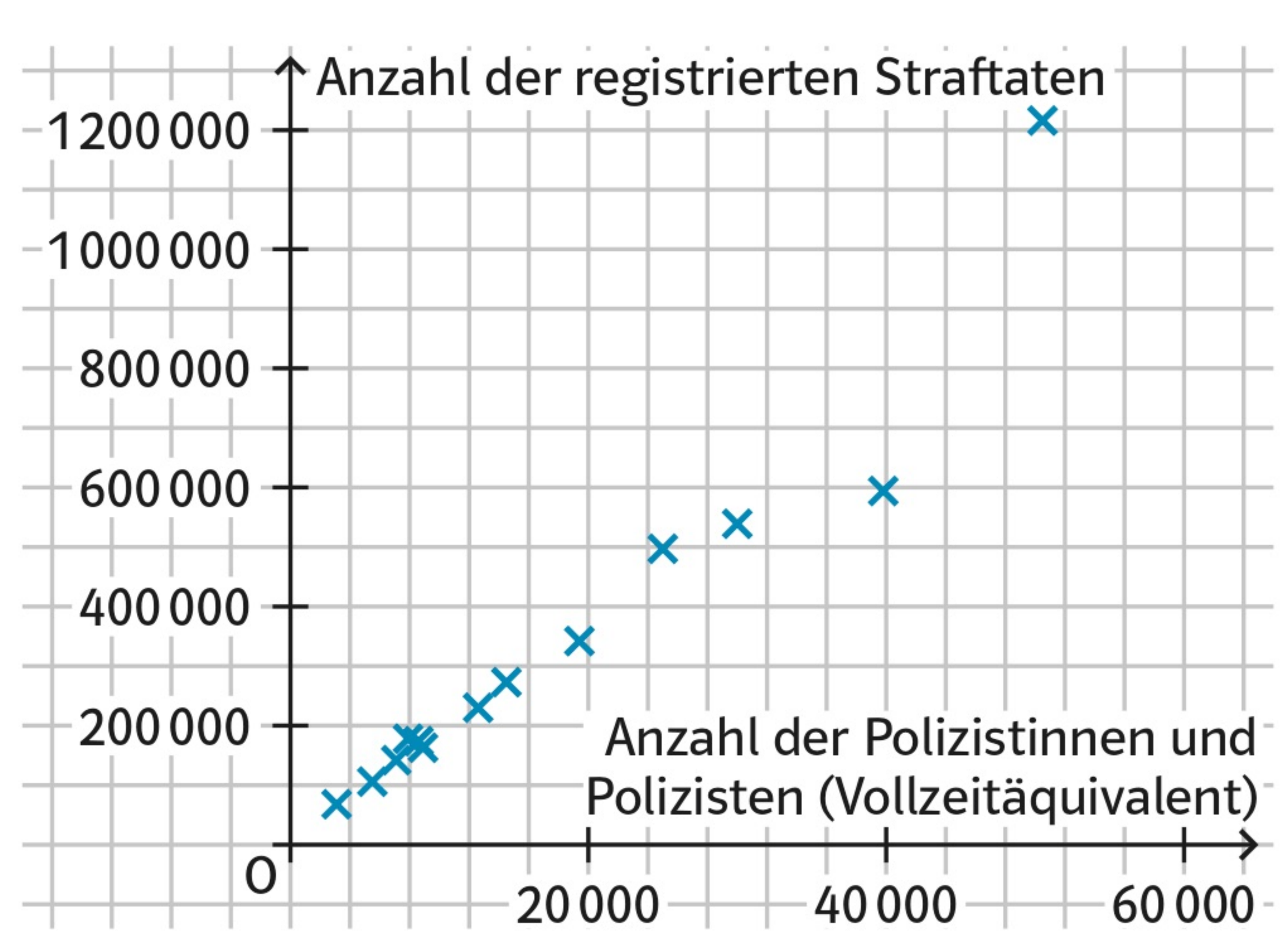
Vertiefen

7 In Urne 1 befinden sich zehn schwarze und zehn weiße Kugeln. In Urne 2 befinden sich k schwarze und viermal so viele weiße Kugeln, wobei $k > 0$ gilt. Zuerst wird aus Urne 1 eine Kugel zufällig gezogen und in Urne 2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus Urne 2 gezogen und in Urne 1 gelegt. Nun befinden sich a schwarze Kugeln in Urne 1.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

a) Geben Sie an, welche Werte a annehmen kann.
b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $a = 10$ gilt, beträgt $\frac{31}{61}$. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von k.
c) Die Ereignisse E: „Aus Urne 1 wird eine schwarze Kugel gezogen“ und Z: „In Urne 1 befinden sich am Ende zehn schwarze Kugeln“ werden betrachtet. Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Ereignisse E und Z stochastisch abhängig sind.

8 Im Diagramm rechts ist der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Polizistinnen und Polizisten und der Anzahl der registrierten Straftaten in 13 deutschen Flächenbundesländern dargestellt.



a) In einem Kommentar unter einem Onlineartikel mit dem abgebildeten Diagramm wird die Behauptung „Je mehr Polizisten angestellt werden, desto mehr Straftaten werden begangen“ aufgestellt. Diskutieren Sie über diese Behauptung.
b) Beschreiben Sie die beobachtbare Korrelation zwischen den Merkmalen „Anzahl der Polizistinnen und Polizisten“ und „Anzahl der registrierten Straftaten“ in Worten. Erläutern Sie, inwiefern eine Kausalität vorliegen könnte.
c) Diskutieren Sie, warum in dieser Übersicht die Stadtstaaten Berlin, Bremen und Hamburg möglicherweise nicht berücksichtigt worden sind.

9 Wie die Anwesenheitsliste der Klasse 11c der letzten vier Schulwochen zeigt, waren Gregor und Ramses mehrfach nicht in der Schule. Beide waren jeweils krankgemeldet. Die Ereignisse G: „Gregor ist anwesend", R: „Ramses ist anwesend" und S: „Eine Schulaufgabe findet statt" werden betrachtet.

a) Weisen Sie mithilfe der abgebildeten Übersicht für die Abwesenheitszeiten von Gregor und Ramses nach, dass die Ereignisse $\overline{G}$ und $\overline{R}$ stochastisch abhängig sind.

b) Herr Holms, Physik-Lehrer in der 11c, weiß, dass sich Gregor und Ramses in letzter Zeit aus dem Weg gehen. Er vermutet, dass sich die beiden nicht absprechen, aber den gleichen Grund für die gemeinsamen Fehlzeiten haben. Deswegen sieht er sich den Schulaufgabenplan der Klasse an. Untersuchen Sie, ob es eine stochastische Abhängigkeit zwischen $\overline{G}$ und S bzw. zwischen $\overline{R}$ und S gibt. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

‹ März ›

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Mo	Di	Mi	Do	Fr
	5.	6.	7.	8.	9.	12.	13.	14.	15.	16.
G			×			×			×	×
R		×	×							×

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Mo	Di	Mi	Do	Fr
	19.	20.	21.	22.	23.	26.	27.	28.	29.	30.
G	×				×	×	×			
R	×	×				×				

Ein Kreuz (×) bedeutet, dass der jeweilige Schüler fehlte.

Schulaufgabenplan:
7.3.: Mathe
16.3.: Deutsch
19.3.: Englisch
23.3.: Latein
29.3.: Physik

Vernetzen

10 An einer Universität sind die drei Studiengänge Jura, Medizin und Psychologie zulassungsbeschränkt. In der Zeitung steht, dass sich für das letzte Wintersemester 450 Frauen und 300 Männer für die insgesamt 250 Studienplätze beworben haben; davon wurden 120 Männer und 130 Frauen zugelassen.

a) In der lokalen Zeitung werden Leserbriefe veröffentlicht, in denen der Verdacht geäußert wird, dass Frauen beim Zulassungsverfahren benachteiligt worden sind. Diskutieren Sie, wie man zu diesem Verdacht kommen kann.

b) Aufgrund der vielen kritischen Rückmeldungen sieht sich die Universität veranlasst, genauere Zahlen zu veröffentlichen. Weisen Sie anhand der drei Tabellen nach, dass die veröffentlichten Zahlen für die einzelnen Studiengänge zu den zuerst veröffentlichten Zahlen passen. Dabei steht F für Frauen und M für Männer.

Jura:

	Beworben	Zugelassen
F	80	49
M	120	71
	200	120

Medizin:

	Beworben	Zugelassen
F	120	58
M	90	42
	210	100

Psychologie:

	Beworben	Zugelassen
F	250	23
M	90	7
	340	30

c) Teilen Sie sich untereinander die Daten der drei Studiengänge auf und führen Sie geeignete Berechnungen durch, mit denen nachgewiesen werden kann, dass mit den nun vorliegenden genaueren Daten nicht mehr von einer Benachteiligung der sich bewerbenden Frauen auszugehen ist.

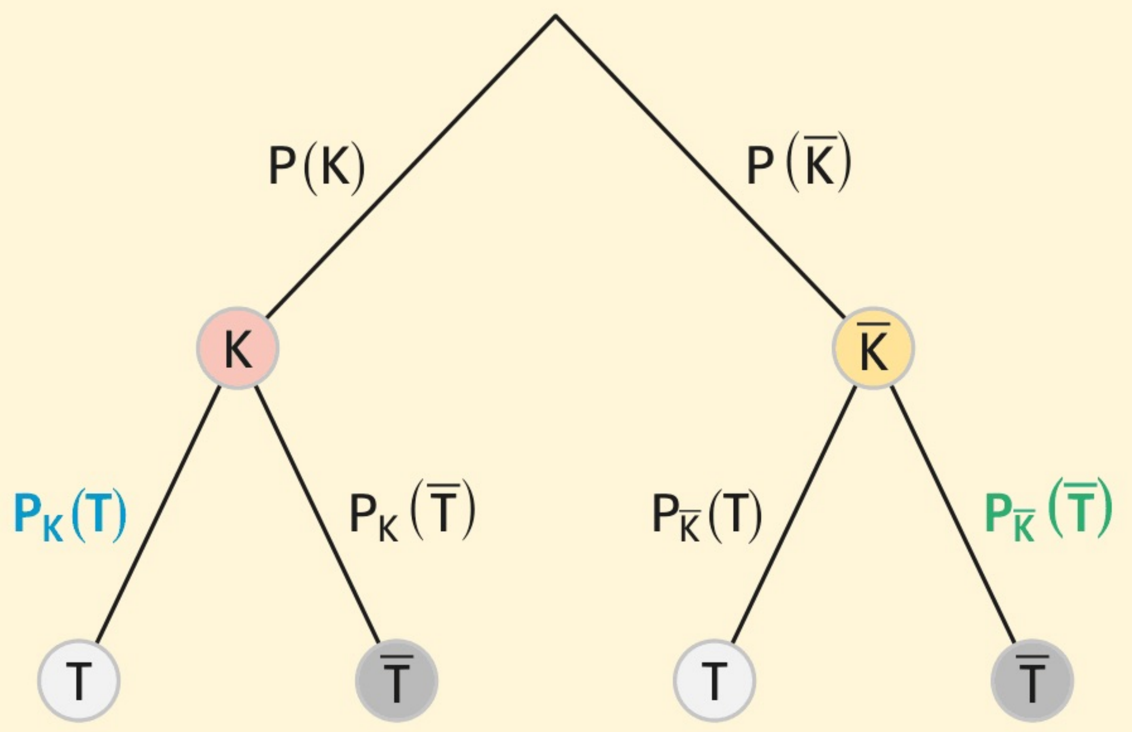
d) Verfassen Sie gemeinsam einen kurzen Text aus Sicht der Universitätsleitung, in dem erläutert wird, was die Ursache dafür ist, dass sich trotz der Zahlen der einzelnen Studiengänge für das gesamte Zulassungsverfahren eine scheinbare Benachteiligung von weiblichen Bewerberinnen ergibt.

Virusinfektionen, Schnelltests und Impfungen

In der Medizin werden diagnostische Verfahren angewendet, um Krankheiten festzustellen. Dazu wird beispielsweise das Blut einer Person im Labor daraufhin untersucht, ob gewisse Blutwerte Anhaltspunkte für eine bestimmte Krankheit liefern.
Bei einem diagnostischen Verfahren (kurz Test) können aber auch folgende Fehler auftreten:
- Der Test zeigt eine Krankheit an, obwohl sie nicht vorhanden ist,
- Der Test zeigt keine Krankheit an, obwohl sie vorhanden ist.

Das Ergebnis eines Tests wird als **positiv** bezeichnet, wenn es die Krankheit anzeigt, unabhängig davon, ob die Krankheit vorhanden ist oder nicht.
Die **Sensitivität** eines Tests gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Test die Krankheit anzeigt, wenn sie tatsächlich vorhanden ist.
Die **Spezifität** eines Tests gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Test die Krankheit nicht anzeigt, wenn sie nicht vorhanden ist.
Sensitivität und Spezifität eines Tests sollten daher möglichst groß sein.

Man betrachtet das Zufallsexperiment „Zufälliges Auswählen einer Person, die auf eine Krankheit getestet wurde“ und dabei die beiden Ereignisse
K: „Person hat die Krankheit“ und
T: „Test hat ein positives Ergebnis“.
Dann sind Sensitivität und Spezifität Bezeichnungen für spezielle bedingte Wahrscheinlichkeiten.
Die Sensitivität ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_K(T)$.
Die Spezifität ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{K}}(\overline{T})$.



Um ein positives Testergebnis richtig beurteilen zu können, muss man wissen, wie hoch in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit ist, tatsächlich mit dem Virus infiziert zu sein.
Gefragt ist somit nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_T(K)$. Diese kann dem Baumdiagramm nicht unmittelbar entnommen werden.

Bei der Analyse von Tests auf Infektionen kommt es immer wieder zu Situationen, die mithilfe der Betrachtung der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_T(K)$ treffend interpretiert werden können.

Anhand des fiktiven Y-Virus werden nun an realen Begebenheiten orientierte Situationen durchgespielt wie zum Beispiel die Verlässlichkeit von positiven Testergebnissen bei verschiedenen Infektionsraten.

1 Der Y-Virus-Schnelltest der Firma Ibixund hat eine Sensitivität von 95 % und eine Spezifität von 99 %. Es werden die Ereignisse Y: „Die getestete Person hat eine Y-Virus-Infektion“ und T: „Der Test zeigt an, dass eine Y-Virus-Infektion vorliegt“ betrachtet.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte positiv getestete Person tatsächlich infiziert ist, wenn davon auszugehen ist, dass
(1) 40 unter 100 000 Personen infiziert sind,
(2) 400 unter 100 000 Personen infiziert sind,
(3) unter 100 Personen eines Altenheimes in etwa 40 infiziert sind.

b) Interpretieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich der Aussagekraft eines positiven Testergebnisses bei verschieden hohen Infektionsraten.

2 In einem Krankenhaus befinden sich Patienten mit verschiedenen Virusinfektionen, die unter ähnlichen Symptomen leiden. In diesem Zuge werden all diese Patienten auf die Infektion mit dem Y-Virus getestet. Der Anteil der tatsächlich an dem Y-Virus infizierten Patienten wird als Infektionsrate a bezeichnet.

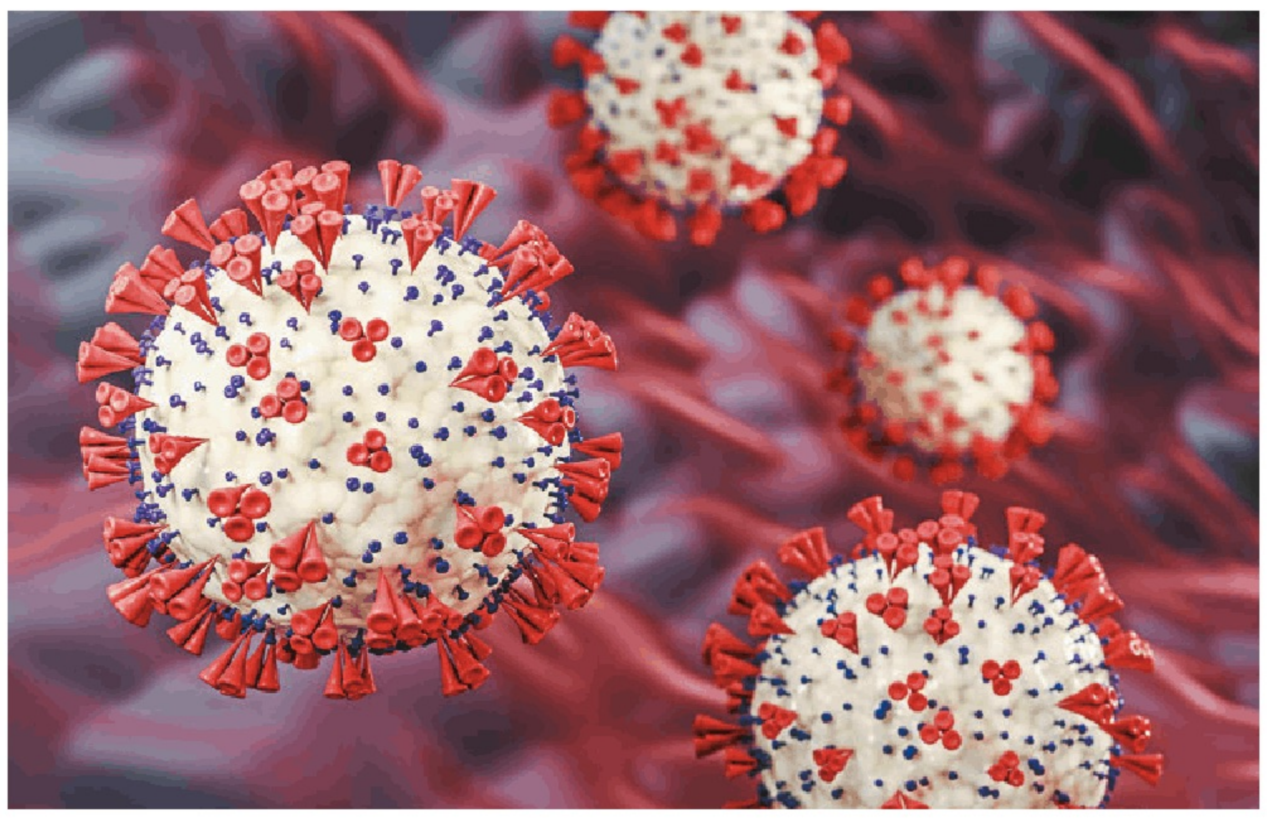


a) Die Sensitivität der in dem Krankenhaus regelmäßig verwendeten Schnelltests beträgt 99 %, die Spezifität 98 %. Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine positiv getestete Person tatsächlich infiziert ist, in diesem Fall $P_1(a) = \frac{0{,}99\,a}{0{,}97\,a + 0{,}02}$ beträgt. Berechnen Sie, für welche Werte von a diese Wahrscheinlichkeit mindestens 95 % beträgt. Tragen Sie in einem Diagramm die Wahrscheinlichkeit $P_1(a)$ in Abhängigkeit der Infektionsrate a an.

b) Eine Schnelltestlieferung beinhaltet eine Charge mit minderwertigen Schnelltests, die lediglich eine Sensitivität von 80 % und eine Spezifität von 90 % besitzen. Ermitteln Sie einen Term $P_2(a)$ in Abhängigkeit von a für die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person tatsächlich infiziert ist. Berechnen Sie, für welche Werte von a diese Wahrscheinlichkeit mindestens 95 % beträgt. Ergänzen Sie das Diagramm aus Teilaufgabe a) mit einem Graphen für die Wahrscheinlichkeit $P_2(a)$ in Abhängigkeit von a.

c) Erläutern Sie, inwiefern die Qualität der beiden Tests aus den Teilaufgaben a) und b) im Diagramm sichtbar wird.

3 Sowohl bei Grippe-, Corona- und Rotaviren als auch bei anderen Virengruppen ist es möglich, dass es trotz einer vorhandenen Impfung zu einer Infektion kommt. Anhand des fiktiven Y-Virus wird ein Fall mit an der Realität angelehnten Zahlen betrachtet.



Während einer anhaltenden Infektionswelle des Y-Virus befanden sich am 1. Dezember 1170 Personen, die mindestens 60 Jahre alt waren und deren Impfstatus gegen das Y-Virus bekannt war, wegen einer Y-Virus-Erkrankung auf deutschen Intensivstationen. Davon waren 480 vollständig gegen das Y-Virus geimpft. In Deutschland lebten zu dem betrachteten Zeitpunkt etwa 23 Millionen Menschen, die mindestens 60 Jahre alt waren.

a) Erläutern Sie, warum eine alleinige Betrachtung der Anteile der vollständig Geimpften und nicht vollständig Geimpften unter den 1170 am Y-Virus erkrankten Personen auf den Intensivstationen nicht ausreicht, um die Wirksamkeit einer Y-Virus-Impfung zu beurteilen.

b) Wichtig für eine Beurteilung der Wirksamkeit einer Y-Virus-Impfung sind die Impfquoten innerhalb der untersuchten Personengruppe. Eine Person, die mindestens 60 Jahre alt ist, wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse G: „Die Person ist vollständig geimpft“ und I: „Die Person befindet sich wegen einer Y-Virus-Erkrankung auf der Intensivstation“ werden betrachtet. Erläutern Sie, warum in diesem Sachzusammenhang eine Vierfeldertafel keine gut geeignete Darstellungsform ist.

c) Am 1. Dezember lag der Anteil der vollständig Geimpften unter allen, die mindestens 60 Jahre alt waren, bei über 85 %. Zeigen Sie, dass die Ereignisse I und G stochastisch abhängig sind. Erläutern Sie anhand der Ergebnisse, dass eine Y-Virus-Impfung in vielen Fällen schwere Krankheitsverläufe bei einer Y-Virus-Erkrankung verhindert hat.

d) Am 1. Dezember waren 71 % der mindestens 60-Jährigen, die mit Symptomen am Y-Virus erkrankt waren, vollständig geimpft. Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

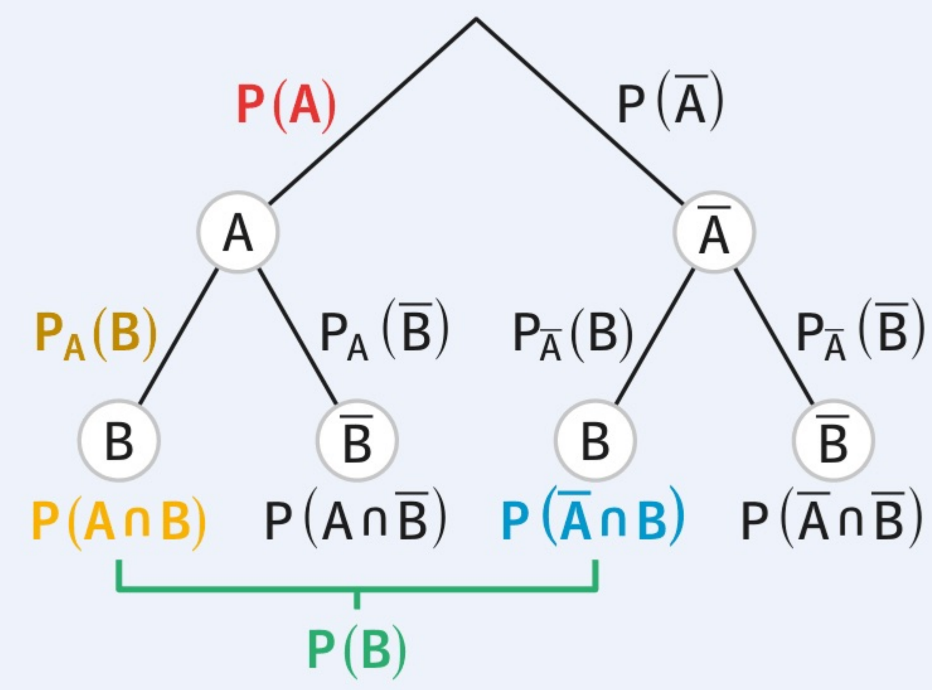
Rückblick

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_B(A)$

Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$, so versteht man unter der **bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$** die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist. Es gilt

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

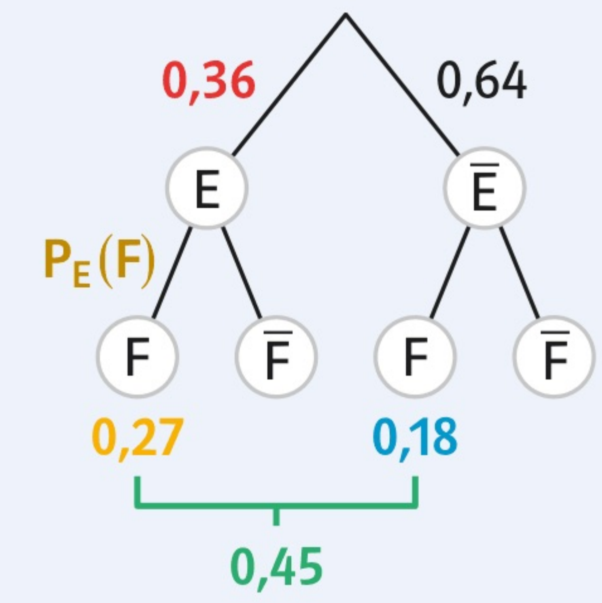


Mit dem Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel mit eingetragenen Wahrscheinlichkeiten lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ wie folgt berechnen:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}.$$

Für die Ereignisse E und F gilt folgende Vierfeldertafel bzw. folgendes Baumdiagramm:

	F	$\overline{F}$	
E	0,27	0,09	0,36
$\overline{E}$	0,18	0,46	0,64
	0,45	0,55	1



Daraus ergibt sich:

$P_E(F) = \frac{0{,}27}{0{,}36} = \frac{3}{4} = 0{,}75,$

$P_F(E) = \frac{0{,}27}{0{,}27 + 0{,}18} = \frac{0{,}27}{0{,}45} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.
Andernfalls nennt man A und B **stochastisch abhängig**.

E und F sind stochastisch abhängig, denn es gilt
$P(E) \cdot P(F) = 0{,}36 \cdot 0{,}45 = 0{,}162 \neq 0{,}27 = P(E \cap F)$.

Stochastische Unabhängigkeit in Vierfeldertafeln

Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so ist die zugehörige Vierfeldertafel eine Multiplikationstafel.

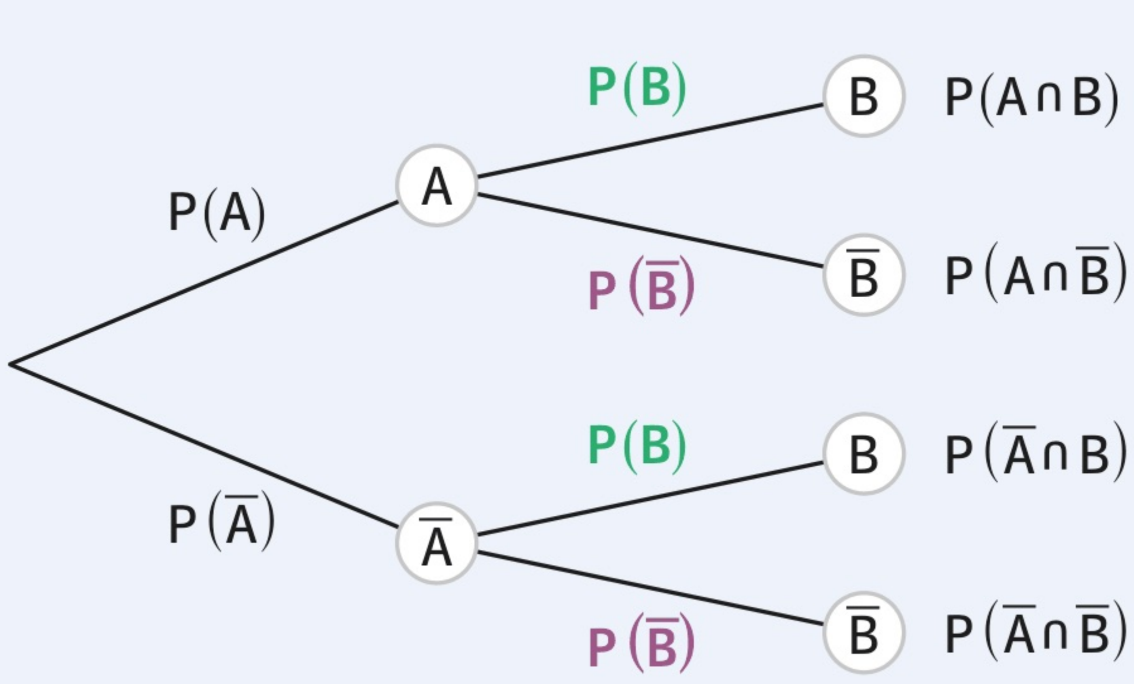
	B	$\overline{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}) \cdot P(B)$	$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Die Ereignisse R und S sind stochastisch unabhängig mit $P(R) = 0{,}4$ und $P(S) = 0{,}3$. Dann gilt $P(R \cap S) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

	S	$\overline{S}$	
R	$0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$	0,28	0,4
$\overline{R}$	0,18	0,42	0,6
	0,3	0,7	1

Stochastische Unabhängigkeit in Baumdiagrammen

Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so können an den Ästen der zweiten Stufe $P_A(B)$ und $P_{\overline{A}}(B)$ durch $P(B)$ ersetzt werden. Entsprechend können $P_A(\overline{B})$ und $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ durch $P(\overline{B})$ ersetzt werden.

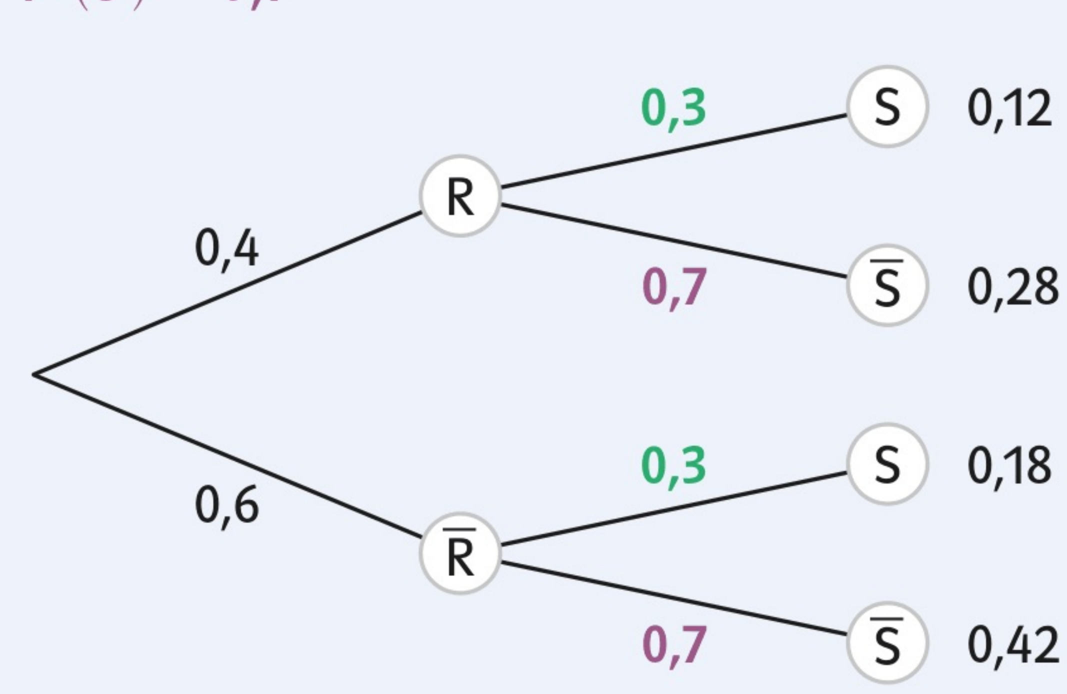


$P_R(S) = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3,\ P_{\overline{R}}(S) = \frac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3$

$P(S) = 0{,}3$

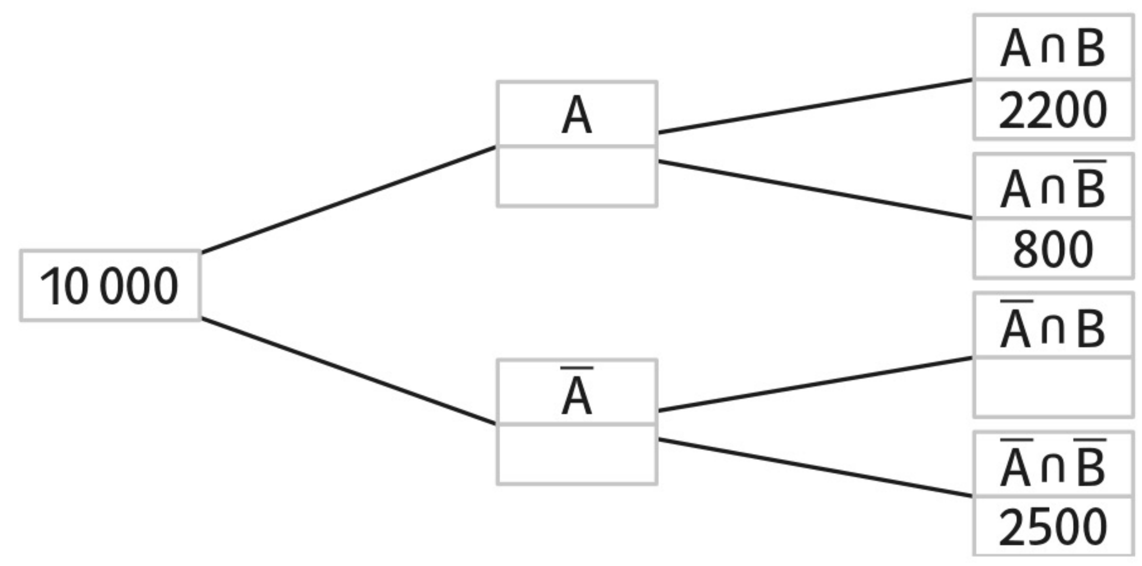
$P_R(\overline{S}) = \frac{0{,}28}{0{,}4} = 0{,}7,\ P_{\overline{R}}(\overline{S}) = \frac{0{,}42}{0{,}6} = 0{,}7$

$P(\overline{S}) = 0{,}7$



Lösungen | Seite 207

1 Die Ereignisse A und B gehören zu einem Zufallsexperiment.



a) Ergänzen Sie das Baumdiagramm im Heft.
b) Berechnen Sie $P_A(\overline{B})$, $P_A(B)$ und $P_{\overline{A}}(B)$.
c) Erstellen Sie eine zum gegebenen Baumdiagramm passende Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten.
d) Erstellen Sie ein passendes Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten, das zuerst nach dem Ereignis B unterscheidet.
e) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$, $P_{\overline{B}}(A)$ und $P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

2 Von den 120 Angehörigen der Jahrgangsstufe 11 werden die Merkmale
K: „Geht regelmäßig ins Kino“ und
S: „Ist Mitglied in einem Sportverein“
betrachtet. Eine Person wird zufällig bestimmt.

	K	$\overline{K}$	
S			48
$\overline{S}$		68	
	24		120

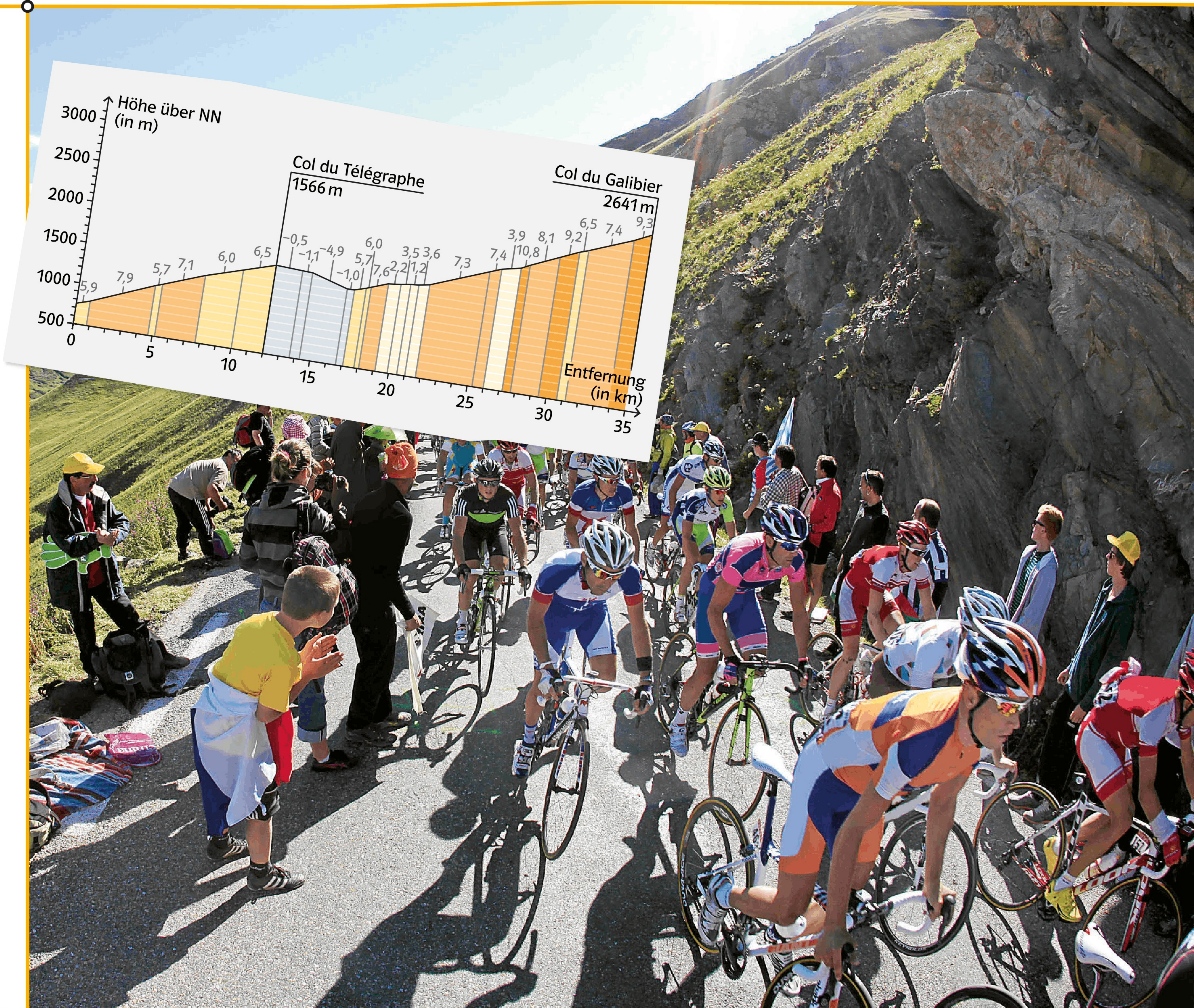
a) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel im Heft.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person
(1) regelmäßig ins Kino geht,
(2) regelmäßig ins Kino geht und Mitglied in einem Sportverein ist,
(3) regelmäßig ins Kino geht, wenn man weiß, dass sie Mitglied in einem Sportverein ist.

3 Einer Nachwahlbefragung zur Europawahl unter deutschen Wählenden zufolge kannten 32 % aller Befragten den Spitzenkandidaten der Y-Partei nicht. Unter den Befragten kannten 2 % den Spitzenkandidaten nicht und wählten die Y-Partei. Die Partei Y wurde von 72 % der Befragten nicht gewählt. Eine befragte Person wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse S: „Die Person kennt den Spitzenkandidaten“ und Y: „Die Person hat die Partei Y gewählt“ werden betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(Y)$ und $P_S(Y)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang in Bezug auf Kausalität. Gehen Sie dabei auch darauf ein, ob die Ereignisse S und Y stochastisch abhängig sind.

4 Eine neue Maschine zur Produktion von LED-Lampen produziert momentan 5 % fehlerhafte Lampen (Ausschuss). In der Endkontrolle werden diese mangelhaften LED-Lampen mit einer Wahrscheinlichkeit von 97 % als fehlerhaft erkannt und reklamiert. Eine funktionierende LED-Lampe wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % fälschlicherweise beanstandet und reklamiert. Eine Lampe wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse A: „Die LED-Lampe ist Ausschuss“ und R: „Die LED-Lampe wird reklamiert“ werden betrachtet.
a) Erstellen Sie zu der beschriebenen Situation eine Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten und ein Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten für insgesamt 10 000 LED-Lampen.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_R(A)$.
c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) eine LED-Lampe nicht funktioniert und nicht reklamiert wird,
(2) eine LED-Lampe, die nicht reklamiert wird, funktioniert.
d) Bestimmen Sie, wie viele von 1000 reklamierten LED-Lampen ungefähr funktionieren.

5 Zwischen den Oster- und den Pfingstferien hatte Hermine bei 28 Schultagen an zwölf Tagen gefehlt. Von acht angekündigten Leistungsnachweisen und Referaten in dieser Zeit hat sie nur einen Leistungsnachweis verpasst. Ein Tag wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse H: „Hermine ist anwesend“ und L: „Es findet ein angekündigter Leistungsnachweis statt“ werden betrachtet. Weisen Sie nach, dass die Ereignisse H und L stochastisch abhängig sind. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

IV Lokales und globales Differenzieren



Das können Sie schon

- Terme vereinfachen
- Die Gleichung einer Geraden bestimmen
- Grenzwerte bestimmen
- Entscheiden, ob eine Funktion stetig ist
- Steigungen und die Größe eines Steigungswinkels bestimmen

Test

Check-in zu Kapitel IV Seite 193





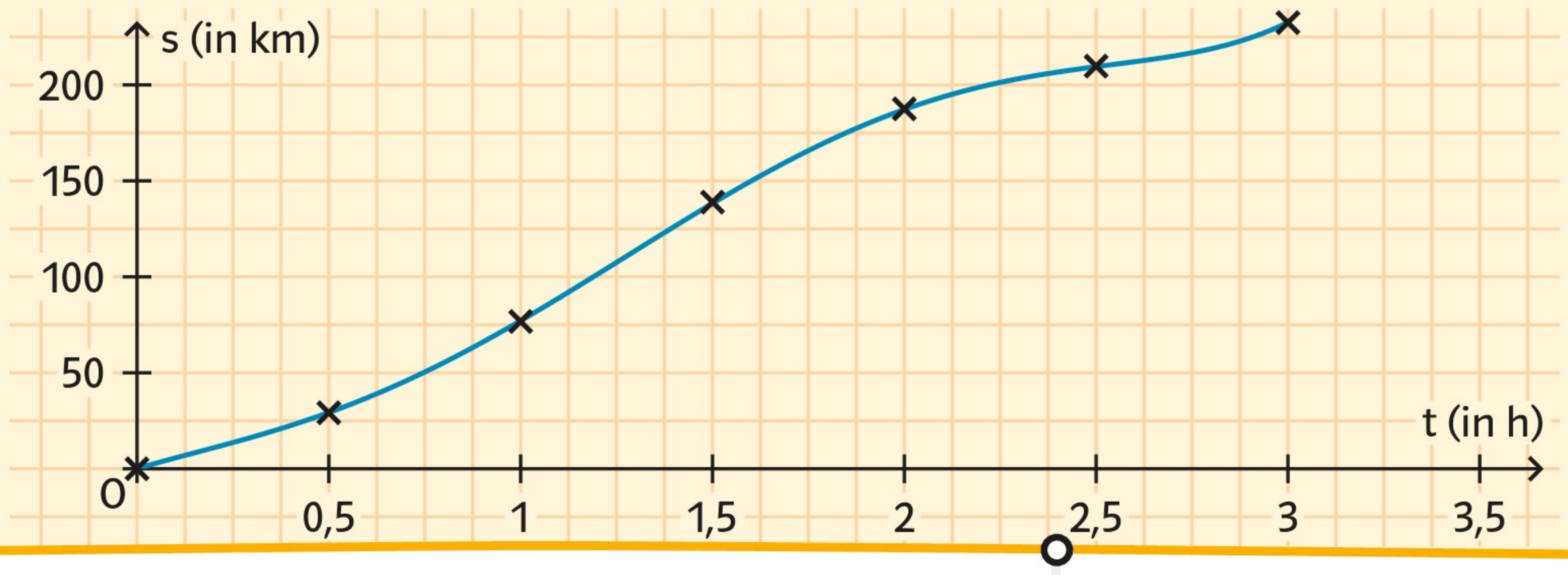
Das können Sie bald

- Die mittlere Änderungsrate berechnen
- Die Steigung eines Graphen an einer Stelle bestimmen
- Eine Funktion auf Differenzierbarkeit untersuchen
- Die Ableitungsfunktion grafisch und rechnerisch bestimmen
- Die Gleichung einer Tangente an den Graphen und ihren Steigungswinkel bestimmen

1 Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate

Die Tabelle und der Graph stellen die zurückgelegte Strecke s einer Autofahrerin bei der Fahrt von München nach Stuttgart in Abhängigkeit von der Zeit t dar.
Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle, in welchem Zeitabschnitt die Fahrerin mit der höchsten Durchschnittsgeschwindigkeit gefahren ist, und erklären Sie, wie man diesen Zeitabschnitt aus dem Graphen ermitteln kann.

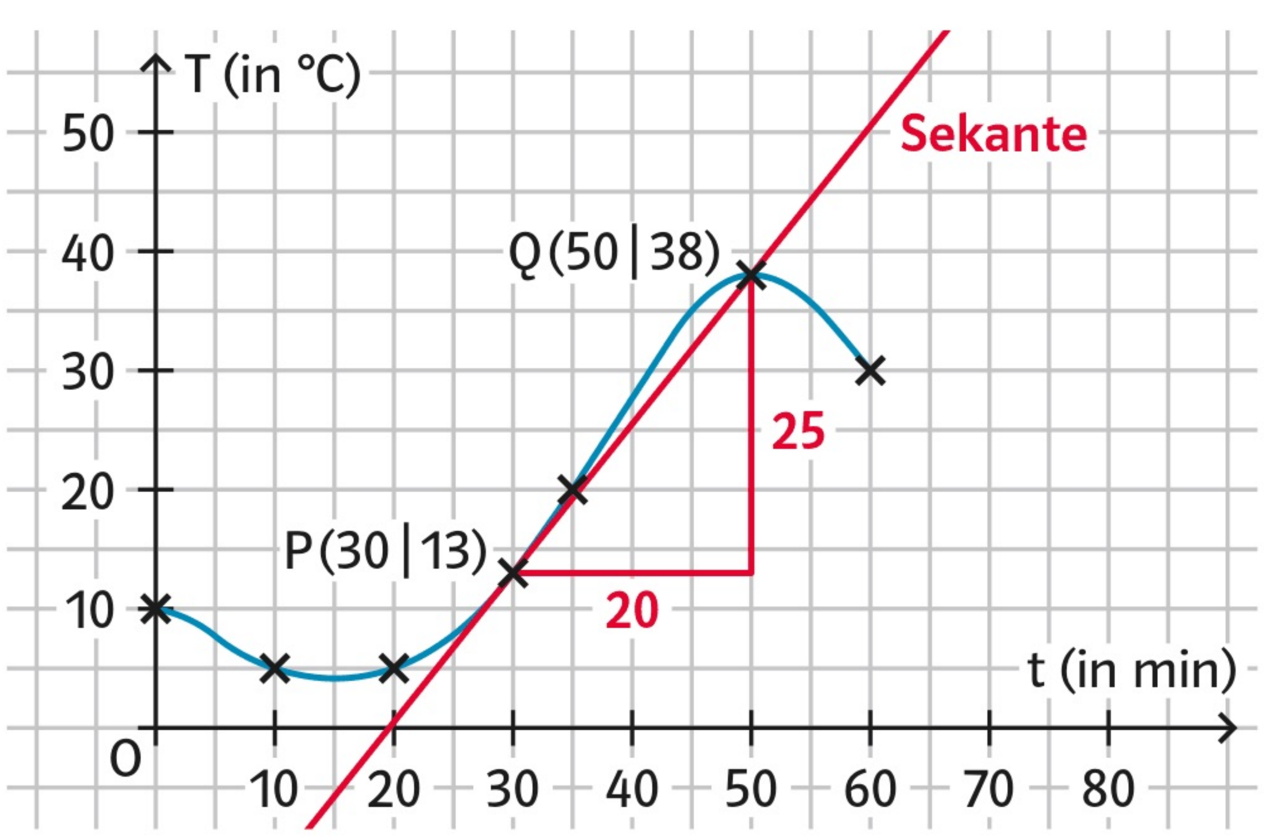
t (in h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
s (in km)	0	30	75,5	140,5	185,5	210	232



Bei der Untersuchung von Funktionen interessiert häufig die Entwicklung und Veränderung der Funktionswerte. Diese können zum Beispiel zunehmen oder abnehmen und die Zunahme bzw. Abnahme kann stärker oder schwächer sein.

Die Bestimmung der durchschnittlichen Änderung von Funktionswerten in einem Intervall wird an der folgenden Situation erläutert.
Bei einem Experiment wurde die Temperatur einer Flüssigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten gemessen. Die Tabelle und der Graph zeigen die Messergebnisse.
Die Temperatur nach 30 Minuten betrug 13 °C und die nach 50 Minuten 38 °C. Die mittlere Änderung der Temperatur pro Minute in den dazwischenliegenden 20 Minuten lässt sich berechnen durch:
$\frac{T(50) - T(30)}{50 - 30} = \frac{38 - 13}{20} = 1{,}25.$
Die mittlere Änderungsrate der Temperatur von 30 min bis 50 min beträgt also $1{,}25\,\frac{°C}{min}$.

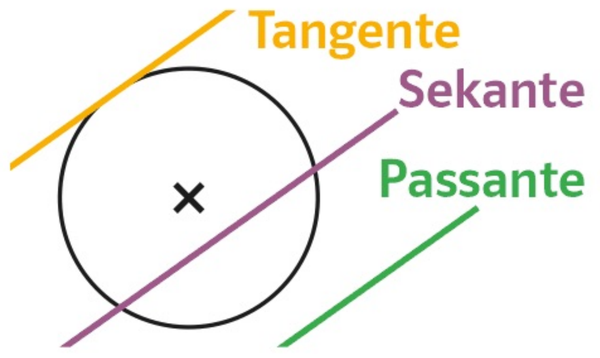
t (in min)	0	10	20	30	35	50	60
T (in °C)	10	5	5	13	20	38	30



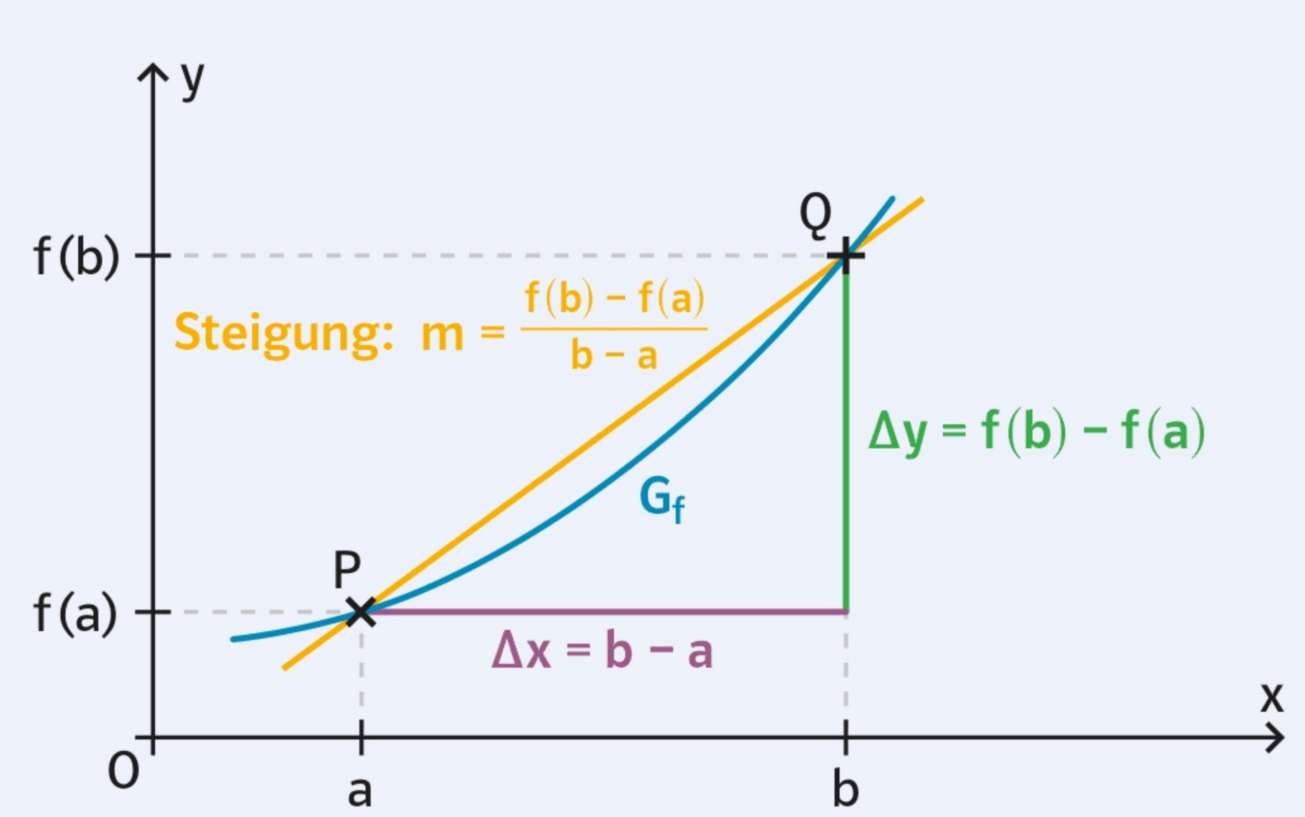
Die Einheit der mittleren Änderungsrate von T ergibt sich direkt aus dem Differenzenquotienten: $\frac{\text{Einheit von } T(t)}{\text{Einheit von } t}$.

Allgemein berechnet man mit dem Quotienten $\frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1}$ die **mittlere Änderungsrate der Temperatur im Intervall** $[t_1; t_2]$. Dabei dividiert man die Differenz der Temperaturwerte durch die Differenz der zugehörigen Zeitwerte und spricht daher vom **Differenzenquotienten**.
Zeichnet man eine Gerade durch die beiden Punkte P(30 | 13) und Q(50 | 38), eine **Sekante** des Funktionsgraphen, dann entspricht die Steigung dieser Geraden der mittleren Änderungsrate.

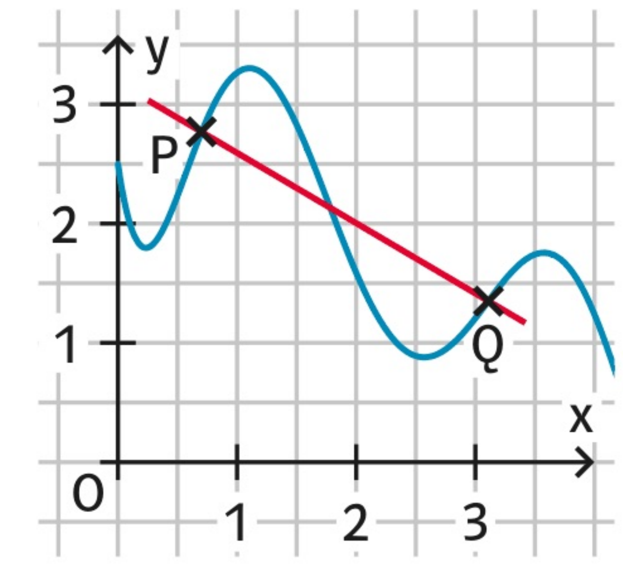
Zur Erinnerung:



Definition: Ist die Funktion f auf dem Intervall [a; b] definiert, so heißt der Quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ **Differenzenquotient** und sein Wert **mittlere Änderungsrate von f im Intervall [a; b]**.
Anschaulich entspricht der Wert des Differenzenquotienten $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ der Steigung der **Sekante** durch die Graphenpunkte P(a | f(a)) und Q(b | f(b)).



Bemerkungen:
Der Wert des Differenzenquotienten bzw. die mittlere Änderungsrate kann auch negativ sein. In diesem Fall ist die Sekante durch die Punkte P und Q eine fallende Gerade.
Die mittlere Änderungsrate ist ein Maß für die durchschnittliche Änderung der Funktionswerte einer Funktion in einem Intervall $[a; b]$. Je größer das Intervall gewählt wird, desto weniger Rückschlüsse kann man auf den genauen Graphenverlauf in diesem Intervall ziehen.



Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten von g in den Intervallen $[-3; -1]$ und $[0; 3]$.

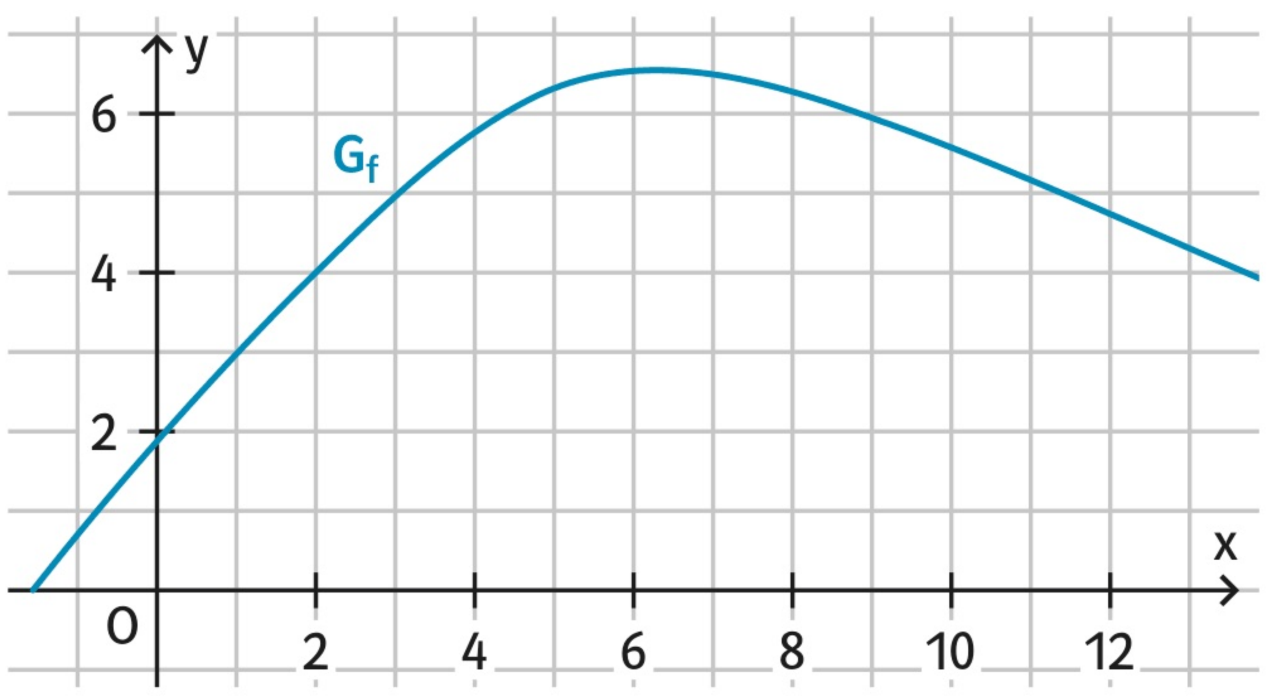
Lösung

Intervall $[-3; -1]$: $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(-1) - g(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 - [(-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 1]}{-1 - (-3)} = \frac{-1 - 1}{2} = -1$

Intervall $[0; 3]$: $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 1 - (0^2 + 3 \cdot 0 + 1)}{3 - 0} = \frac{19 - 1}{3} = 6$

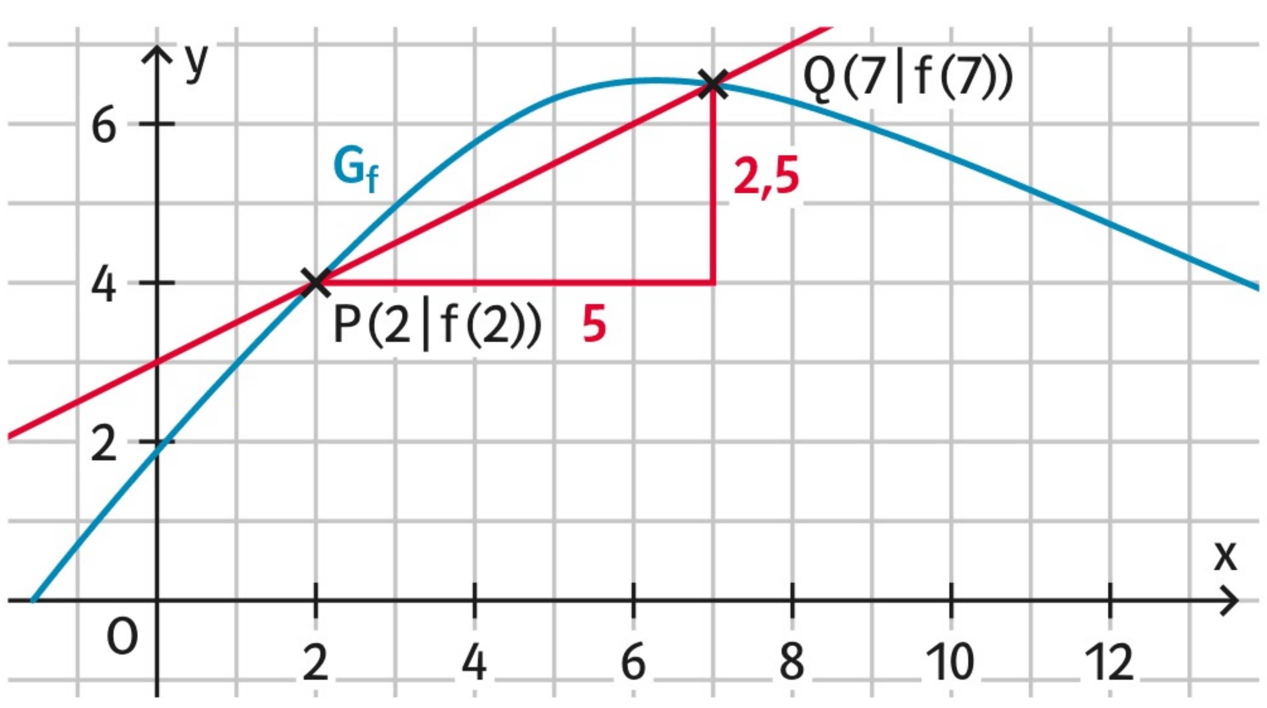
Beispiel 2

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[2; 7]$. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



Lösung

Man zeichnet die Sekante durch die Punkte $P(2 | f(2))$ und $Q(7 | f(7))$ und liest die Sekantensteigung mithilfe eines Steigungsdreiecks ab: $m \approx \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}$.



Beispiel 3

Die Funktion $T: t \mapsto 75 \cdot 0{,}95^t + 20$ $(t \geq 0)$ beschreibt das Abkühlen einer Tasse Tee, wobei T die Temperatur in °C und t die Zeit in Minuten ist.

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur für die Intervalle $[5; 40]$ und $[15; 50]$ und interpretieren Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

b) Zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters den Graphen von T und die zwei Sekanten g_1 und g_2, die zu den in Teilaufgabe a) betrachteten Intervallen gehören.

c) Erklären Sie, wie man an den Sekanten g_1 und g_2 erkennen kann, dass die durchschnittliche Temperaturabnahme in $[5; 40]$ größer als in $[15; 50]$ ist.

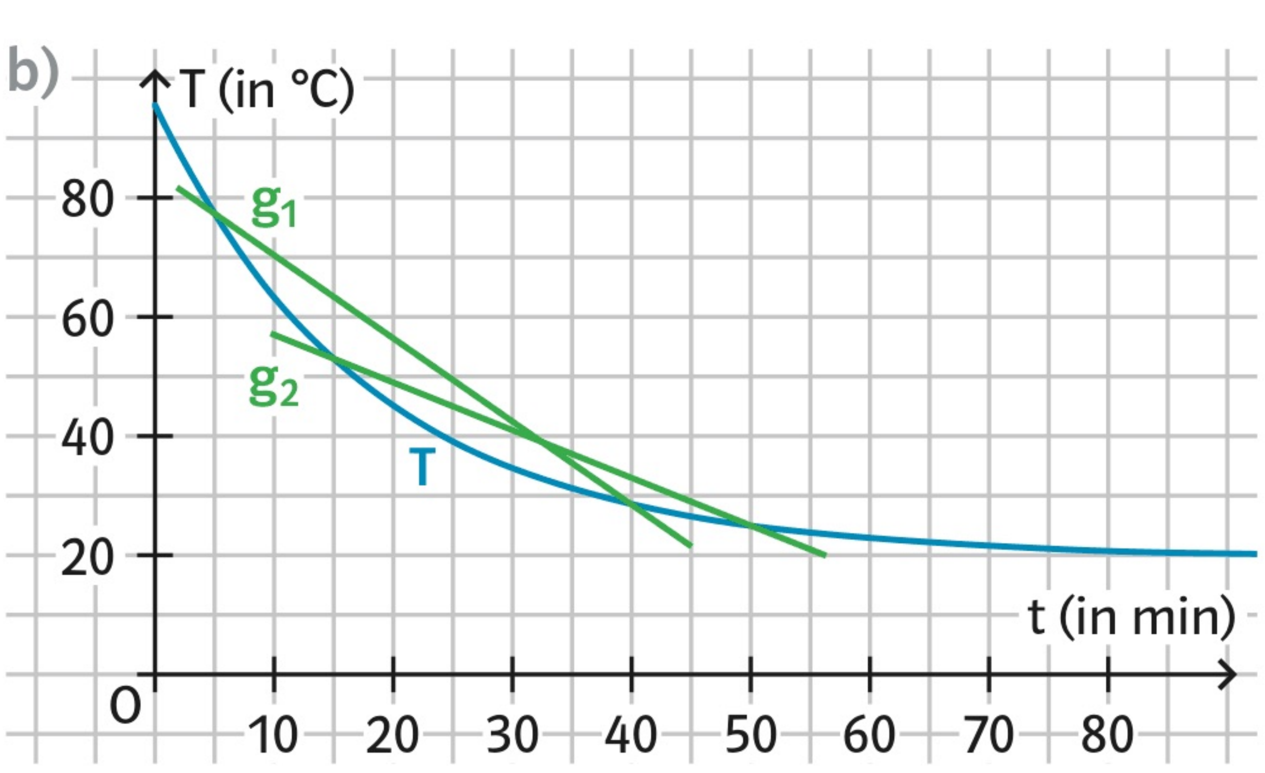
Lösung

a) $\frac{T(40) - T(5)}{40 - 5} \approx \frac{29{,}64 - 78{,}03}{35} \approx -1{,}4$

$\frac{T(50) - T(15)}{50 - 15} \approx \frac{25{,}77 - 54{,}75}{35} \approx -0{,}8$

In der Zeit zwischen 5 min und 40 min sinkt die Temperatur im Mittel um $1{,}4\,\frac{°C}{min}$, in der Zeit zwischen 15 min und 50 min sinkt sie im Mittel um $0{,}8\,\frac{°C}{min}$.

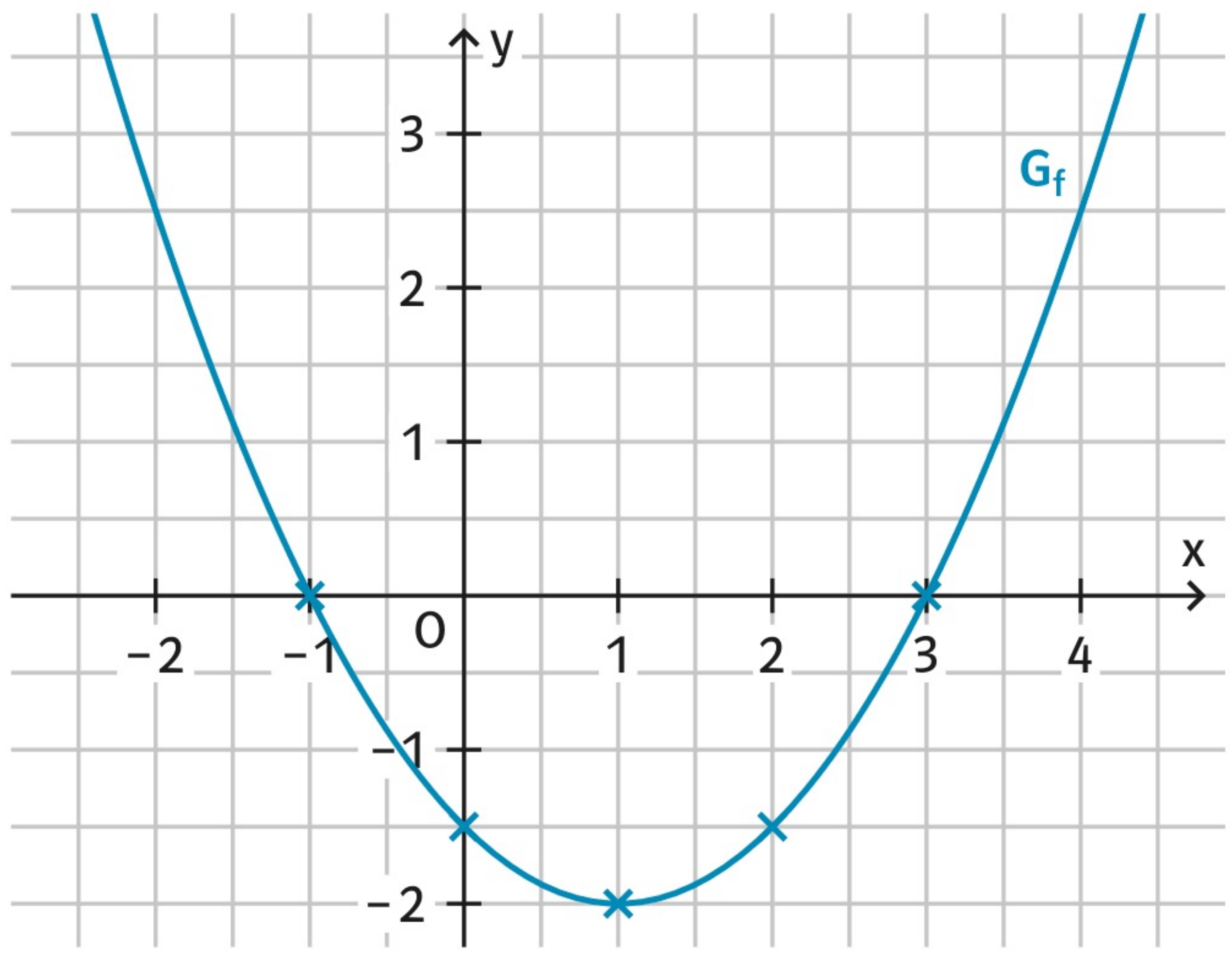
b)

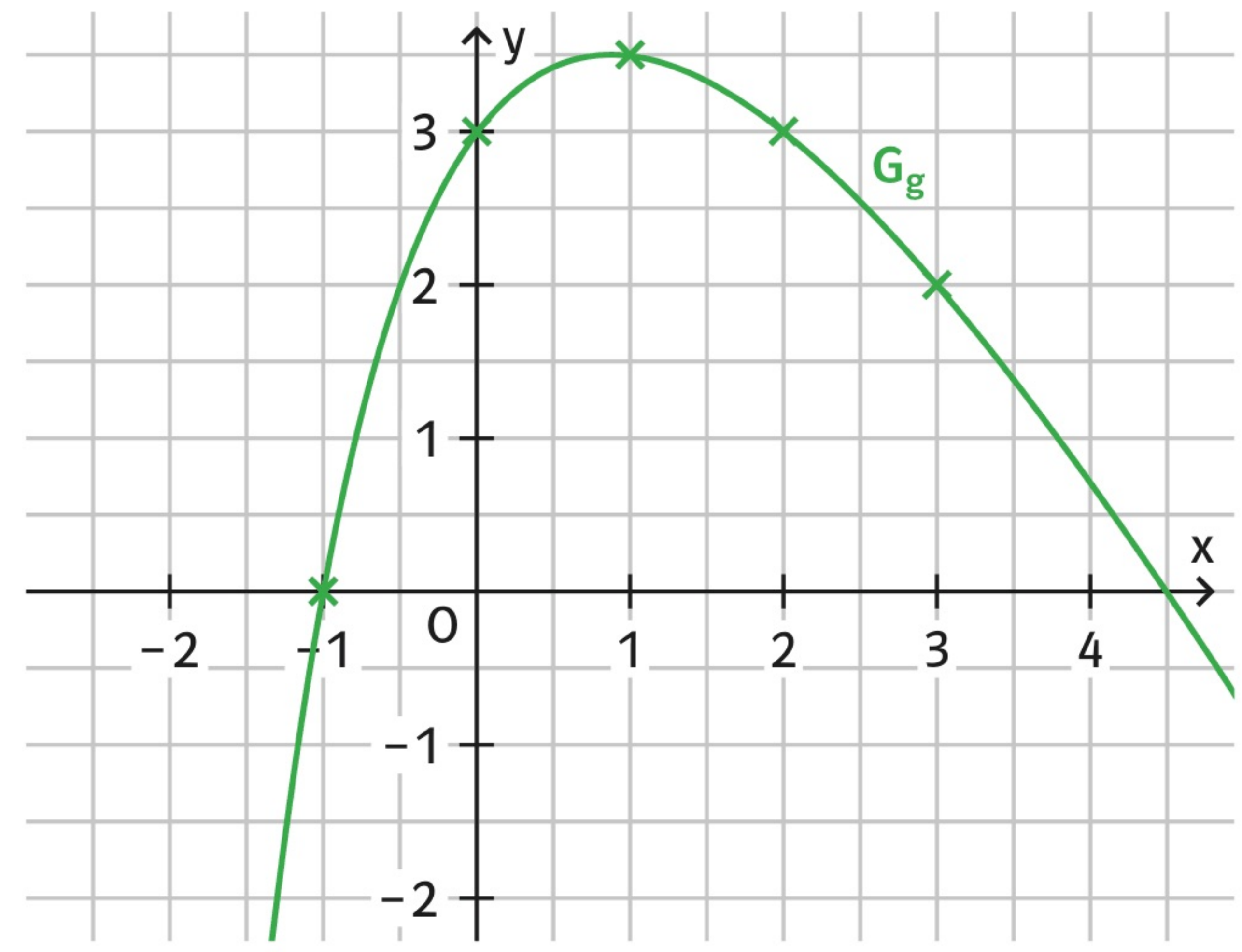


c) Man erkennt dies daran, dass die Gerade g_1 stärker fällt als die Gerade g_2.

Aufgaben

1 Gegeben sind die Graphen der beiden Funktionen f und g.





Bestimmen Sie jeweils den Wert des Differenzenquotienten von f und g im angegebenen Intervall.

a) $I = [1; 3]$ b) $I = [-1; 2]$ c) $I = [0; 2]$ d) $I = [-1; 1]$

2 Geben Sie für die Funktion f die maximale Definitionsmenge an und berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $I_1 = [-1; 0]$, $I_2 = [0; 1]$, $I_3 = [1; 3]$ und $I_4 = [0; 3]$.

a) $f: x \mapsto x^2 - 2$ b) $f: x \mapsto \frac{12}{x+2}$ c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x+2)^3$ d) $f: x \mapsto 2^x$

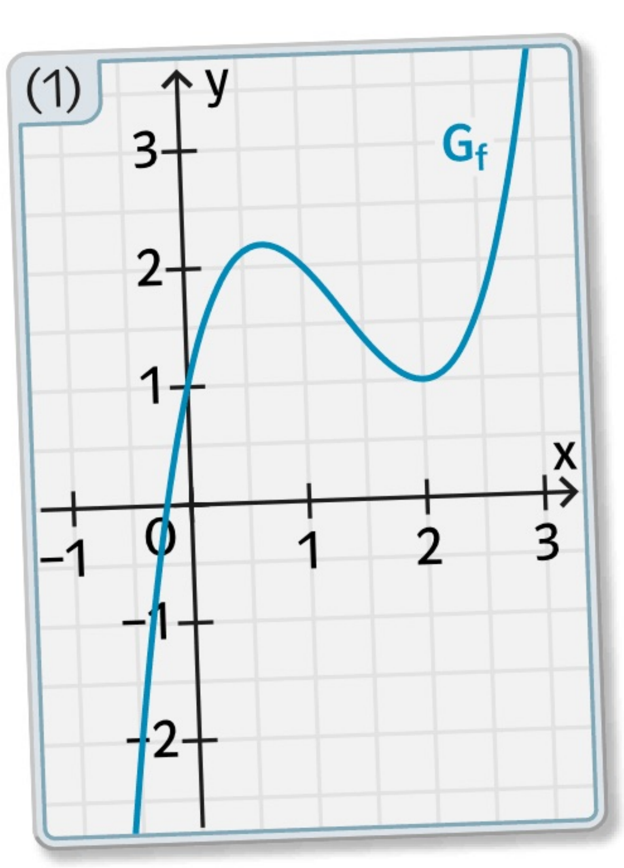
3 Entscheiden Sie jeweils, zu welchem Graphen der Differenzenquotient auf dem Kärtchen gehört, und begründen Sie Ihre Antwort.

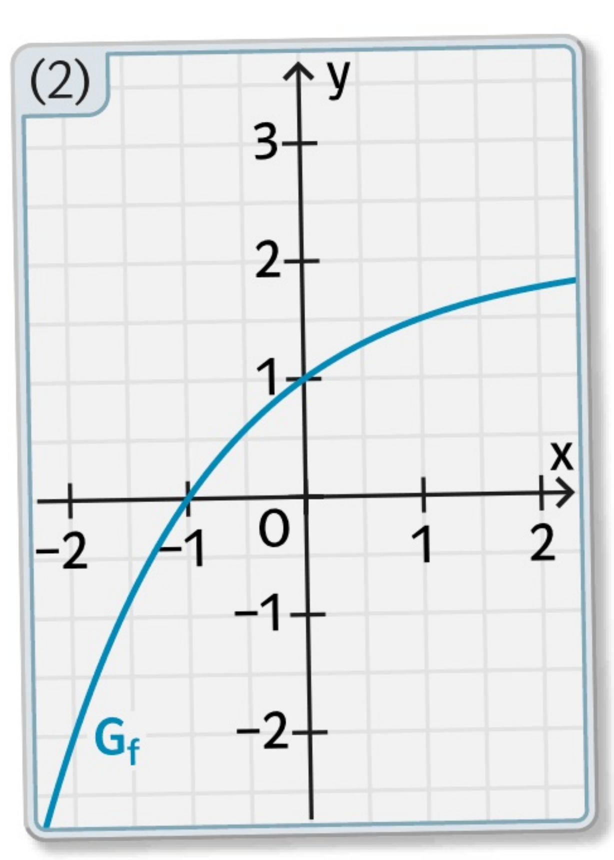
A $\frac{0-(-1{,}5)}{3-0} = 0{,}5$

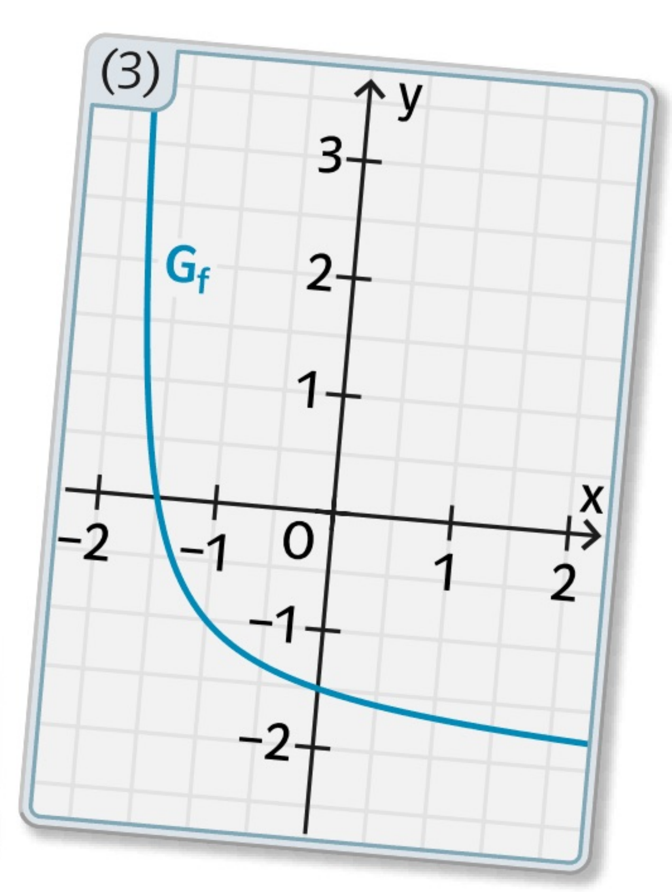
B $\frac{1-1}{2-0} = 0$

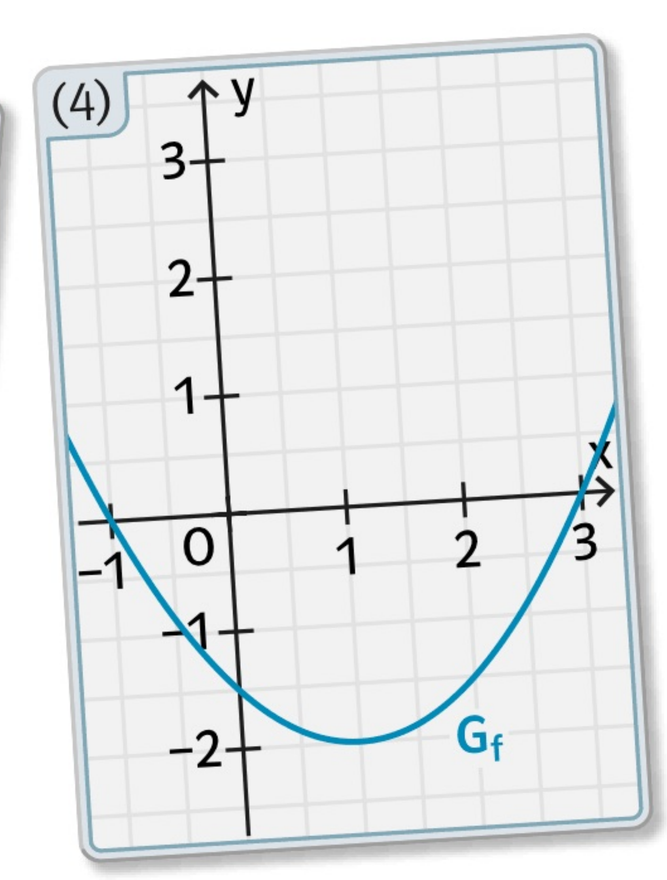
C $\frac{1{,}75-0}{2-(-1)} = \frac{7}{12}$

D $\frac{-1{,}5-0}{0+1{,}5} = -1$







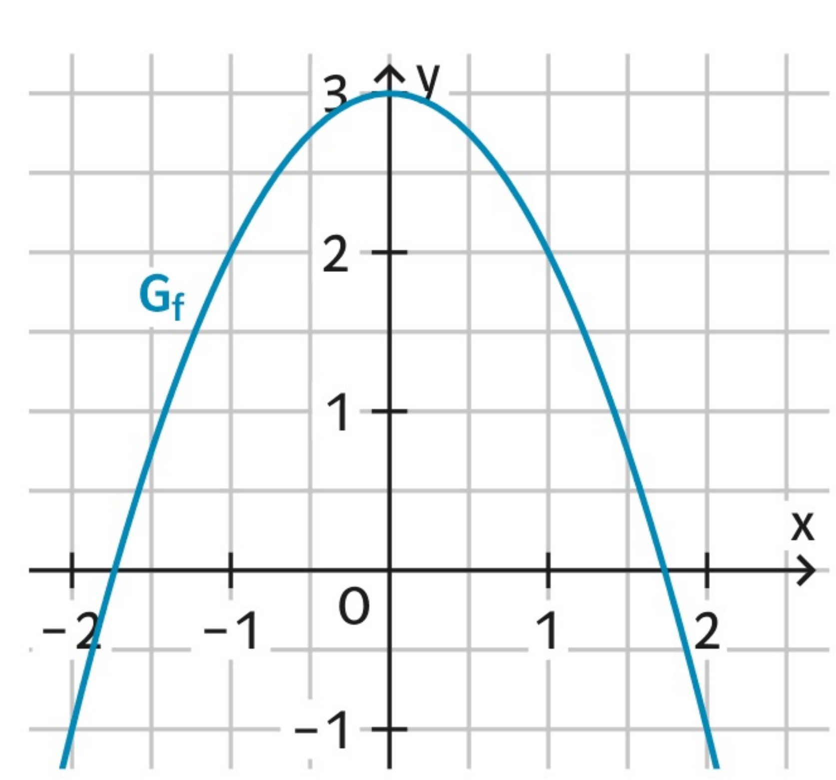


Test 1 Lösungen | Seite 209

4 Gegeben ist der Graph einer Funktion f.

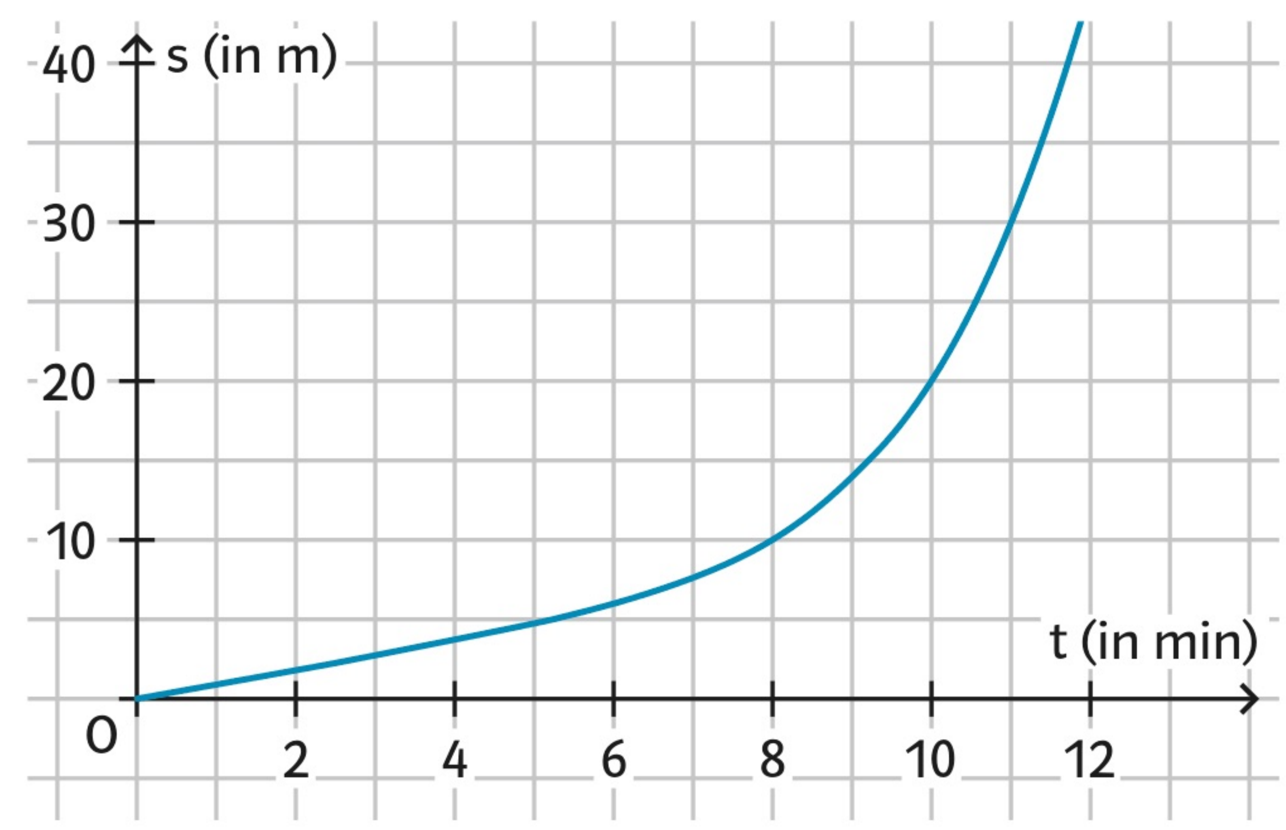
a) Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall $[0; 2]$ und im Intervall $[-2; -1]$.

b) Geben Sie ein Intervall an, in dem der Differenzenquotient den Wert 0 hat.



5 Berechnen Sie zur Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, die mittlere Änderungsrate im Intervall $[1; 2]$ und im Intervall $[1; 1{,}5]$.

6 Bei einem Fahrzeug wird während einer Fahrt die zurückgelegte Strecke aufgezeichnet. Der Graph stellt die Funktion *Zeit t ↦ zurückgelegte Strecke s* (t in min, s in m) dar. Die mittlere Änderungsrate der Strecke in einem Zeitabschnitt ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeuges in diesem Intervall.
Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit für
a) $I = [0; 8]$, b) $I = [10; 11]$.



7 Die Höhe einer Kressepflanze wurde über mehrere Tage jeweils zur gleichen Uhrzeit bestimmt.

Zeit t (in Tagen)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Höhe h (in mm)	0	3	6	17	28	38	54	60	65	76

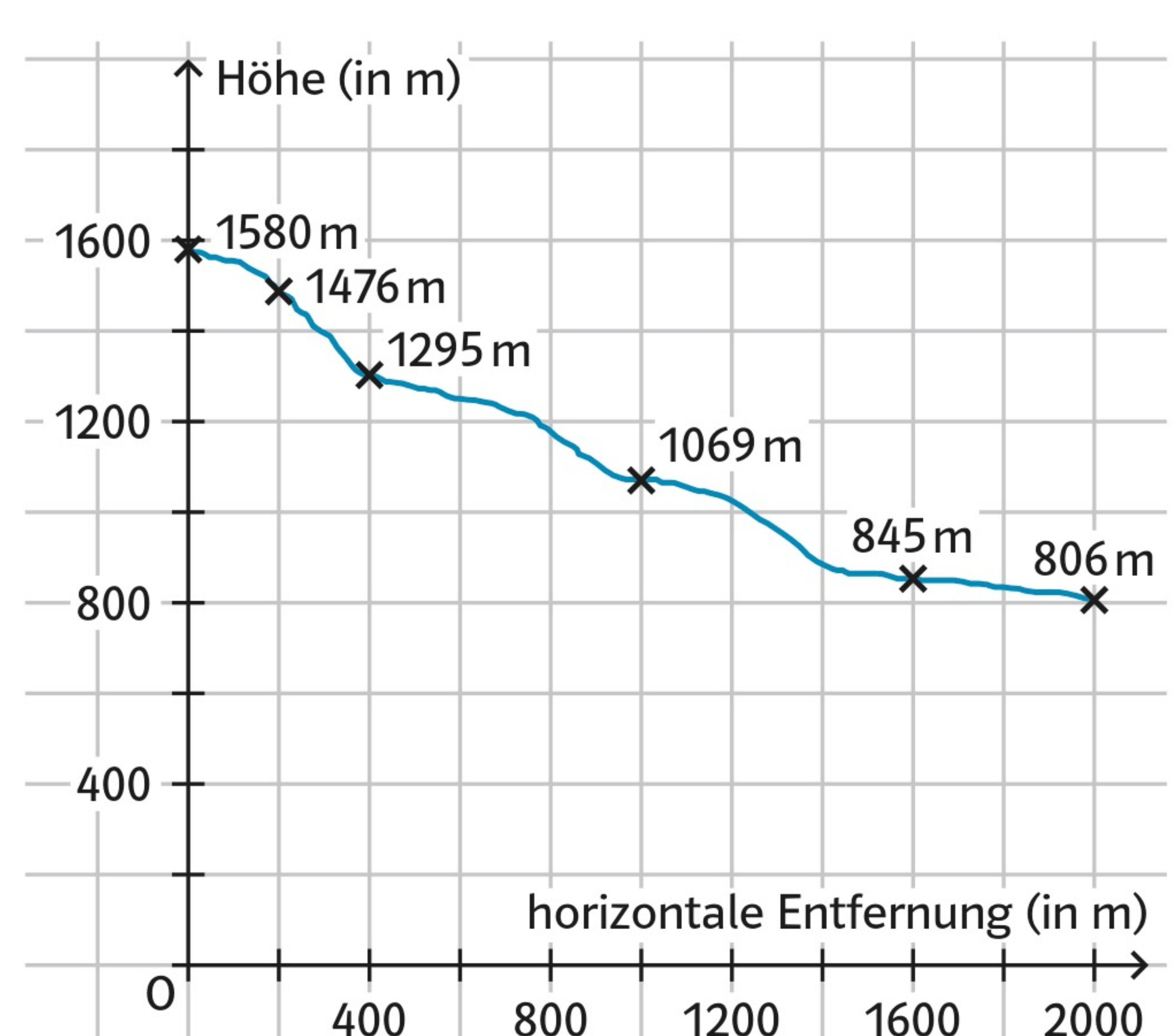
Bestimmen Sie, wie groß die mittlere Änderungsrate der Funktion *Zeit t ↦ Höhe h* ist
a) für den gesamten Messzeitraum, b) für die ersten drei Tage,
c) vom 6. bis zum 9. Tag, d) vom 3. bis zum 7. Tag.

8 Bei einer Bakterienkultur verdoppelt sich jede Stunde die Anzahl der Bakterien. Zu Beginn der Messung waren etwa 12 000 Bakterien vorhanden.
a) Geben Sie einen Funktionsterm an, der die Anzahl der Bakterien in Abhängigkeit der vergangenen Zeit in Stunden beschreibt.
b) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate in den angegebenen Intervallen.
(1) $I = [3; 8]$ (2) $I = [1; 5]$ (3) $I = [-2; 1]$
c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe b) im Sachzusammenhang.

9 Geben Sie die Kärtchenpaare an, die denselben Sachverhalt beschreiben.

1 Mittlere Änderungsrate der Wegstrecke
A Durchschnittsverbrauch
C Durchschnittliche Beschleunigung
B Durchschnittsgeschwindigkeit
D Füllgeschwindigkeit
2 Mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit
3 Mittlere Änderungsrate des Tankinhalts
4 Mittlere Änderungsrate der Füllmenge

10 Die Darstellung zeigt das Geländeprofil einer Piste für Super-G. Der Startpunkt liegt auf einer Höhe von 1580 m und der Zieleinlauf auf 806 m.
a) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung der gesamten Strecke.
b) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung auf der ersten sowie der zweiten Hälfte und vergleichen Sie die Werte.
c) Begründen Sie, dass man mithilfe der Werte aus Teilaufgabe b) nicht entscheiden kann, ob ein Raupenfahrzeug, das Steigungen bis 80 % überwinden kann, zur Präparierung der Piste verwendet werden kann.



Zur Erinnerung:
Steigungen von Straßen oder Skipisten werden häufig in Prozent angegeben. Die Steigung des Graphen multipliziert mit 100 ergibt die Steigung in Prozent.

11 Ein Radfahrer fährt zwischen 11:30 Uhr und 11:50 Uhr mit der mittleren Geschwindigkeit $18\,\frac{km}{h}$.
Um 11:50 Uhr zeigt sein Kilometerzähler den Zählerstand 10 142 km an.
a) Bestimmen Sie den Zählerstand um 11:30 Uhr.
b) Erklären Sie, warum man keine exakte Angabe zum Zählerstand um 11:40 Uhr machen kann.

12 Durch die auf den Kärtchen angegebenen Graphenpunkte verläuft jeweils eine Sekante des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}1x^3 - x$.
Zeichnen Sie den Graphen mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware und untersuchen Sie damit, welche Sekante die größte und welche die kleinste Steigung hat.

1 $P_1(0\,|\,f(0))$ und $Q_1(3{,}5\,|\,f(3{,}5))$

3 $P_3(-1\,|\,f(-1))$ und $Q_3(2\,|\,f(2))$

2 $P_2(1\,|\,f(1))$ und $Q_2(4\,|\,f(4))$

4 $P_4(-0{,}5\,|\,f(-0{,}5))$ und $Q_4(2\,|\,f(2))$

5 $P_5(-3\,|\,f(-3))$ und $Q_5(3\,|\,f(3))$

13 Zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto (x-1)^3$ und $g: x \mapsto 0{,}8x^2 - 1$ und untersuchen Sie, ob es Intervalle $[a; b]$ gibt, in denen f und g jeweils dieselbe mittlere Änderungsrate haben. Geben Sie gegebenenfalls mögliche Näherungswerte für a und b an.

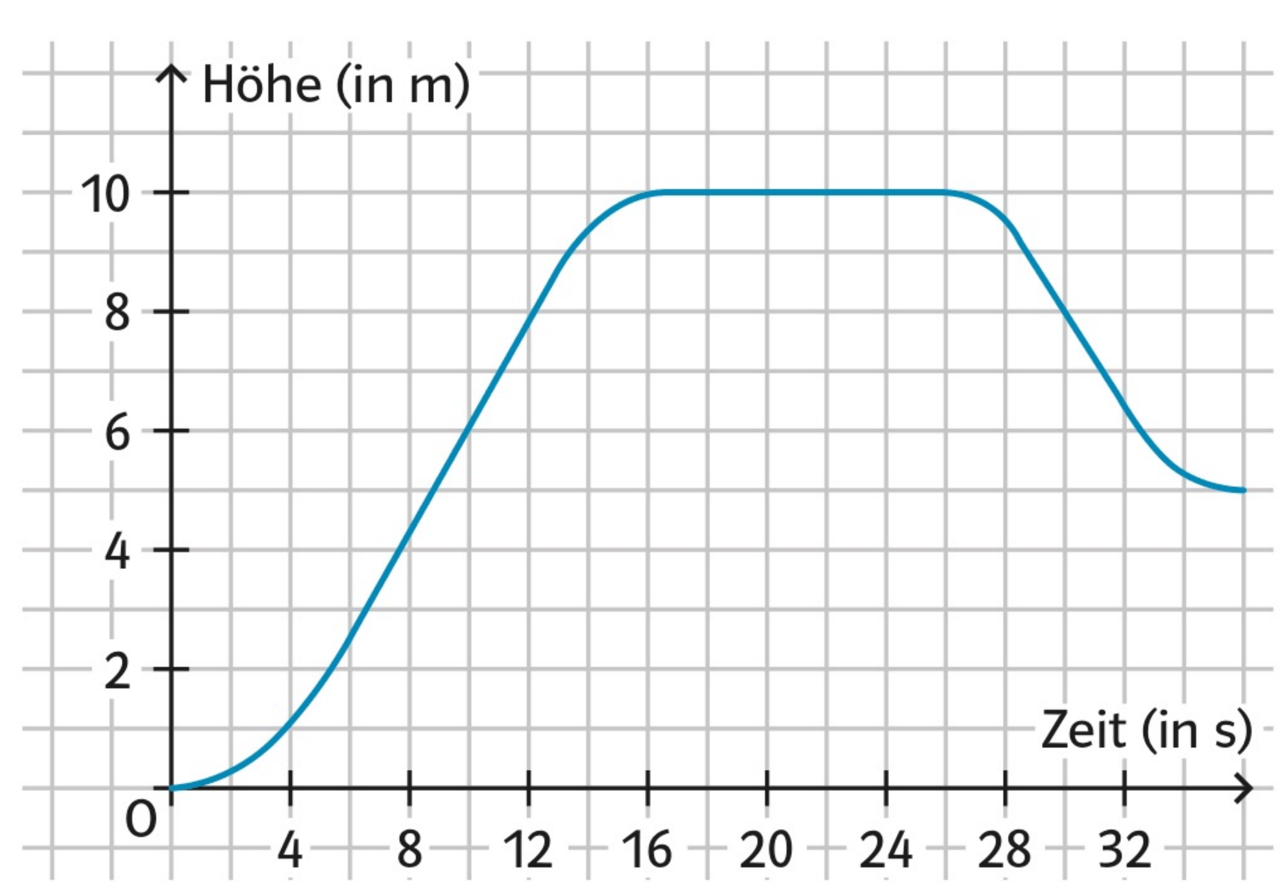
14 Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften: Der Wert des Differenzenquotienten von f im Intervall $[0; 2]$ beträgt $\frac{1}{2}$, der Wert des Differenzenquotienten von f im Intervall $[2; 5]$ beträgt 1 und der Wert des Differenzenquotienten von f im Intervall $[0; 6]$ beträgt 0. Überprüfen Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

15 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall $I = [1;\ 1 + a]$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}^+$.
a) $f: x \mapsto 3x^2$ b) $f: x \mapsto \frac{2}{x}$ c) $f: x \mapsto -x^2$

Test 2

Lösungen | Seite 209

16 Das Zeit-Ort-Diagramm veranschaulicht die Bewegung eines Fahrstuhls zwischen dem Erdgeschoss und dem 4. Stockwerk eines Hochhauses.



a) Beschreiben Sie die Bewegung des Fahrstuhls.
b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion *Zeit* ↦ *Höhe* für die Intervalle $[0; 16]$, $[16; 26]$ bzw. $[26; 36]$ und interpretieren Sie diese Werte im Sachzusammenhang.
c) Paul überlegt: Für vier Stockwerke benötigt der Fahrstuhl 16 s, also braucht er 80 s ins 20. Stockwerk. Nehmen Sie dazu Stellung.

17 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Zeigen Sie, dass die Differenzenquotienten von f in den Intervallen $[a; b]$ und $[a - 1;\ b + 1]$ übereinstimmen, und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

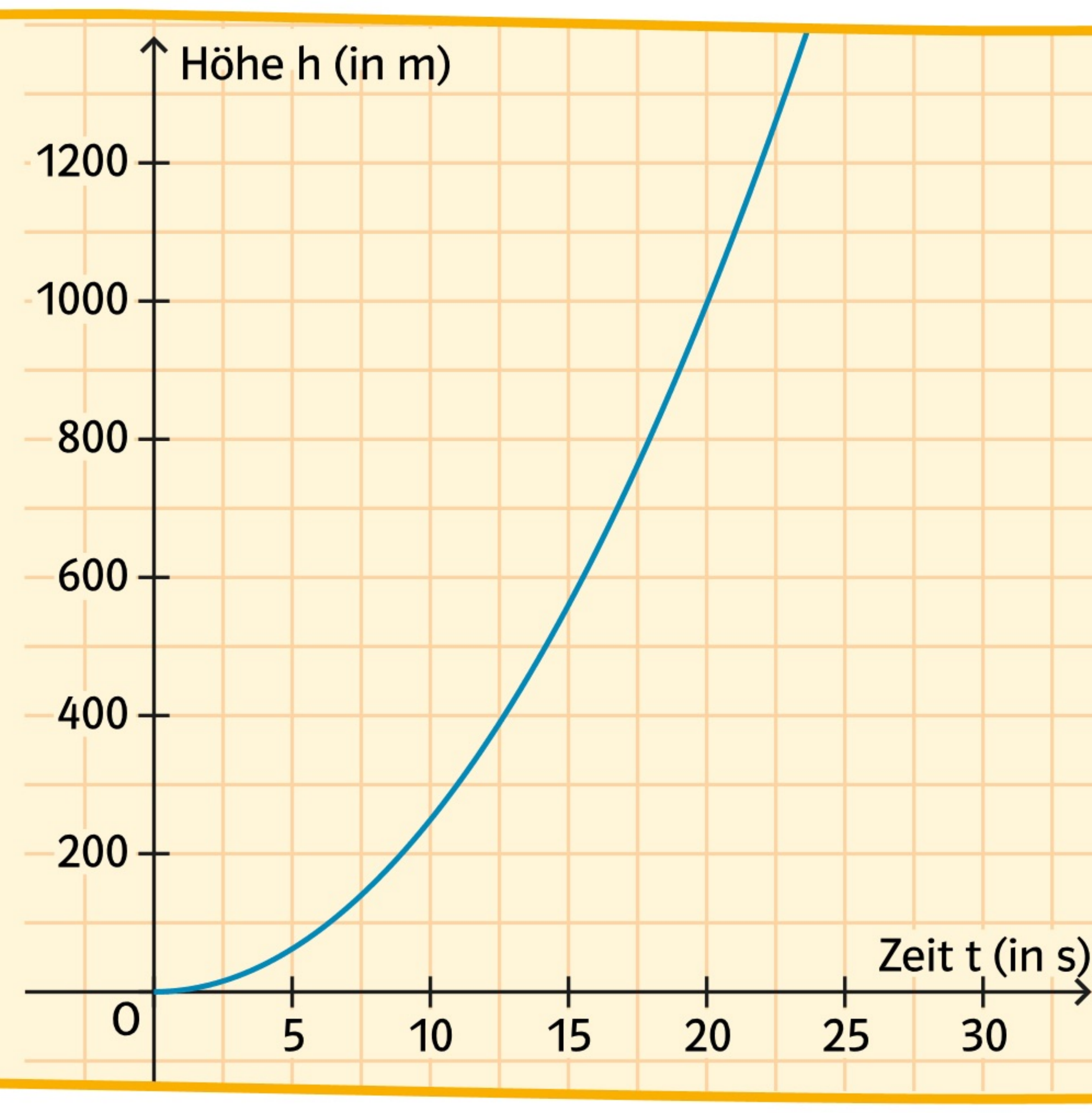
Grundwissen Test

Lösungen | Seite 209

G 18 Lösen Sie die biquadratische Gleichung mithilfe einer Substitution.
a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $t^4 - 2t^2 - 8 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^4 + 16 = 9x^2$ d) $1{,}5x^4 - \frac{x^2}{2} - 4 = 0$

2 Differentialquotient und lokale Änderungsrate

Der Graph zeigt die Höhe h einer Rakete über dem Erdboden in Abhängigkeit von der Zeit t seit dem Start. Ermitteln Sie die mittlere Vertikalgeschwindigkeit der Rakete in den Zeitintervallen [10; 20], [10; 15] sowie [10; 12,5]. Erläutern Sie, wie Sie die momentane Geschwindigkeit der Rakete zu einem bestimmten Zeitpunkt bestimmen würden, und ermitteln Sie die momentane Geschwindigkeit der Rakete 10 s nach dem Start.



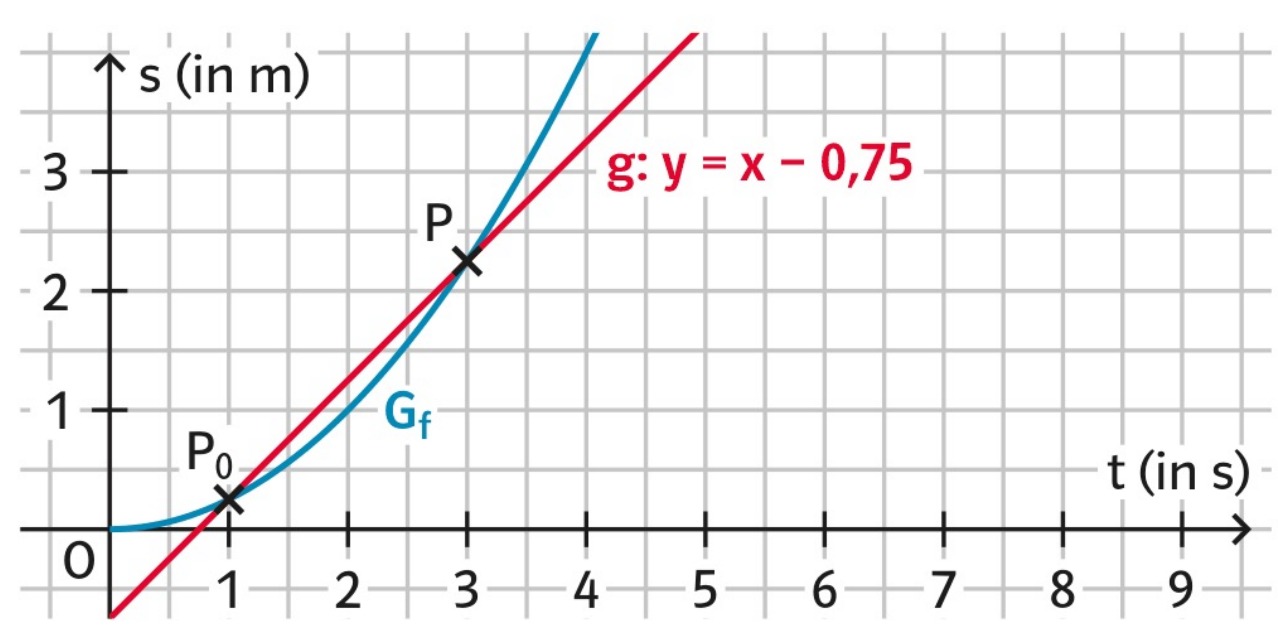


Bei einer Autofahrt kann gemessen werden, welche Strecke s das Auto in einem bestimmten Zeitintervall zurückgelegt hat, und damit kann die **Durchschnittsgeschwindigkeit** in diesem Zeitintervall berechnet werden. Der Tachometer eines Autos zeigt hingegen die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt an, also eine **Momentangeschwindigkeit**. Wie man diese Geschwindigkeit bestimmt, wird im Folgenden gezeigt.



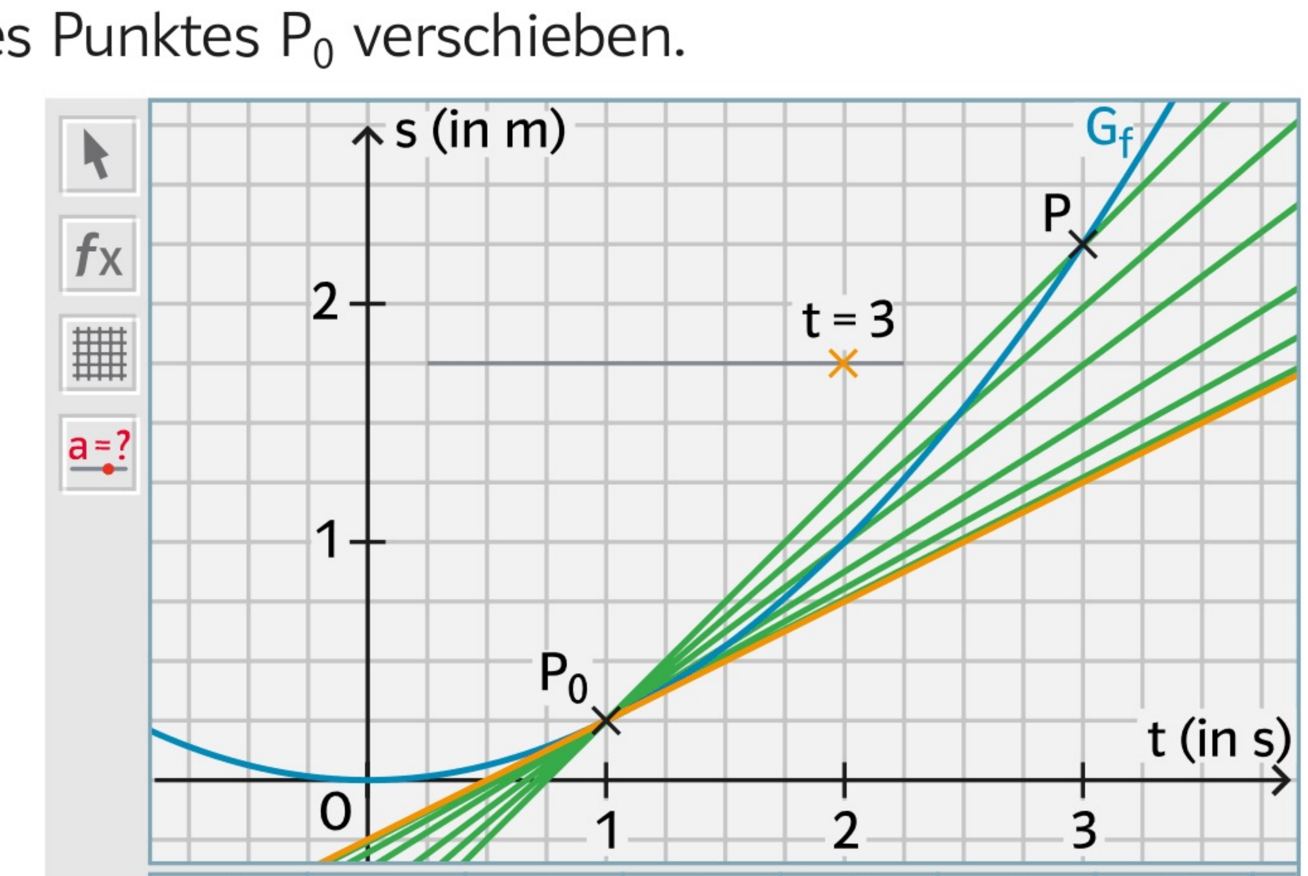
Eine Kugel, die eine schiefe Ebene hinunterrollt, wird durch die Erdanziehungskraft gleichmäßig beschleunigt und dadurch immer schneller. Die Länge s (in m) des zurückgelegten Weges in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit t (in s) kann durch die Funktion $s: t \mapsto 0{,}25 \cdot t^2$ $(t \geq 0)$ beschrieben und in einem Zeit-Ort-Diagramm dargestellt werden.

Bestimmt man die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ der Kugel im Zeitintervall [1; 3], so erhält man $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{2{,}25 - 0{,}25}{2} = 1$.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Kugel von $t = 1$ bis $t = 3$ beträgt also $1\,\frac{m}{s}$. Sie entspricht der Steigung der Sekante g durch die Graphenpunkte $P_0(1\,|\,0{,}25)$ und $P(3\,|\,2{,}25)$.



Die Momentangeschwindigkeit der Kugel zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ bestimmt man, indem man die mittlere Geschwindigkeit $\frac{s(t) - s(1)}{t - 1}$ für immer kleiner werdende Zeitintervalle [1; t] bestimmt.

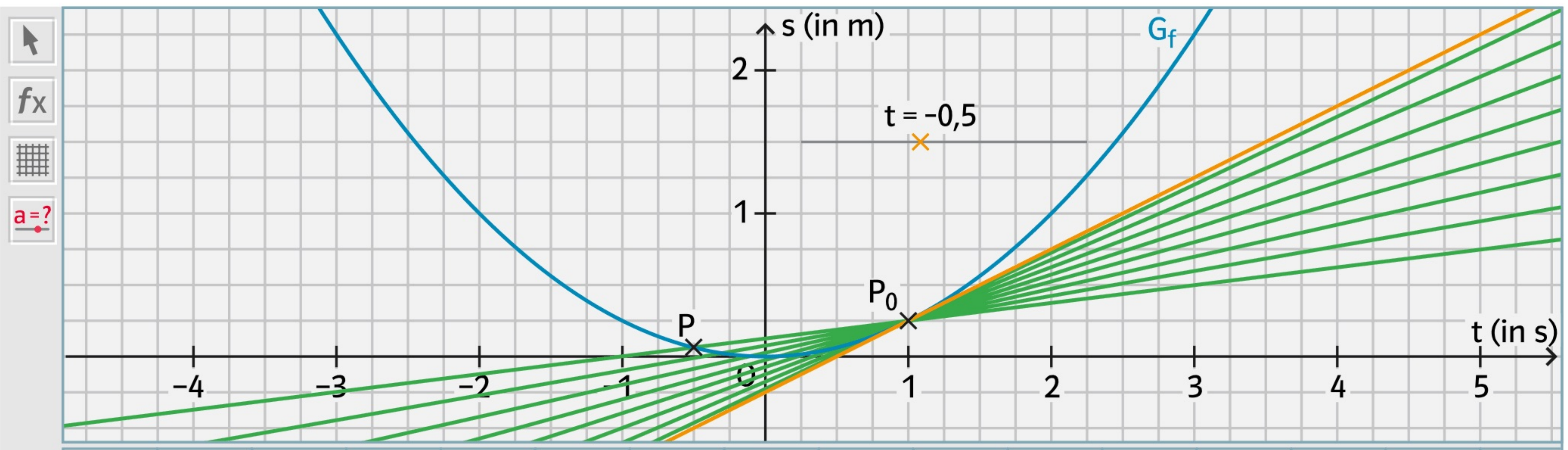
Verwendet man dazu eine dynamische Mathematiksoftware, kann man den Punkt $P(t\,|\,s(t))$ mithilfe eines Schiebereglers für t in Richtung des Punktes P_0 verschieben.
Zeichnet man die Spur der entstehenden Sekanten auf, sieht man, wie diese sich für $t \to 1$ der **Tangente** an den Funktionsgraphen in $P_0(1\,|\,0{,}25)$ annähern.
Lässt man die Werte von t und die Steigungen m der zugehörigen Sekanten in eine Tabelle eintragen und verkleinert die Schrittweite von t, so erkennt man, dass sich für $t \to 1$ die Werte der Durchschnittsgeschwindigkeiten immer mehr dem Wert $0{,}5\,\frac{m}{s}$ annähern. Diesen kann man somit als Wert der Momentangeschwindigkeit ansehen.



	1	2	3	4	5	6	7
A	t	3	2,5	2	1,5	1,25	1,05
B	m	1	0,88	0,75	0,63	0,56	0,51

Mit einem Befehl wie „Wert in eine Tabelle eintragen“ kann man in einer dynamischen Mathematiksoftware auch dynamische Tabellen erstellen lassen.

Diese „Annäherung von rechts“ lässt sich mit dem gleichen Ergebnis auch als „Annäherung von links“ durchführen:

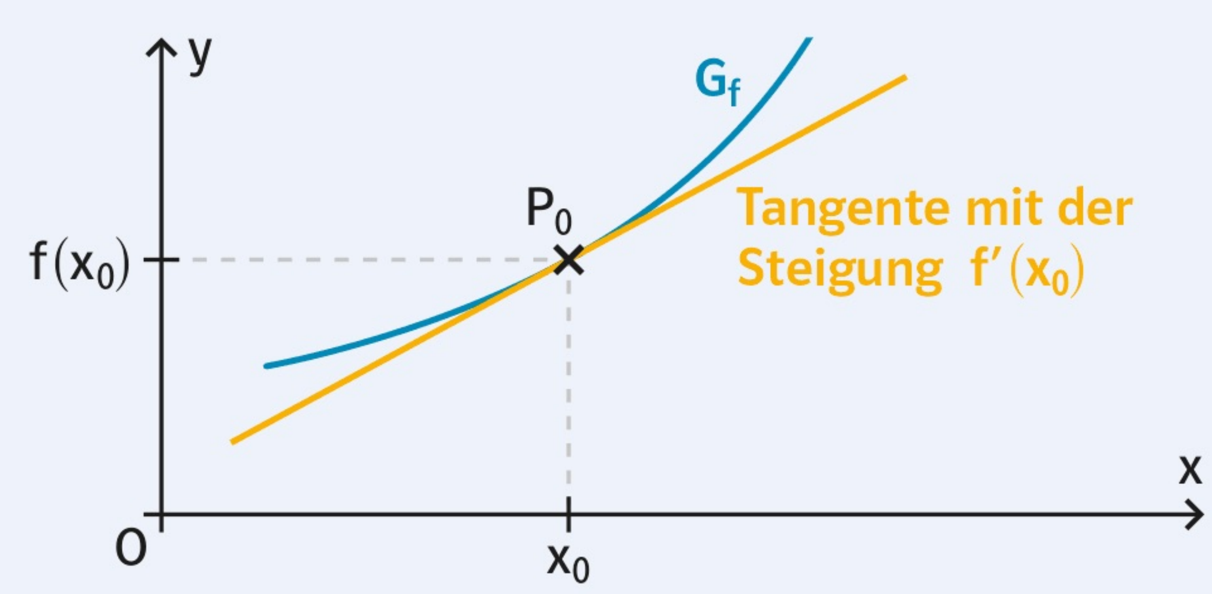


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	t	−0,5	−0,3	−0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9							
B	m	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48							

Zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ hat die Kugel die **Momentangeschwindigkeit** oder **lokale** bzw. **momentane Änderungsrate** $0{,}5\,\frac{m}{s}$. Der Wert 0,5 entspricht der **Steigung der Tangente**, die den Graphen in $P_0(t_0\,|\,s(t_0)) = P_0(1\,|\,0{,}25)$ berührt.
Allgemein gilt: Die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 entspricht dem Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch die Punkte $P(x\,|\,f(x))$ und $P_0(x_0\,|\,f(x_0))$ für $x \to x_0$.

Definition: Existiert für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ der mittleren Änderungsrate, dann heißt er **Differentialquotient** (oder **lokale** bzw. **momentane Änderungsrate**) **von f an der Stelle x_0**. Man bezeichnet den Grenzwert auch als **Ableitung von f an der Stelle x_0** und schreibt $\mathbf{f'(x_0)}$.
Die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0\,|\,f(x_0))$ mit der Steigung $m = f'(x_0)$ heißt **Tangente** an den Graphen in P_0.

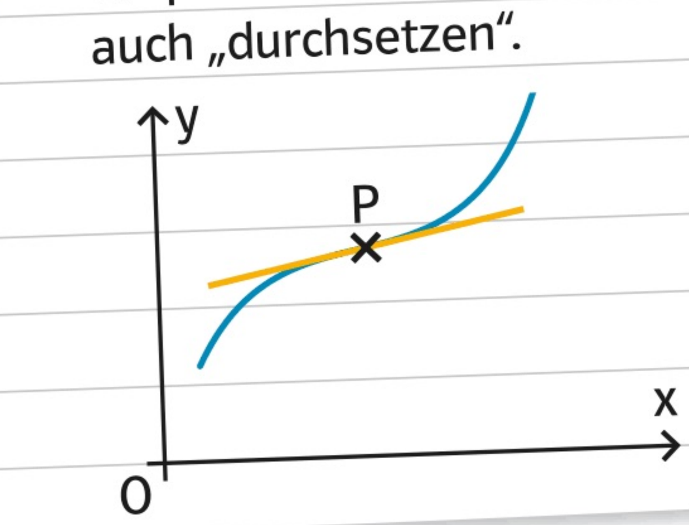
Die **Steigung des Graphen in einem Punkt $P_0(x_0\,|\,f(x_0))$** ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.



Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ist der eindeutige Grenzwert, der sich bei links- und rechtsseitiger Annäherung ergibt.

f′ spricht man „f Strich“.

Tangenten berühren einen Graphen – sie können ihn auch „durchsetzen“.



Berechnung des Differentialquotienten – die x_0-Methode
Um die lokale Änderungsrate von f an der Stelle x_0, also die Steigung der Tangente an dieser Stelle, zu berechnen, bildet man den Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und vereinfacht diesen so weit, dass man den Grenzwert für $x \to x_0$ bilden kann.
Beispielsweise erhält man die Ableitung f′ von $f\colon x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch Anwenden der 3. binomischen Formel auf folgende Weise:

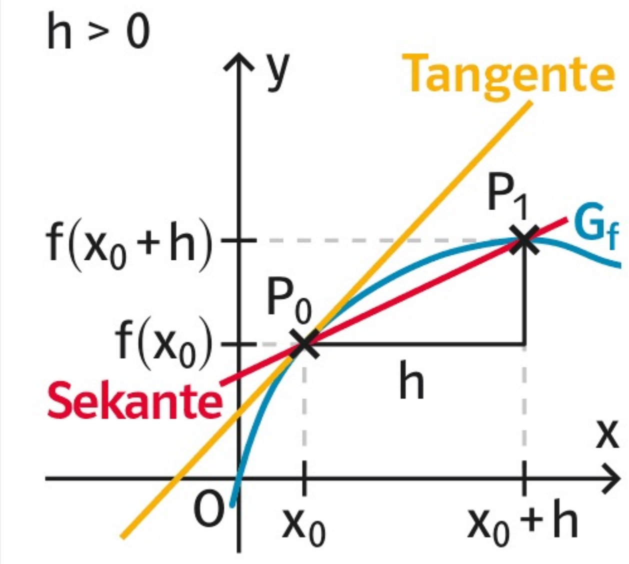
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x - 1} = \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{4}(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{4}(x + 1)}{1} = \frac{1}{4}(x + 1),\ \ f'(1) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{4}(x + 1)\right) = \frac{1}{2}.$$

Weitere Möglichkeit zur Berechnung des Differentialquotienten – die h-Methode
In manchen Fällen wird die Berechnung des Differentialquotienten erleichtert, wenn man $x = x_0 + h$ setzt. Damit ergibt sich für die Differenz $x - x_0 = h$ und die Ableitung an einer Stelle x_0 wird berechnet, indem man den Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ bildet.
Die Sekante durch $P_0(x_0\,|\,f(x_0))$ und $P_1(x_0 + h\,|\,f(x_0 + h))$ geht dabei in die Tangente in P_0 über, da der Punkt P_1 sich für $h \to 0$ dem Punkt P_0 annähert.

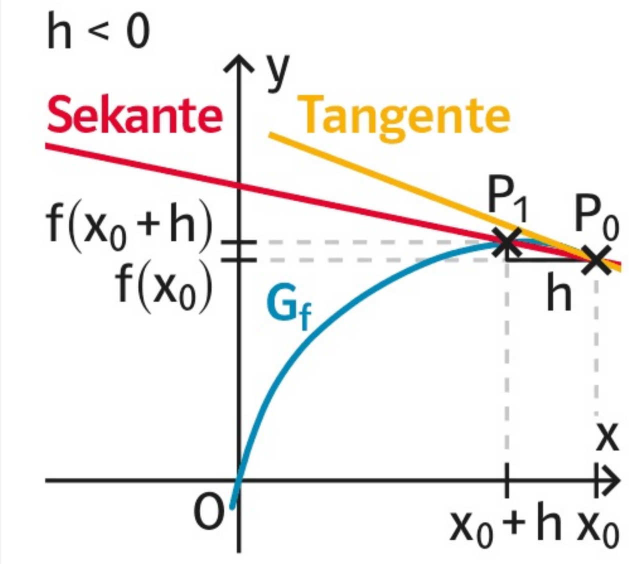
Sekantensteigung: $m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **(Differenzenquotient)**

Tangentensteigung: $m_t = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **(Differentialquotient)**

h > 0



h < 0



Die Berechnung des Differentialquotienten mithilfe der h-Methode wird am Beispiel von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ gezeigt:

1. Term für Differenzenquotient aufstellen und so umformen, dass mit h gekürzt werden kann:
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{4}\cdot(1+h)^2 - \frac{1}{4}}{h} = \frac{\frac{1}{4}\cdot(1+2h+h^2) - \frac{1}{4}}{h} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}}{h} = \frac{\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2}{h}$$
$$= \frac{h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right)}{h} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}h$$

2. Grenzwert für $h \to 0$ bestimmen:
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2}$$

Beispiel 1

Bestimmen Sie die Ableitung von $f\colon x \mapsto 2x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -1$, indem Sie

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ berechnen,

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ berechnen.

Lösung

a) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - (-1)} = \frac{2x^2 - 2}{x + 1}$
$= \frac{2(x^2 - 1)}{x + 1} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x + 1} = \frac{2(x-1)}{1} = 2(x-1)$

$f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} 2(x-1) = -4$

b) $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$
$= \frac{2\cdot(-1+h)^2 + 1 - 3}{h} = \frac{2\cdot(1 - 2h + h^2) - 2}{h}$
$= \frac{2 - 4h + 2h^2 - 2}{h} = \frac{-4h + 2h^2}{h} = \frac{h(-4 + 2h)}{h}$
$= -4 + 2h$

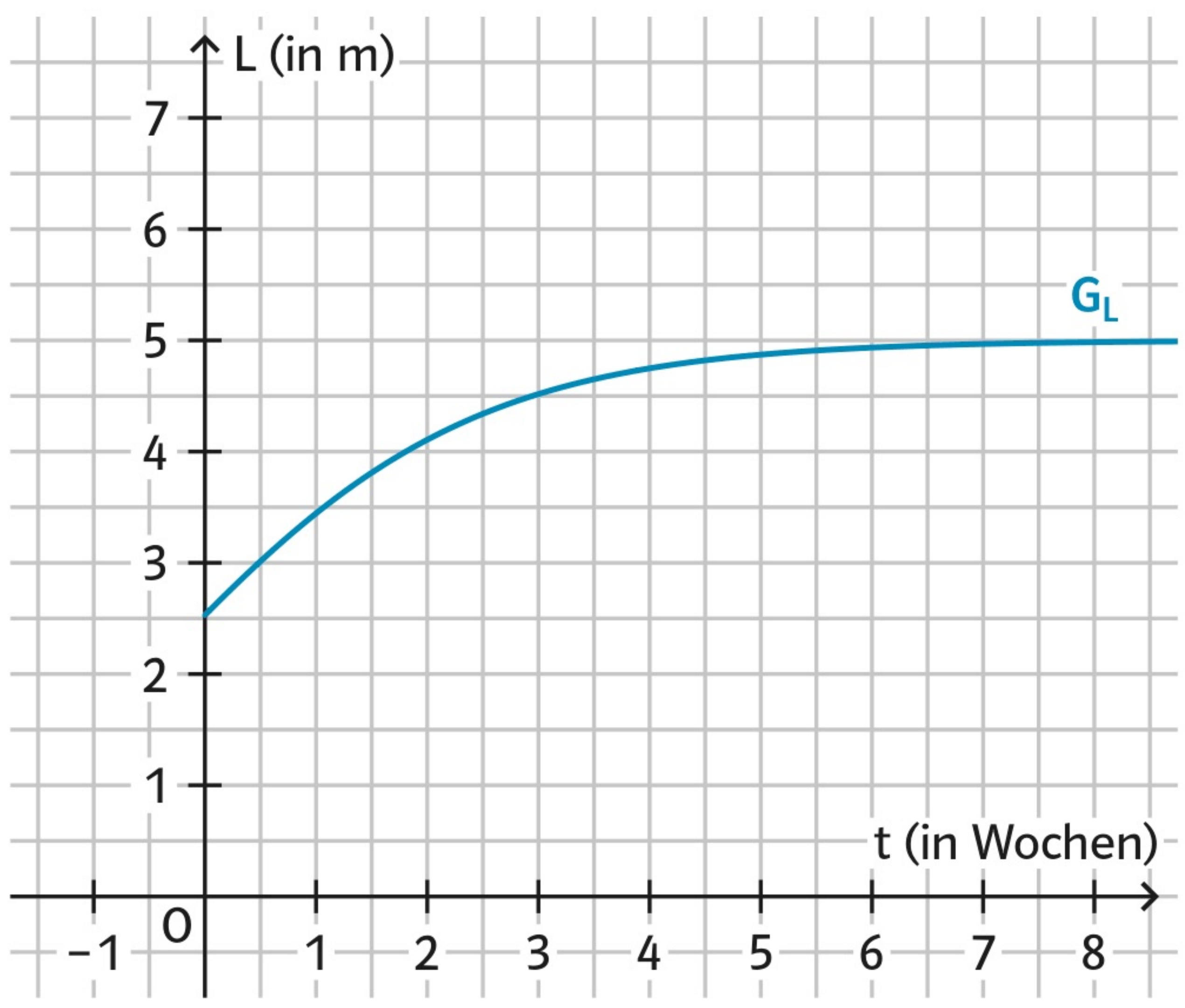
$f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} (-4 + 2h) = -4$

Beispiel 2

In einem Modell wird durch die Funktion L die Länge einer Kürbisranke beschrieben. Dabei werden die Zeit t in Wochen seit Beobachtungsbeginn und die Länge $L(t)$ in m gemessen. Die Abbildung zeigt den Graphen G_L der Funktion L.

a) Bestimmen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

b) Beschreiben Sie, wie man an G_L erkennen kann, dass die Zunahme der Rankenlänge immer geringer wird.

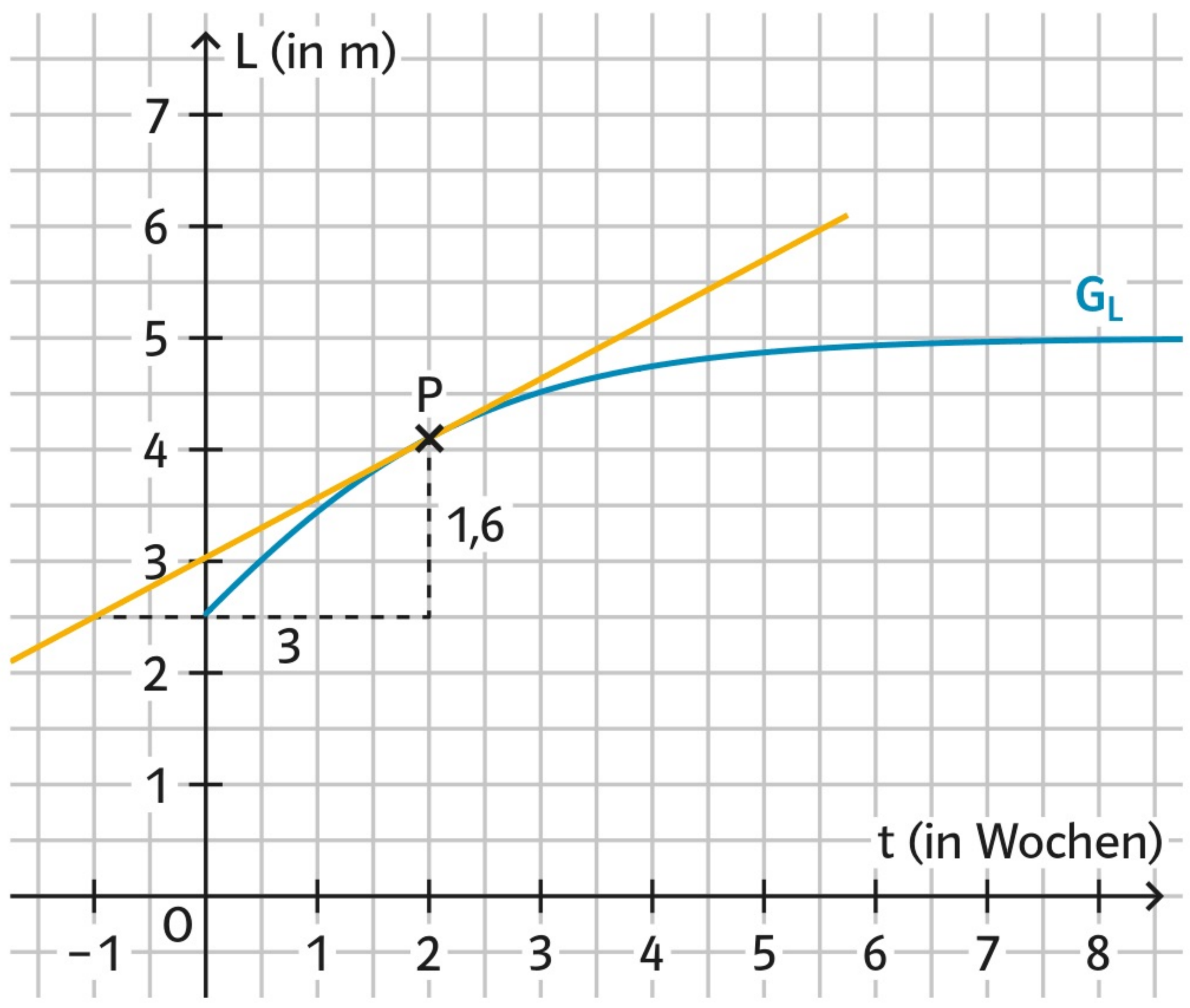




Lösung

a) Man zeichnet nach Augenmaß im Punkt $P(2\,|\,L(2))$ die Tangente an den Graphen von L und bestimmt die Steigung dieser Tangente. Der Wert der Steigung $m \approx \frac{1{,}6}{3} \approx 0{,}53$ entspricht dann angenähert der lokalen Änderungsrate, d. h., die momentane Wachstumsgeschwindigkeit beträgt nach zwei Wochen etwa $0{,}53\,\frac{\text{m}}{\text{Woche}}$.

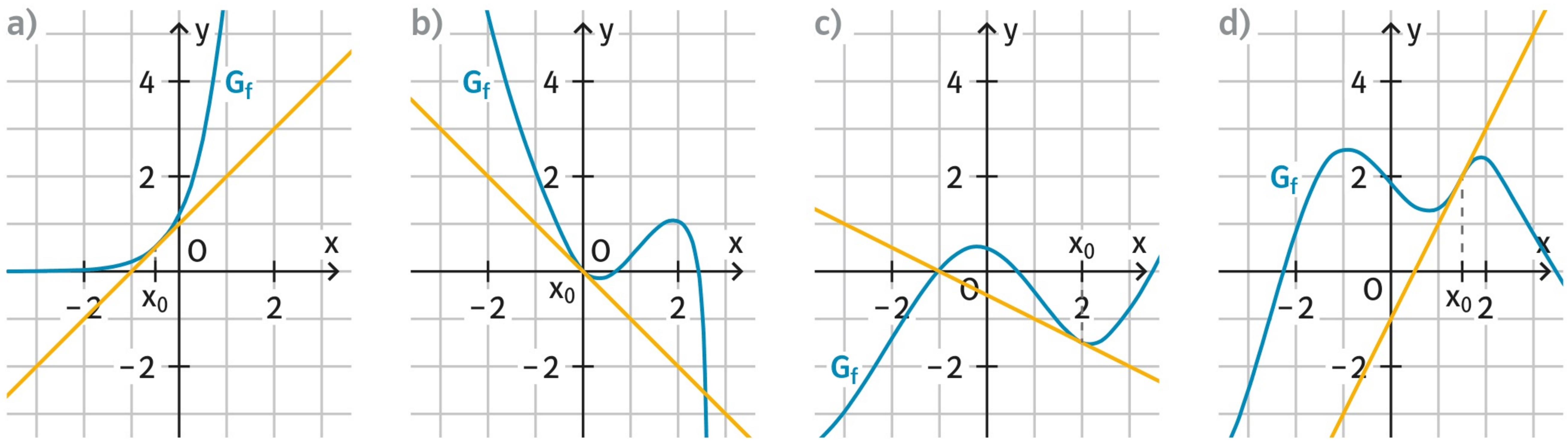
b) G_L wird mit zunehmender Zeit immer flacher und damit die lokale Änderungsrate immer geringer, wobei sie gegen null strebt, ohne negativ zu werden.



Wenn man die Tangente nicht in eine Grafik einzeichnen kann, kann man die Steigung der Tangente an den Graphen auch bestimmen, indem man ein Lineal anlegt.

Aufgaben

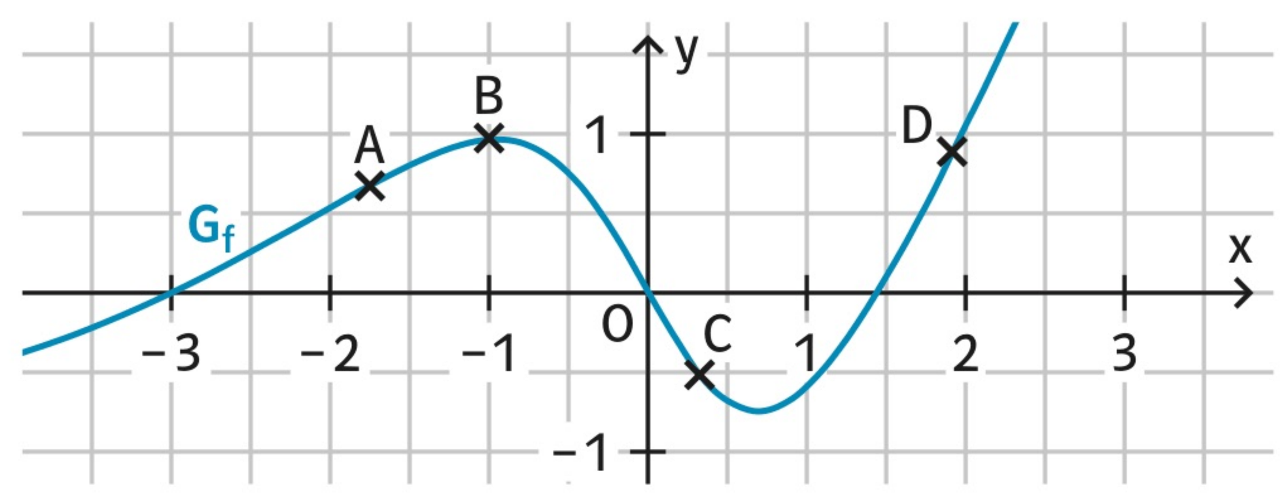
1 Bestimmen Sie die Ableitung von f an der Stelle x_0.



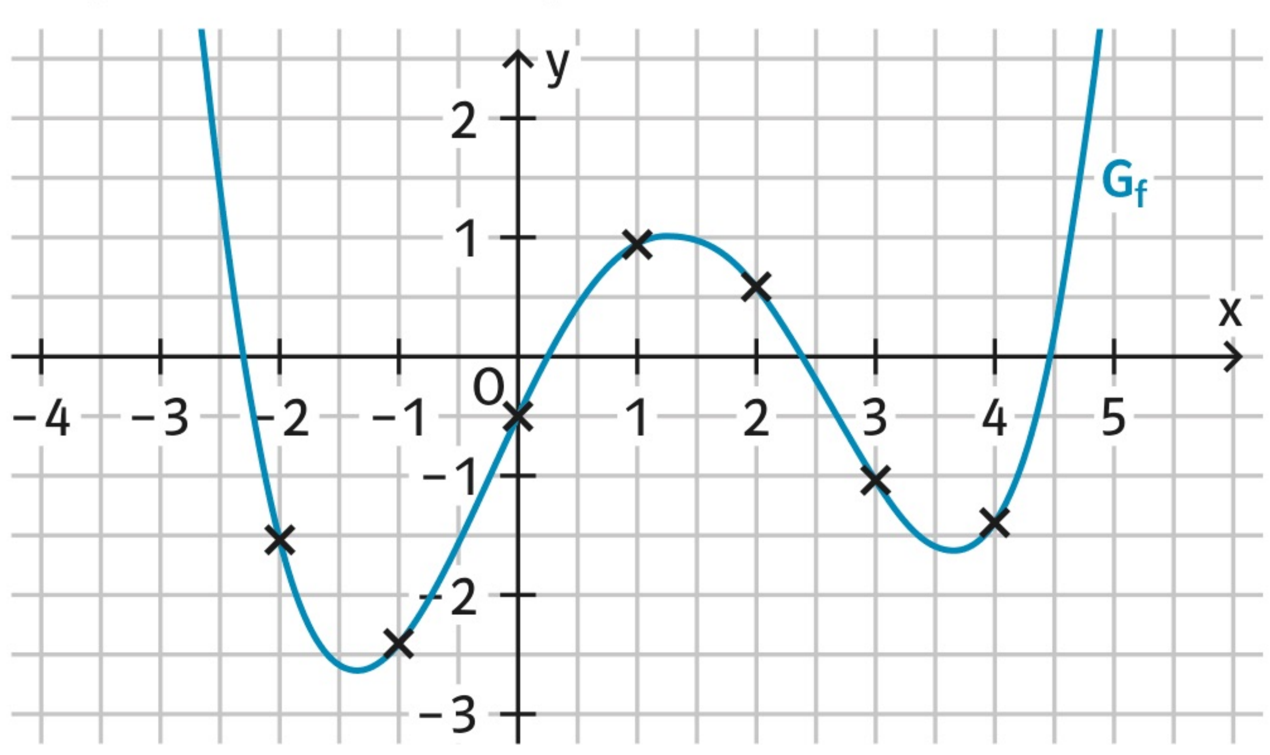
2 Gegeben ist der Graph einer Funktion f.

a) Geben Sie an, in welchen der Punkte A, B, C und D die Steigung des Graphen positiv ist.

b) Ordnen Sie die Punkte A bis D entsprechend den Steigungen in diesen Punkten. Beginnen Sie mit der kleinsten Steigung.



3 Gegeben ist der Graph einer Funktion f.



Zu jedem Kärtchen mit einem x-Wert gehört ein Kärtchen mit dem gerundeten Wert der lokalen Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x. Ordnen Sie die Kärtchen korrekt zu. Es ergibt sich ein Lösungswort.

$x_1 = -2$ | $x_2 = -1$ | $x_3 = 0$ | $x_4 = 1$ | $x_5 = 2$ | $x_6 = 3$ | $x_7 = 4$

−0,1 T | 0,6 H | 0,0 S | 1,6 R | −1,2 C | 1,2 I | −3,9 G | −8,1 A | 7,4 E | −1,5 I | 2,0 T

4 Untersuchen Sie, welches Vorzeichen die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 hat.

a) $f(x) = 5 - x^2;\ x_0 = 2$ **b)** $f(x) = -2x + 3;\ x_0 = -1$ **c)** $f(x) = x^3;\ x_0 = -0{,}5$

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

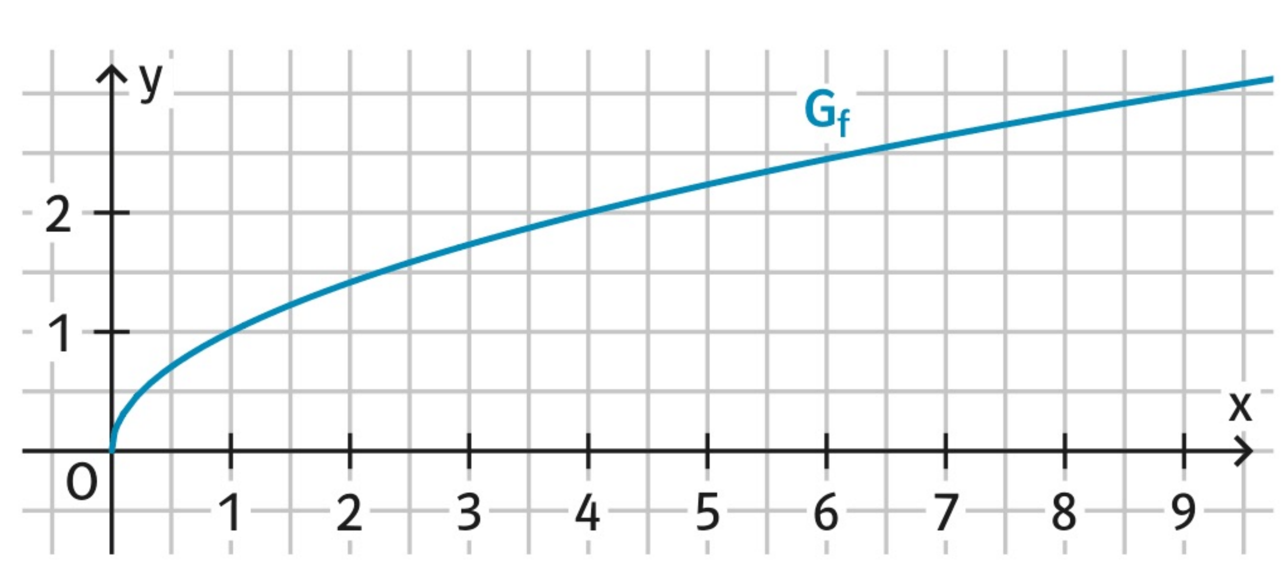
5 Bestimmen Sie rechnerisch die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 2x^2;\ x_0 = 4$ b) $f(x) = 3x - 1;\ x_0 = -1$ c) $f(x) = 5;\ x_0 = -2$
d) $f(x) = -x^2 - 2;\ x_0 = 0$ e) $f(x) = x^2 + 6x;\ x_0 = 2$ f) $f(x) = x^2 - x + 2;\ x_0 = \frac{4}{3}$

6 Ermitteln Sie mithilfe des Graphen folgende Werte.

(1) $f(5)$ (2) $f(5) - f(3)$
(3) $\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$ (4) $f'(5)$

Erläutern Sie bei (3) und (4) die geometrische Bedeutung.



7 Bestimmen Sie arbeitsteilig für die Funktion f mit $f(x) = 4x + 1$ die Ableitungen $f'(1)$, $f'(2)$ sowie $f'(-4)$ und erklären Sie die Ergebnisse geometrisch.

Test 1

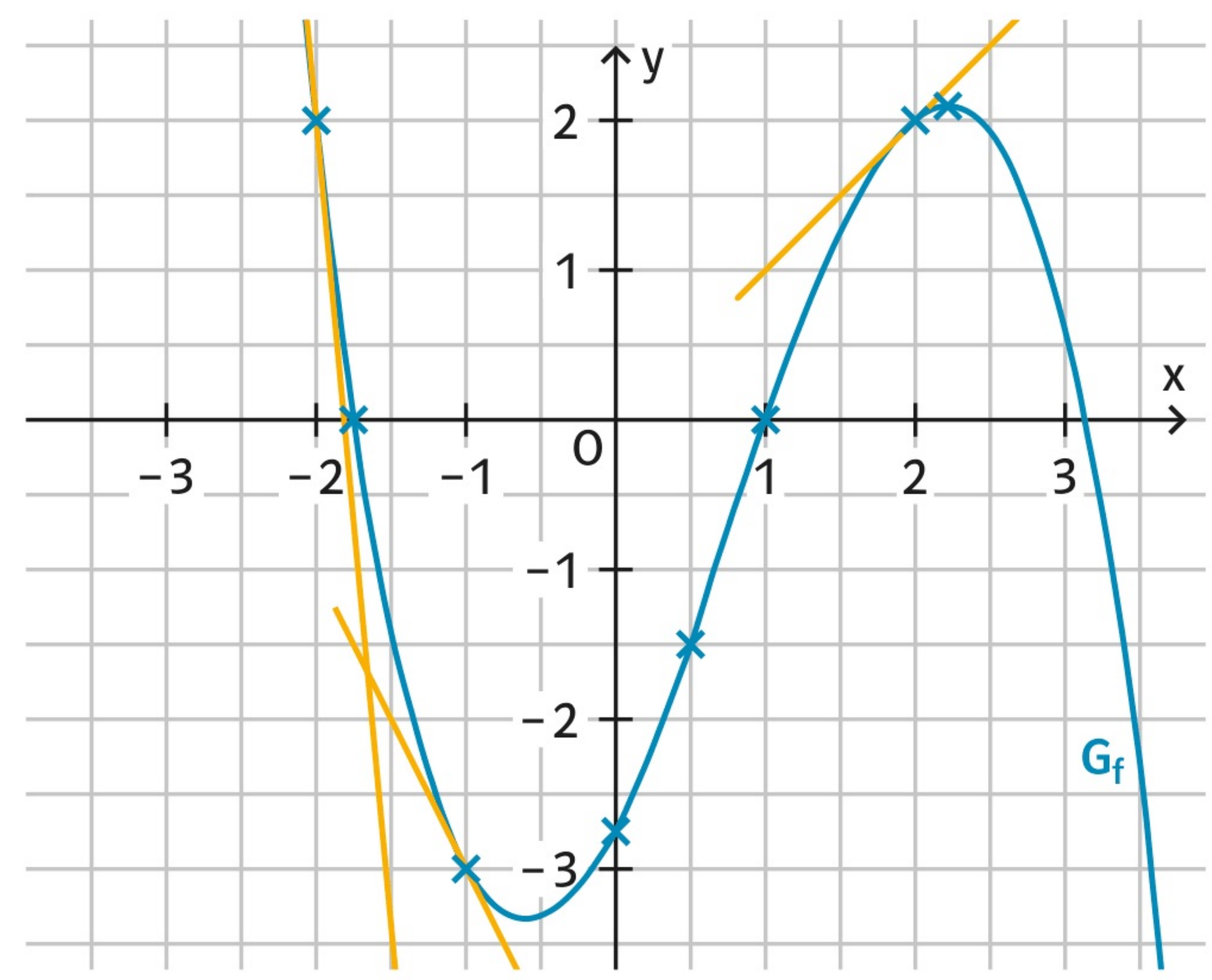
Lösungen | Seite 209

8 Gegeben ist der Graph einer Funktion f.

a) Geben Sie die Ableitung von f an den Stellen −2, −1 und 2 an.

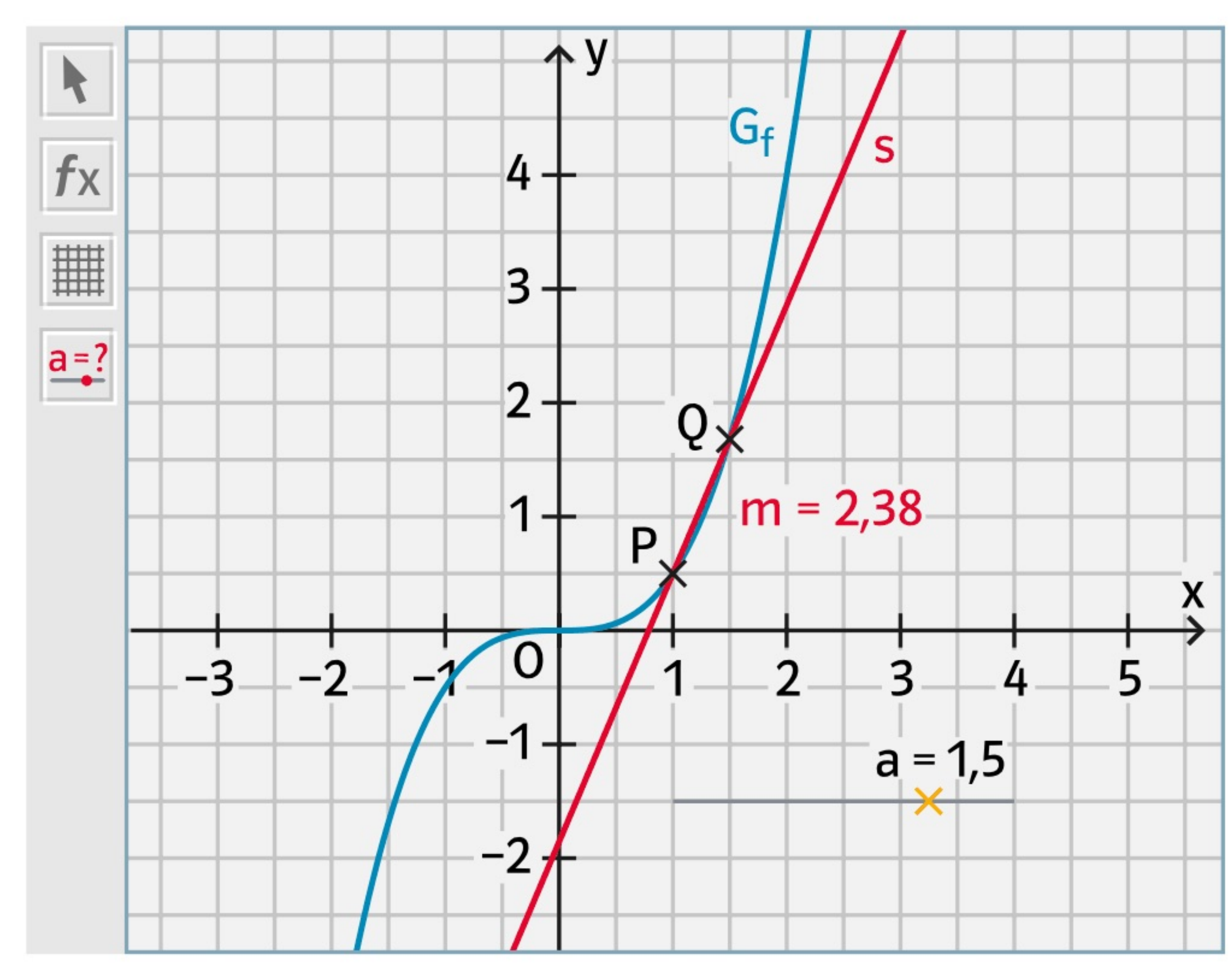
b) Geben Sie an, welche der Ableitungen f′(−1,75), f′(0,5), f′(1) bzw. f′(2,25) positiv, negativ bzw. gleich null sind.

c) Bestimmen Sie f′(0).



9 Bestimmen Sie rechnerisch die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 3x$ an der Stelle $x_0 = -2$.

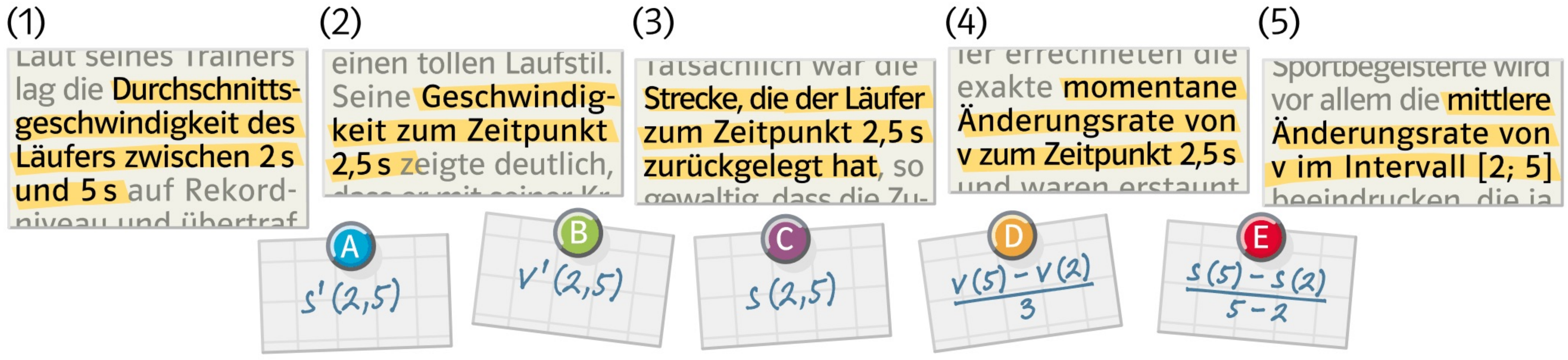
10 Zeichnen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3$ sowie die Sekante s durch die Punkte $P(1|f(1))$ und $Q(a|f(a))$, indem Sie für a einen Schieberegler erstellen. Untersuchen Sie, wie sich die Sekantensteigungen verhalten, wenn der Punkt Q in Richtung des Punktes P verschoben wird, und erläutern Sie damit die Definition des Differentialquotienten von f an der Stelle $x_0 = 1$.



11 Ordnen Sie jeder Größe G ihre Einheit, die lokale bzw. momentane Änderungsrate der Größe und die Einheit der Änderungsrate zu. Für jede Größe ergeben die Buchstaben ein Lösungswort.

Größe G		Einheit von G		lokale bzw. momentane Änderungsrate r von G bei x_0 bzw. t_0		Einheit von r	
Wassermenge W(t) eines Auffangbeckens	G	m	I	Konzentrationsänderung	L	$\frac{m}{s^2}$	T
Länge L(t) einer Pflanze	D	$\frac{mg}{l}$	E	Beschleunigung	S	$\frac{m^3}{s}$	G
Konzentration K(t) eines Medikaments	F	m^3	O	Steigung bzw. Gefälle	U	$\frac{m}{Woche}$	B
Höhe h(x)	H	$\frac{m}{s}$	E	Wachstumsgeschwindigkeit	E	keine	S
Geschwindigkeit v(t)	T	m	A	Volumenänderung	N	$\frac{mg}{l \cdot h}$	D

12 Ein 100-m-Läufer hat zum Zeitpunkt t die Strecke s(t) (t in Sekunden, s(t) in Metern) zurückgelegt. Die zugehörige Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist v(t). Ordnen Sie den beschriebenen Sachverhalten (1) – (5) das richtige Kärtchen A, B, C, D oder E zu.



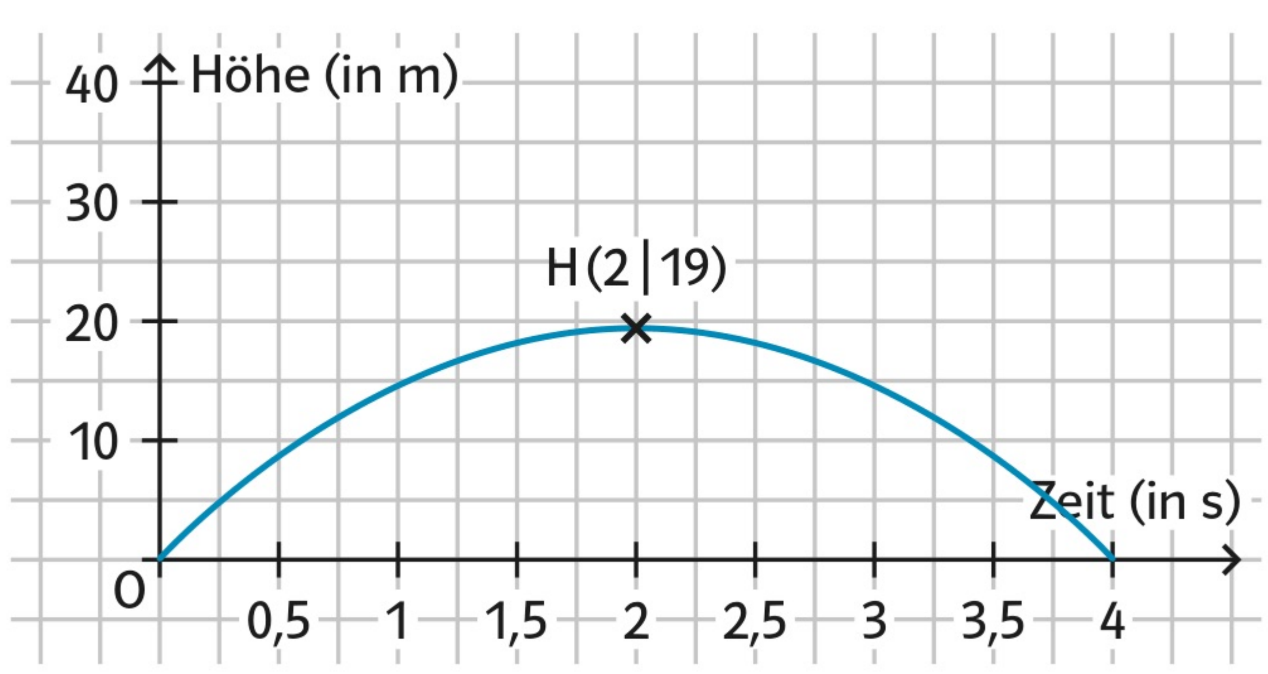
13 Geben Sie an, welche Kärtchen denselben Sachverhalt beschreiben. Begründen Sie sich gegenseitig Ihre Antwort.

- $f'(3) = 5$ **A**
- f hat an der Stelle 3 den Funktionswert 5. **B**
- Die Tangente in $P(3\,|\,f(3))$ hat die Steigung 5. **C**
- $Q(5\,|\,3)$ liegt auf dem Graphen von f. **D**
- $f'(5) = 3$ **E**
- Die Tangente in $P(5\,|\,f(5))$ hat die Steigung 3. **F**
- $f(5) = 3$ **G**
- f hat an der Stelle 5 die Ableitung 3. **H**
- f hat an der Stelle 3 die Ableitung 5. **J**
- $f(3) = 5$ **I**

14 Eine Funktion f mit f(t) (t in Jahren seit Beginn des Jahres 2010, f(t) in Millionen) beschreibt näherungsweise die Anzahl der Einwohner in Deutschland.
Interpretieren Sie die Werte $f(5) = 82{,}2$, $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \approx -0{,}3$ und $f'(5) \approx 0{,}5$.

15 Ein Körper bewegt sich so, dass er in der Zeit t den Weg $s(t) = 3t^2$ (t in Sekunden, s(t) in Metern) zurücklegt. Bestimmen Sie seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten drei Sekunden sowie seine Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = 3$.

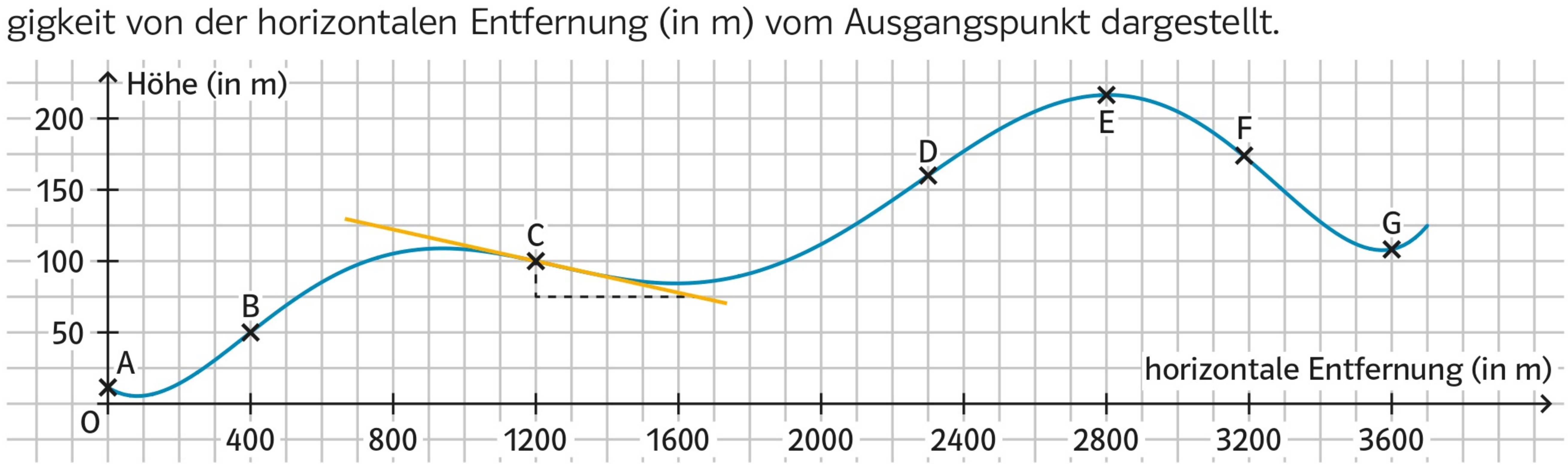
16 Die Grafik zeigt das Zeit-Ort-Diagramm eines Körpers, der zum Zeitpunkt $t = 0$ senkrecht nach oben geschossen wird.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm h(t) der Funktion h (h(t) in m, t in s) und berechnen Sie arbeitsteilig die Momentangeschwindigkeit des Körpers jeweils zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ und $t_3 = 3$.



17 Rollt eine Skateboardfahrerin aus dem Stand einen Hang mit dem Neigungswinkel α hinunter, so lässt sich die zurückgelegte Strecke s (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) näherungsweise durch die Funktion $s: t \mapsto 5 \cdot \sin(\alpha) \cdot t^2$ beschreiben.
Interpretieren Sie die lokale Änderungsrate im Sachzusammenhang und berechnen Sie deren Wert jeweils für $\alpha = 20°$ und $\alpha = 40°$ nach 1,5 Sekunden.



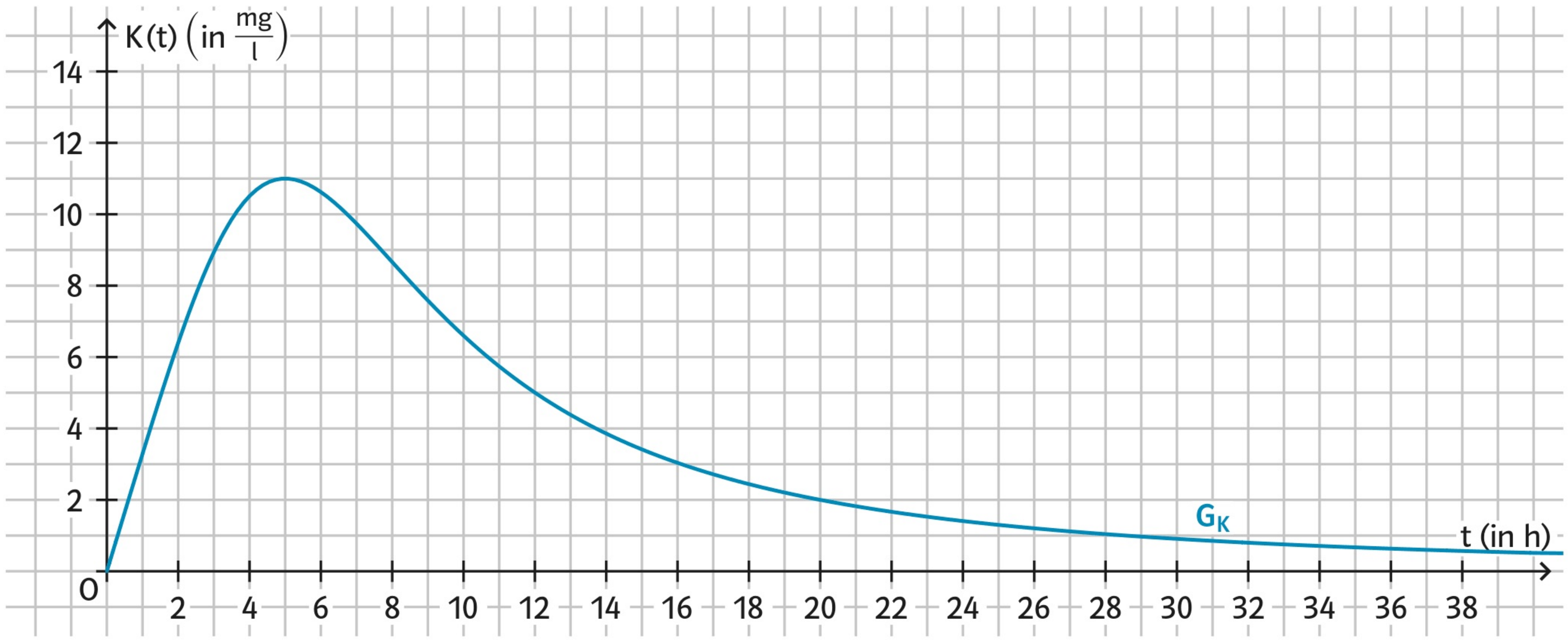
18 Die Darstellung zeigt das Geländeprofil einer Wanderstrecke. Dabei ist die Höhe (in m) in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung (in m) vom Ausgangspunkt dargestellt.



a) Interpretieren Sie die lokale Änderungsrate in einem Punkt im Sachzusammenhang.
b) Jan hat die Tangente im Punkt C eingezeichnet und gibt die Steigung des Graphen mit $m \approx -\frac{1}{4}$ an. Beurteilen Sie seine Lösung.
c) Bestimmen Sie näherungsweise die lokalen Änderungsraten in den markierten Punkten. Gehen Sie arbeitsteilig vor und kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Lösungen.

19 Erläutern Sie die Begriffe mittlere und lokale Änderungsrate an einem geeigneten Beispiel. Erklären Sie deren anschauliche Bedeutung und in welchem Zusammenhang sie stehen.

20 Die Funktion K beschreibt die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Menschen in Abhängigkeit von der Zeit t mit $t \geq 0$. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $K(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Die Abbildung zeigt den Graphen G_K der Funktion K.



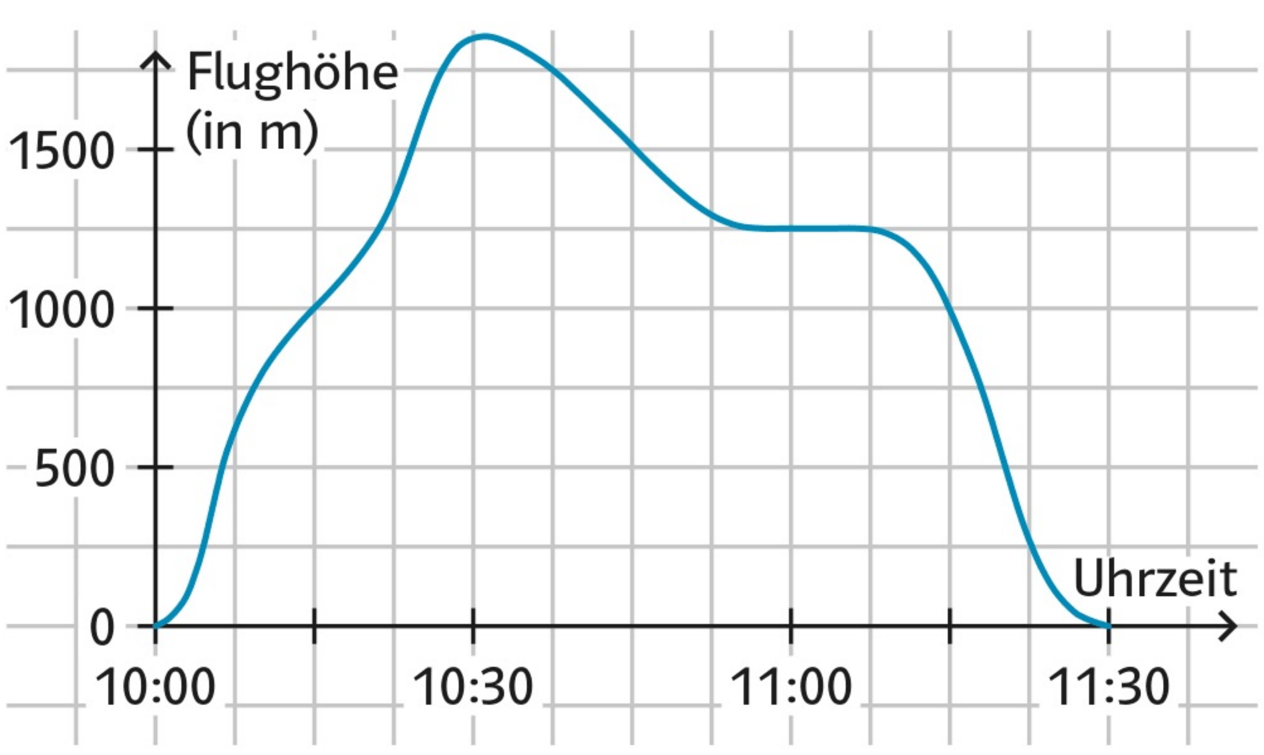
a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0, für den die Konzentration des Medikaments am größten ist. Geben Sie diesen Maximalwert und die momentane Änderungsrate von K zu diesem Zeitpunkt an.
b) Ermitteln Sie jeweils einen Wert der momentanen Änderungsrate von K zu den Zeitpunkten $t_1 = 6$, $t_2 = 8$ und $t_3 = 11$.
c) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.
d) Geben Sie zwei verschiedene Zeitpunkte an, für die die momentanen Änderungsraten von K in etwa gleich groß sind.

Test 2

Lösungen | Seite 210

21 Dargestellt ist der Graph der Funktion *Uhrzeit* ↦ *Flughöhe* während eines eineinhalbstündigen Fluges.

a) Geben Sie die momentane Änderungsrate um 10:15 Uhr, 10:45 Uhr und um 11:15 Uhr an.
b) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Flughöhe am größten bzw. am kleinsten ist.
c) Interpretieren Sie, was die momentane Änderungsrate im Sachzusammenhang beschreibt.



22 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $[a - 1;\ a + 1]$ mit $a \in \mathbb{R}$ und vergleichen Sie mit der momentanen Änderungsrate an der Stelle a. Veranschaulichen Sie dieses Ergebnis grafisch.

Grundwissen Test

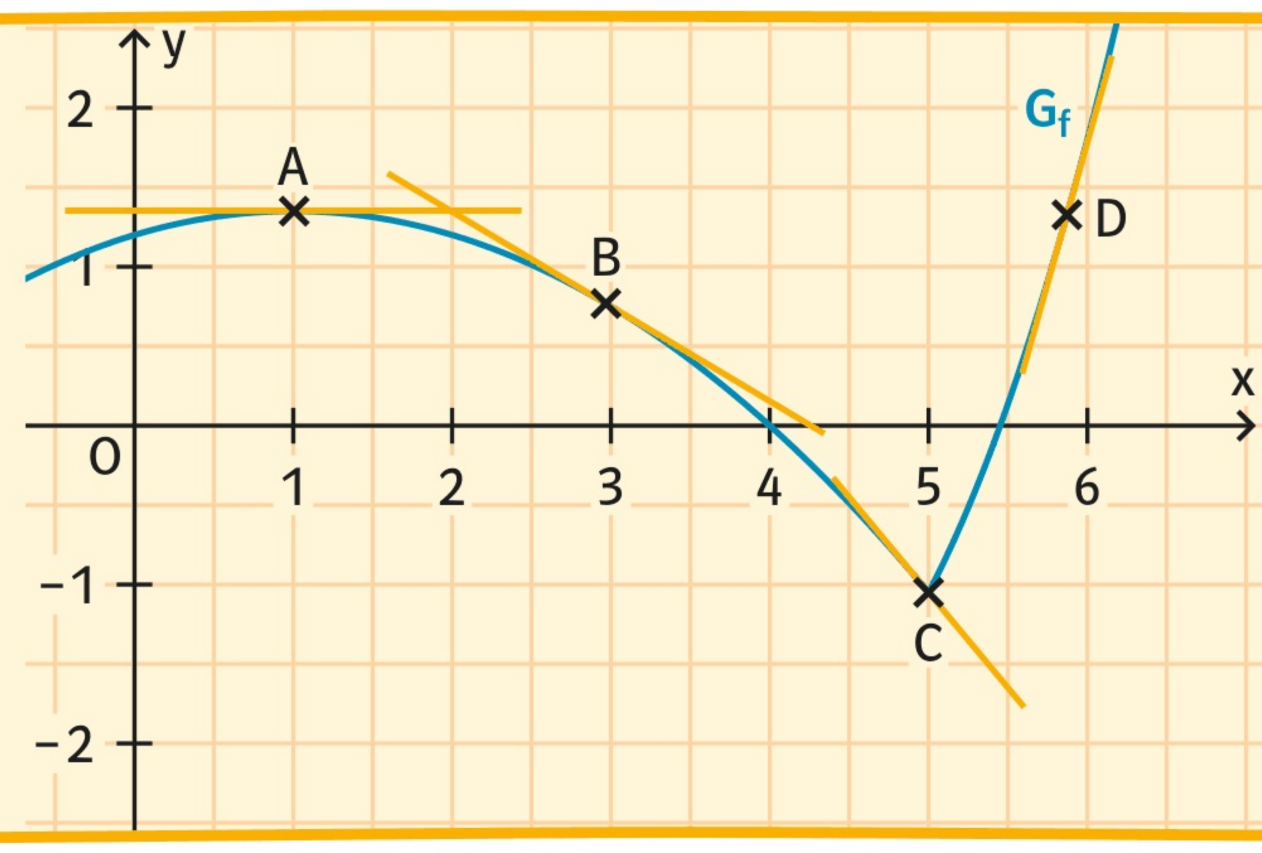
Lösungen | Seite 210

G 23 Benennen Sie zunächst die Art der vorliegenden Gleichung (z. B. Bruchgleichung, lineare Gleichung oder Potenzgleichung) und lösen Sie sie anschließend.

a) $-8 \cdot 4^t = -2$
b) $(x - 3)^2 = 4$
c) $3x^4 - 5 = 4$
d) $\frac{1}{x - 2} - 4 = \frac{2}{2x + 4}$
e) $\left(\frac{t}{2} + 2\right)\left(3 - \frac{t}{4}\right) = 0$
f) $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3 - x}{6}$
g) $1 + 5x = x^{-1}$
h) $3t^4 - 6t^2 = -3$

3 Differenzierbarkeit

An den Graphen einer Funktion f wurden an verschiedenen Stellen Tangenten eingezeichnet, um dort die Steigung zu bestimmen. Nehmen Sie dazu Stellung.



Bei den bisher betrachteten Funktionen konnte immer der Grenzwert des Differenzenquotienten, der Differentialquotient, an einer gegebenen Stelle gebildet werden. Dass dies nicht immer der Fall sein muss, zeigt das folgende Beispiel.

Die Funktion f mit $f(x) = |x|$ wird als **Betragsfunktion** bezeichnet. Schreibt man den Funktionsterm betragsfrei, ergibt sich die abschnittsweise definierte Funktion f mit

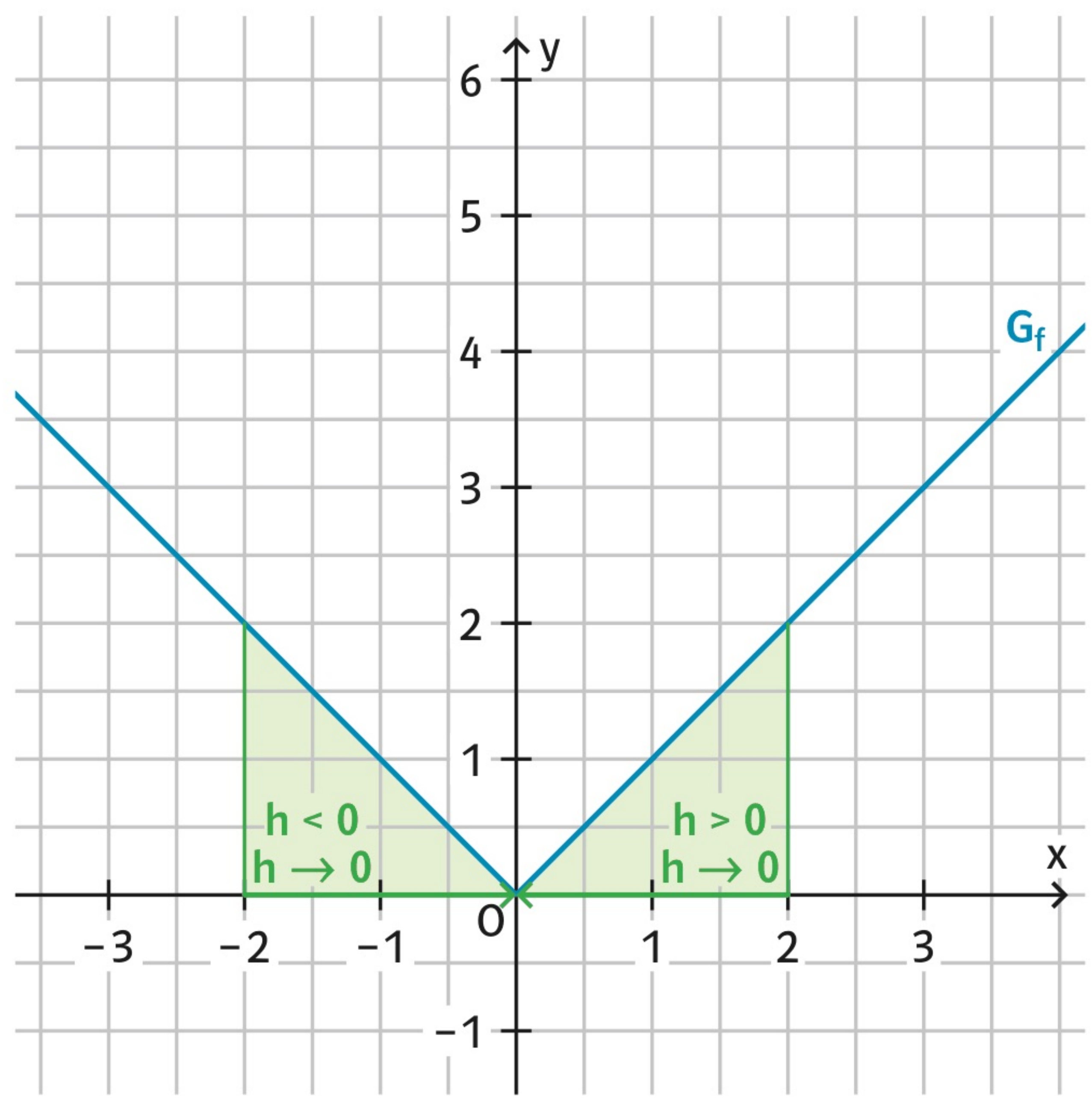
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

Bildet man den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x = 0$, ergibt sich

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{-h}{h} = -1.$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten erhält man

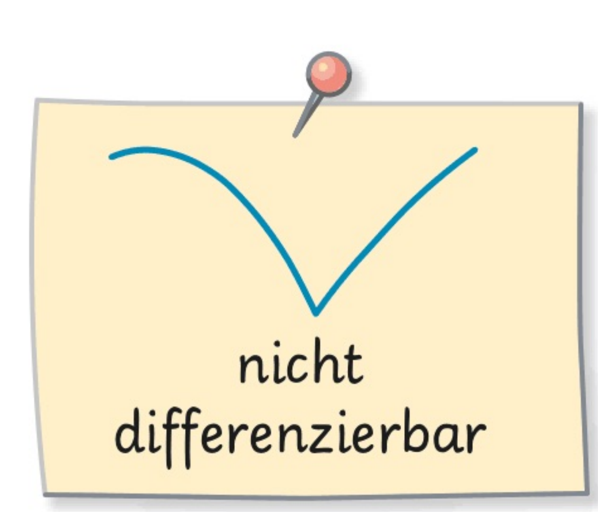
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h}{h} = 1.$$



Da der links- und der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten verschieden sind, existiert der Differentialquotient $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ nicht.
Man sagt, die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ **nicht differenzierbar**.

Definition: Existiert für eine Funktion f an der Stelle $x_0 \in D$ der Differentialquotient $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, so heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

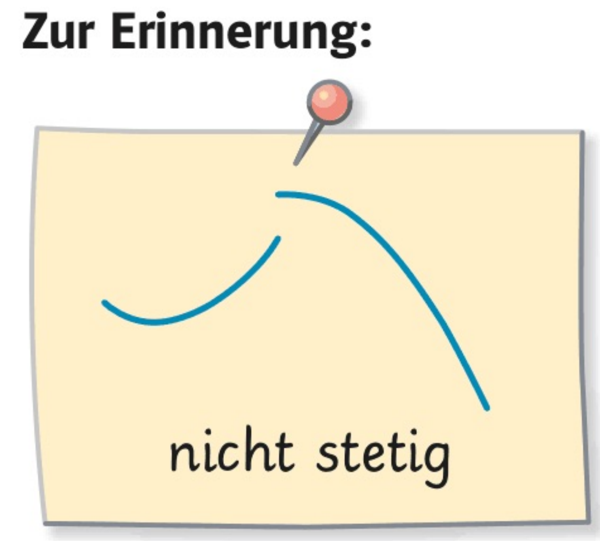
Weist der Graph einer Funktion an einer Stelle einen „Knick“ auf, bedeutet das, dass sich die Sekantensteigungen links und rechts von dieser Stelle verschiedenen Werten annähern. Es existiert somit keine Tangente an dieser Stelle und damit auch keine Ableitung.



Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

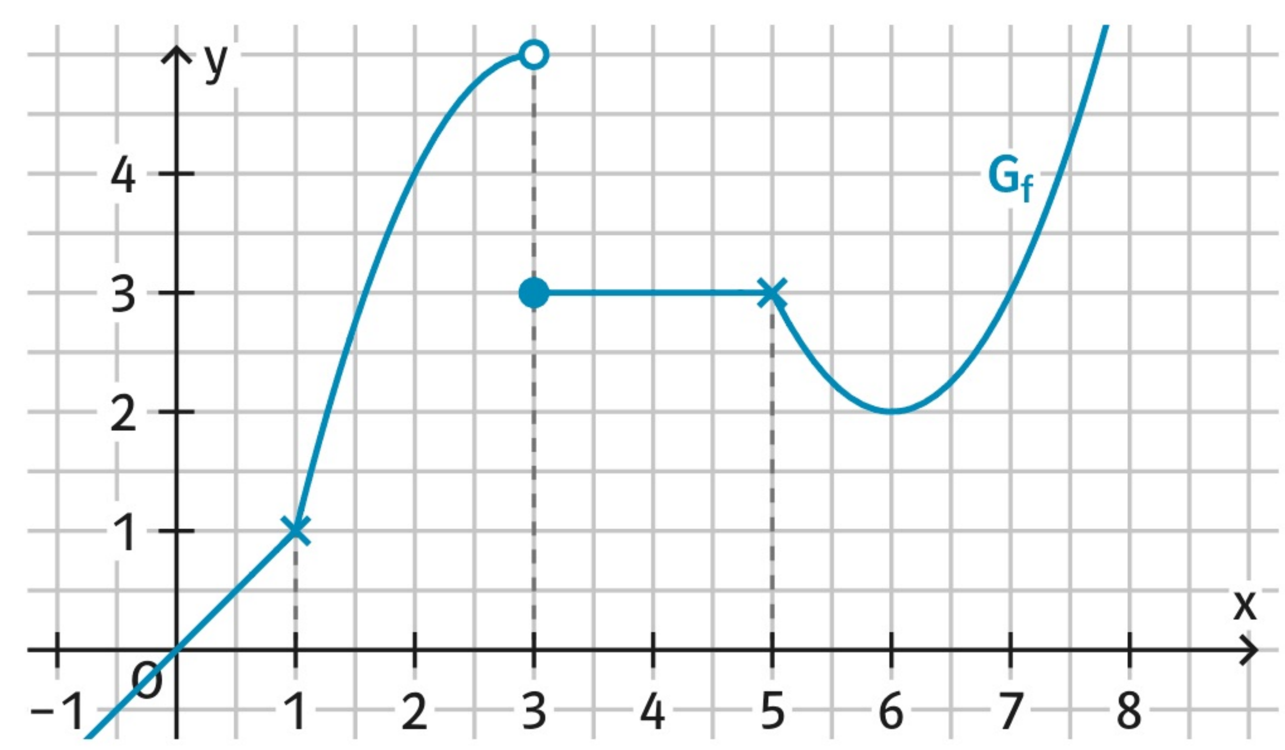
1. Ist eine Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie an der Stelle x_0 stetig.
2. Wenn eine Funktion an einer Stelle x_0 nicht stetig ist, so ist sie an der Stelle x_0 auch nicht differenzierbar.
3. Ist eine Funktion an der Stelle x_0 stetig, folgt daraus nicht, dass sie an der Stelle x_0 auch differenzierbar ist, wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt.

Zur Erinnerung:



Beispiel 1

Gegeben ist der Graph einer Funktion f, die aus Teilfunktionen zusammengesetzt ist. Entscheiden Sie, ob die Funktion an den markierten Stellen stetig ist, und begründen Sie jeweils, ob die Funktion an der Stelle differenzierbar ist.



Lösung

Die Funktion f ist an den Stellen $x = 1$ und $x = 5$ stetig, aber nicht differenzierbar, da ein Knick vorliegt. Die Stelle $x = 3$ ist eine Sprungstelle. Damit ist die Funktion an dieser Stelle nicht stetig und somit auch nicht differenzierbar.

Beispiel 2

Untersuchen Sie rechnerisch die stetige Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{für } x < 4 \\ \frac{1}{8}x^2 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 4$.

Lösung

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{2(4+h) - 6 - 2}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{8 + 2h - 8}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{2h}{h} = 2.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

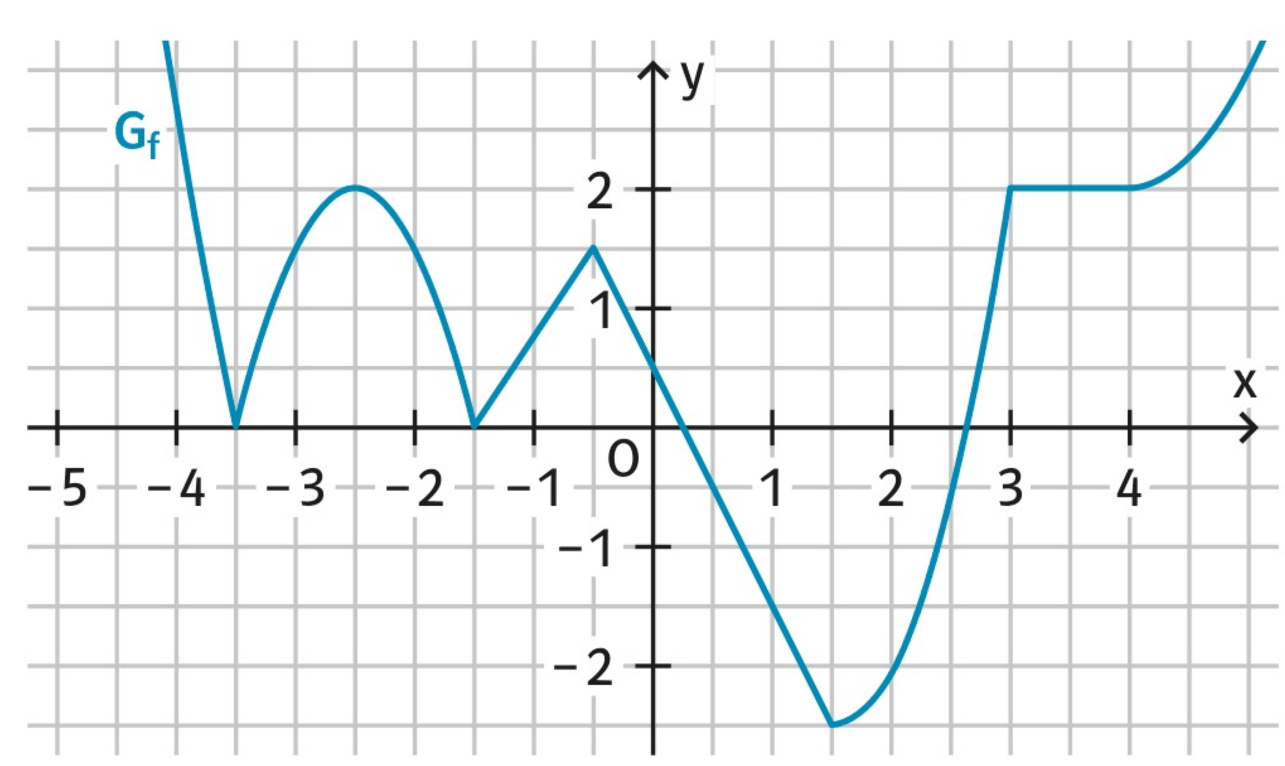
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{1}{8}(4+h)^2 - 2}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{1}{8}(16 + 8h + h^2) - 2}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{2 + h + \frac{1}{8}h^2 - 2}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h + \frac{1}{8}h^2}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(1 + \frac{1}{8}h\right) = 1.$$

Da der links- und der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen, existiert der Differentialquotient an dieser Stelle nicht und somit ist f an der Stelle $x_0 = 4$ nicht differenzierbar.

Aufgaben

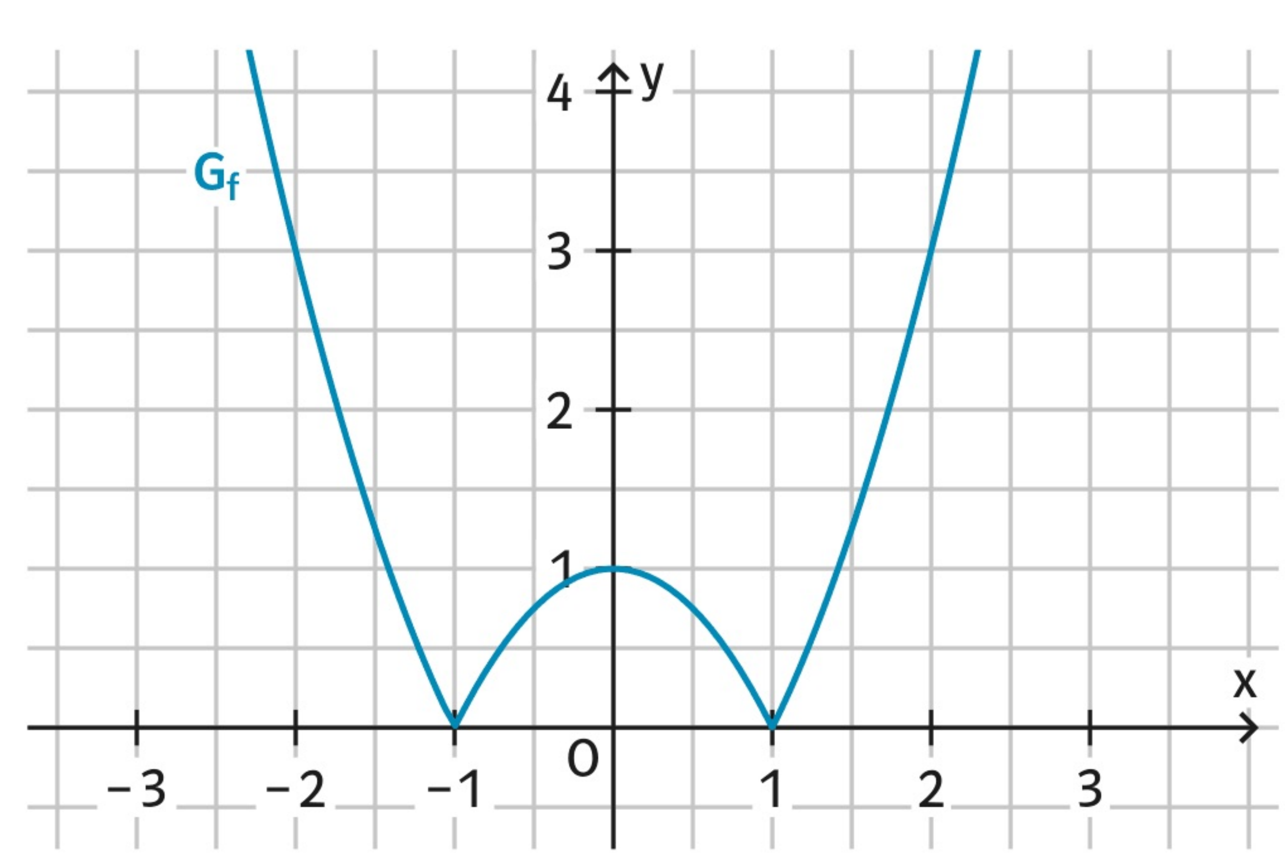
1 Gegeben ist der Graph der Funktion f. Geben Sie die Stellen an, an denen die Funktion f nicht differenzierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.



2 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = |x^2 - 1|$.

a) Beschreiben Sie, wie man sich G_f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = x^2 - 1$ entstanden denken kann, und schreiben Sie den Funktionsterm betragsfrei als abschnittsweise definierte Funktion.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen die Funktion f nicht differenzierbar ist, und weisen Sie dies rechnerisch nach.



3 Untersuchen Sie die stetige Funktion g rechnerisch auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 1$.

a) $g: x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$ b) $g: x \mapsto \begin{cases} x^2 - x & \text{für } x \le 1 \\ x - x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

4 Zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters den Graphen der Funktion f und untersuchen Sie anhand des Graphen, ob f an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

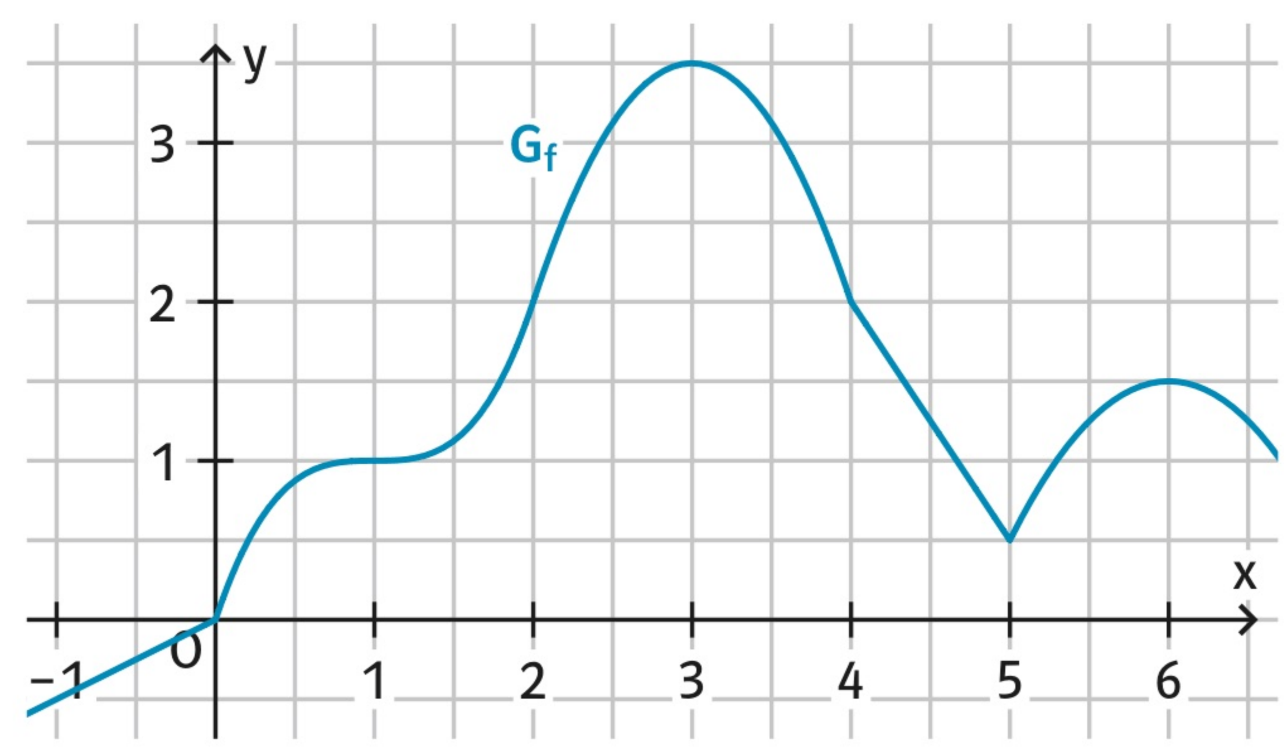
a) $f: x \mapsto x \cdot |x|;\ x_0 = 0$ b) $f: x \mapsto x \cdot |x - 2|;\ x_0 = 2$

Tipp zu Aufgabe 4:
Verwenden Sie zum Zeichnen einer Betragsfunktion einen Befehl wie abs( ) (**absolute value** (engl.): Betrag).

Test 1

Lösungen | Seite 210

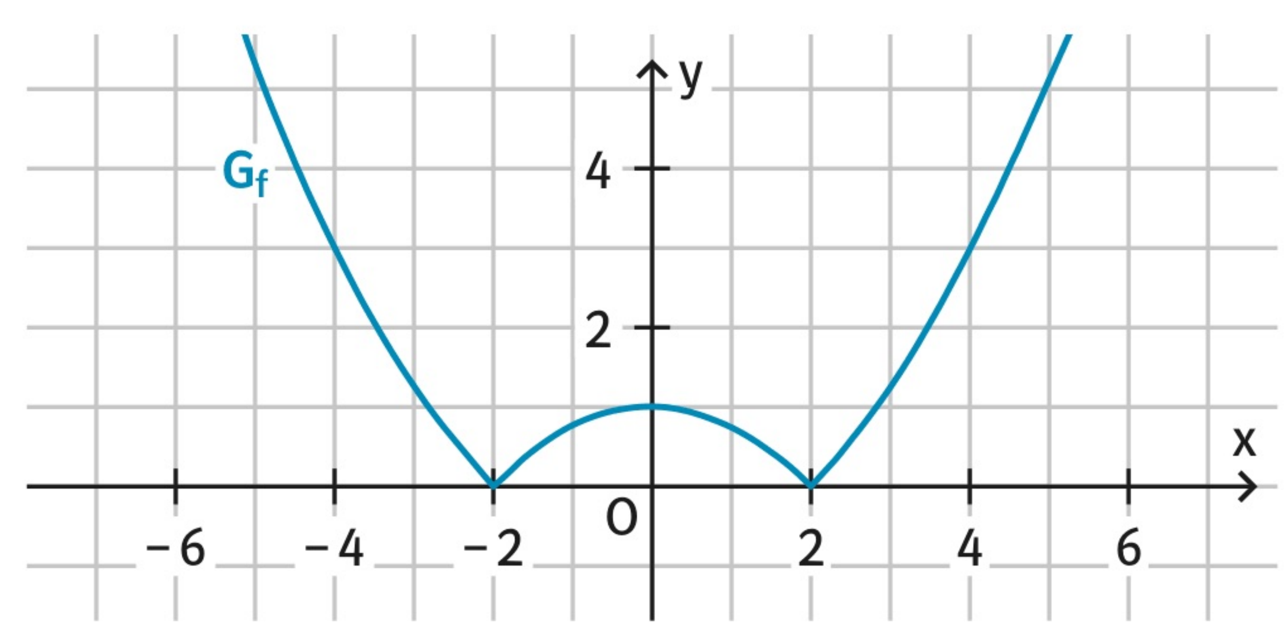
5 Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Geben Sie an, an welchen Stellen die Funktion f nicht differenzierbar ist.



6 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \left|\frac{1}{4}x^2 - 1\right|$.

a) Schreiben Sie den Funktionsterm betragsfrei als abschnittsweise definierte Funktion.

b) Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf Differenzierbarkeit an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$.



7 Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Eine in x_0 stetige Funktion ist an dieser Stelle differenzierbar.

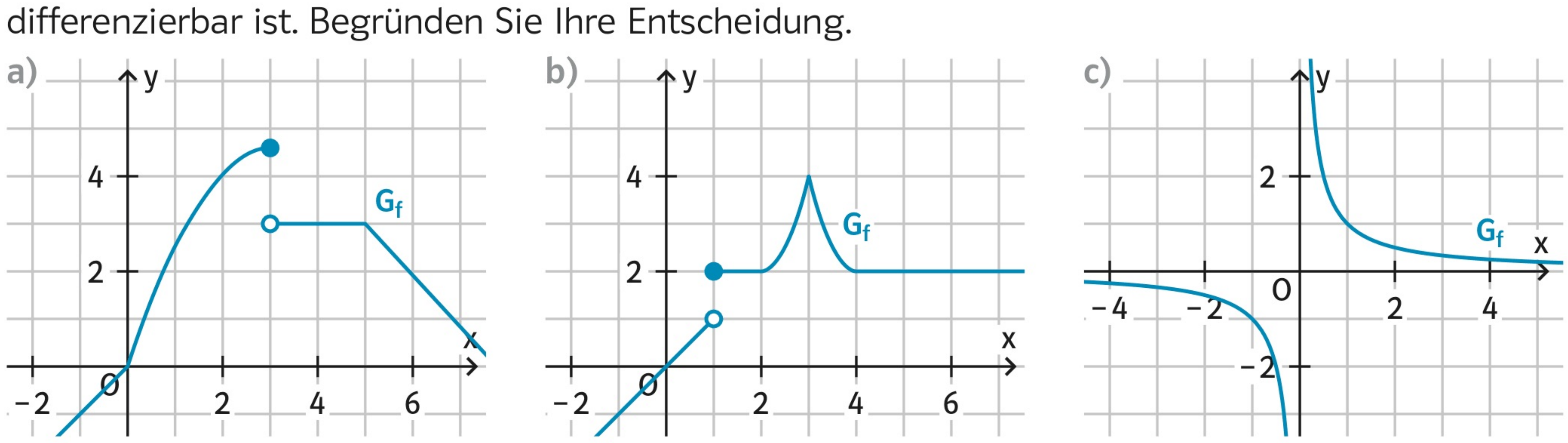
b) Ist eine Funktion in x_0 differenzierbar, so hat der Graph an dieser Stelle keinen Sprung.

8 Geben Sie einen Term einer Funktion an, die an den Stellen $x = -1$ und $x = 2$ stetig, dort aber nicht differenzierbar ist. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Antworten.

9 Gegeben ist Funktion g mit $g: x \mapsto \begin{cases} -(x-1)^2 + 4 & \text{für } x \le 2 \\ (x-3)^2 + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$.

Begründen Sie, dass g an der Stelle $x = 2$ nicht stetig ist, und zeigen Sie, dass der links- und der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x = 2$ nicht übereinstimmen.

10 Geben Sie an, an welchen Stellen die zugehörige Funktion stetig und an welchen Stellen sie differenzierbar ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



11 Geben Sie einen Term einer in ℝ definierten Funktion an, die an der Stelle $x = 3$ nicht differenzierbar ist.

12 Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f, die an der Stelle $x = 1$

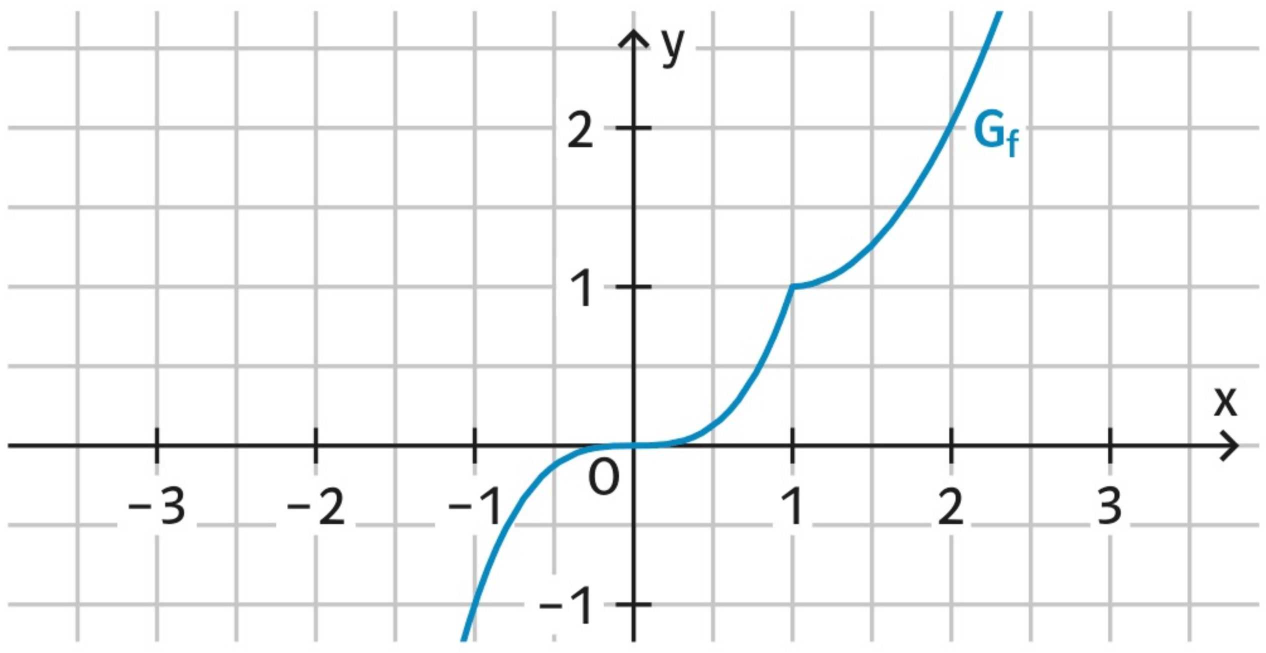
a) definiert, aber nicht stetig ist,
b) nicht definiert ist,
c) stetig und differenzierbar ist,
d) stetig, aber nicht differenzierbar ist.

13 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

a) Erklären Sie, woran man am Graphen erkennt, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass f an der Stelle $x = 1$ nicht differenzierbar ist.



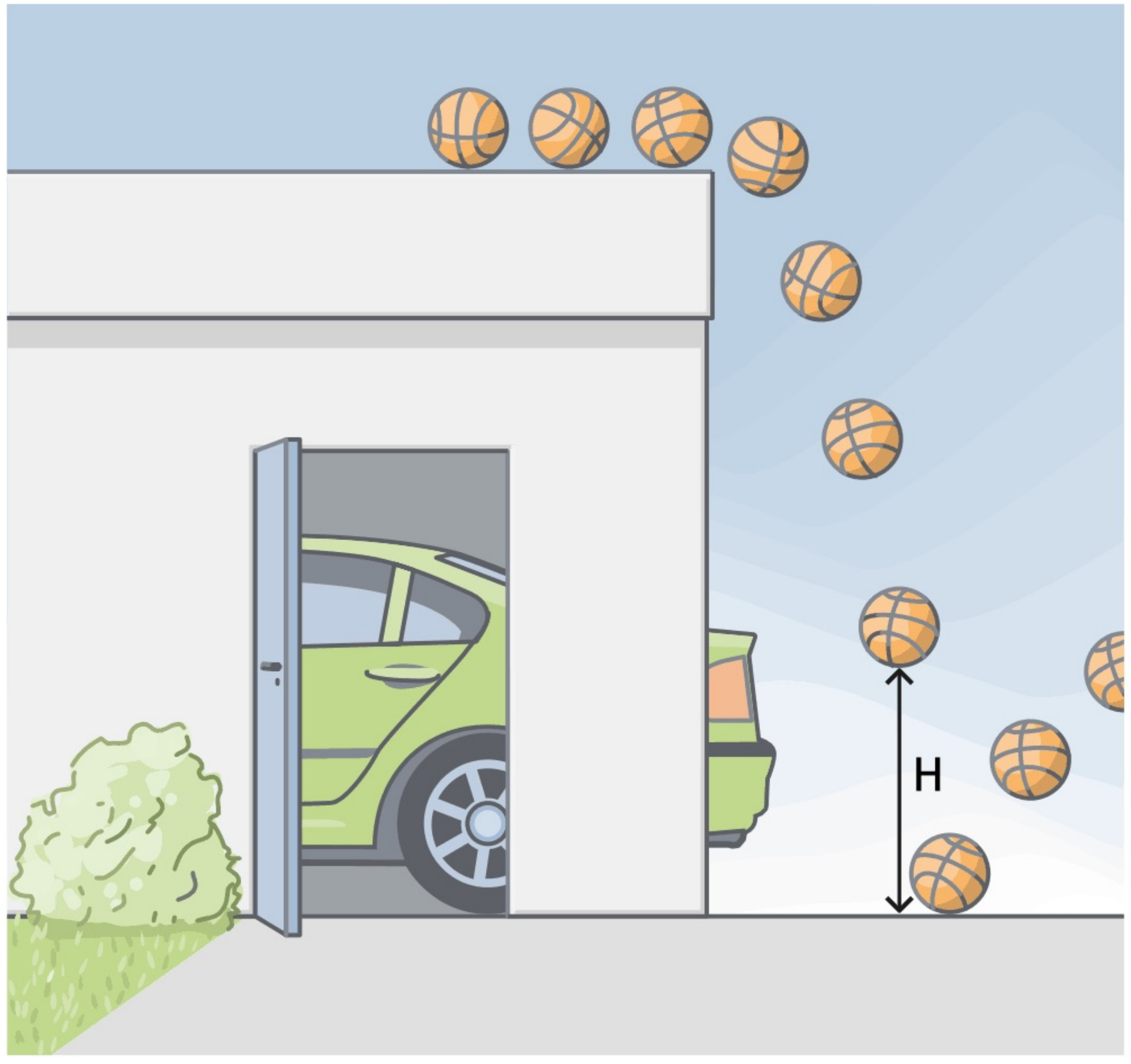
Test 2

Lösungen | Seite 211

14 Ein Ball liegt auf einem Garagendach und wird angestoßen. Er fällt in einem Bogen vom Dach. Die Höhe H (in m) gegenüber dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) lässt sich in den ersten drei Sekunden durch die Funktion H beschreiben:

$$H(t) = \begin{cases} 3{,}2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 3{,}2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 < t \leq 1{,}8 \\ 1{,}8 - 5(t-2{,}4)^2 & \text{für } 1{,}8 < t \leq 3 \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob die stetige Funktion H an den Stellen 1 bzw. 1,8 differenzierbar ist.



15 Georg behauptet, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar sei. Beurteilen Sie seine Aussage.

16 Bestimmen Sie den Wert von $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f an ihrer „Nahtstelle" differenzierbar ist.

a) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 + ax & \text{für } x \leq 0 \\ 2x & \text{für } x > 0 \end{cases}$

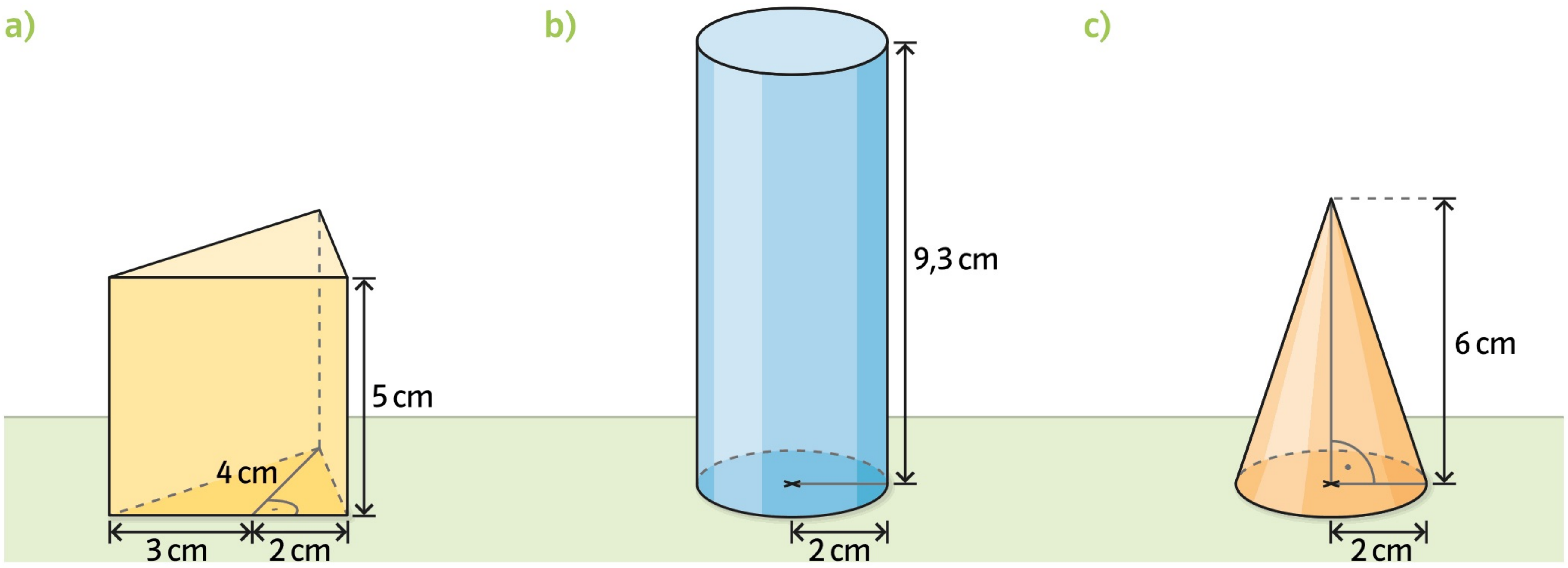
b) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 + 0{,}5 & \text{für } x \leq 2 \\ ax - 3{,}5 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 211

G 17 Berechnen Sie das Volumen des Körpers.

a) b) c)



G 18 Für einen Quader gilt $a = 11\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ und $c = 3{,}5\,\text{cm}$. Berechnen Sie

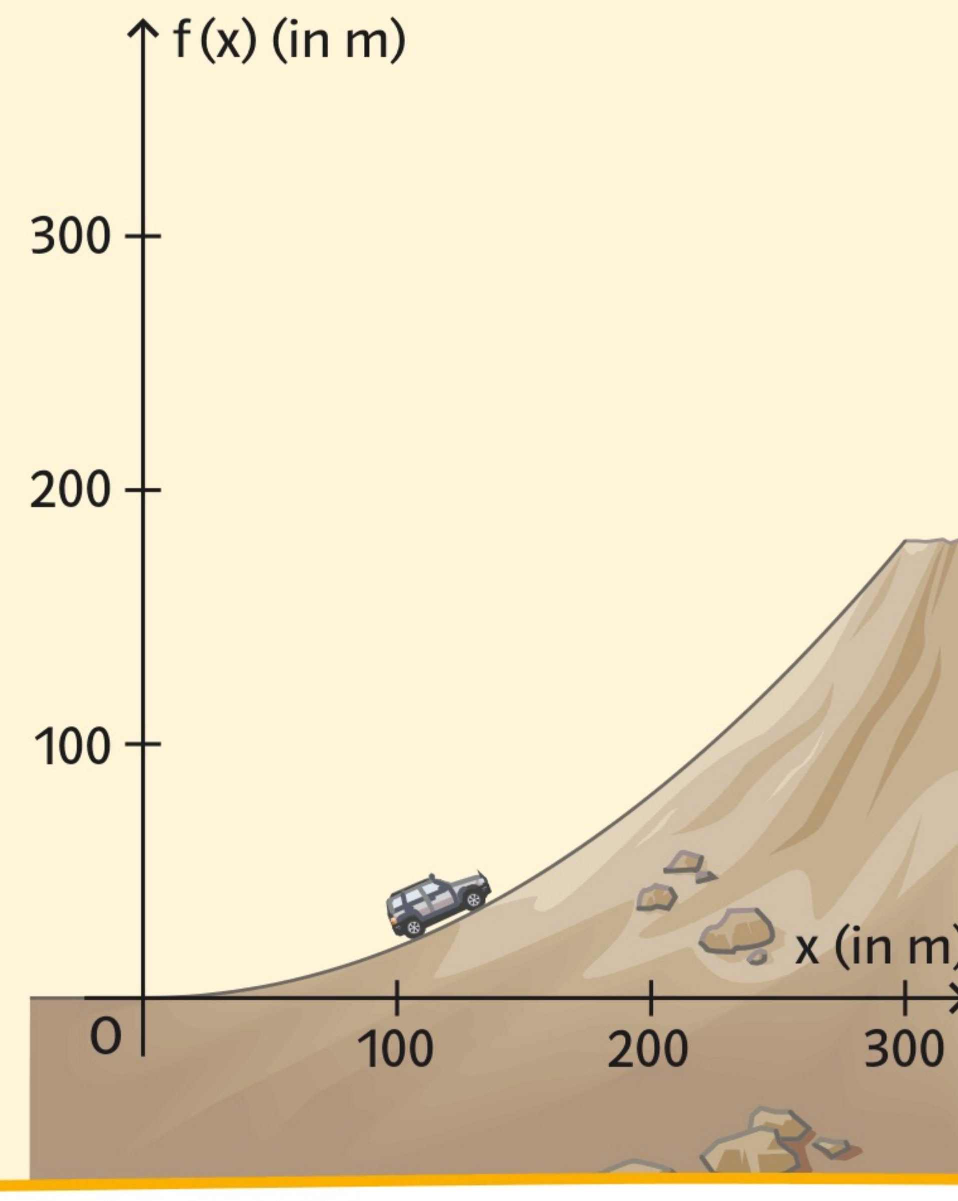
a) das Volumen des Quaders,
b) die Länge der Raumdiagonale d.

4 Die Ableitungsfunktion

Ein direkter Weg von der Kratersohle eines Vulkans bis zum Rand des Kraters wird näherungsweise beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{500}x^2$ $(0 \leq x \leq 300,$ x und f(x) in m).
Der Hersteller eines Geländefahrzeugs behauptet, dass das Fahrzeug Steigungen bis zu 100 % bewältige.

a) Zeigen Sie, dass das Fahrzeug den Kraterrand nicht erreicht.

b) Beschreiben Sie, wie man die Höhe über der Kratersohle berechnen kann, die das Fahrzeug sicher erreicht, wenn die Angaben des Herstellers richtig sind.





Möchte man bei einer gegebenen Funktion f die Ableitung an verschiedenen Stellen bestimmen, dann ist es zweckmäßig, den Differentialquotienten allgemein für eine Stelle $x_0 \in D$ zu berechnen. Dies erfolgt analog zur Bestimmung der Ableitung an einer bestimmten Stelle, was am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = x^2$ gezeigt wird.

Ableitung an der Stelle $x = 2$:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4$$

Ableitung an einer beliebigen Stelle $x = x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

Mithilfe von $f'(x_0) = 2x_0$ lässt sich die Ableitung an einer beliebigen Stelle berechnen, wie zum Beispiel $f'(2) = 4$, $f'(3) = 6$, $f'(8) = 16$ und $f'(-2) = -4$.
Auf diese Weise erhält man zur Funktion f mit $f(x) = x^2$ eine neue Funktion f' mit $f'(x) = 2x$, die jedem $x \in D_f$ die Ableitung f'(x) an der Stelle x zuordnet.

Definition: Ist eine Funktion f für alle Werte x_0 aus einem Intervall I differenzierbar, so nennt man f eine in I **differenzierbare Funktion**.
Ist f eine in ihrer Definitionsmenge D differenzierbare Funktion, so heißt die Funktion, die jedem $x \in D$ den Wert der Ableitung f'(x) zuordnet, **Ableitungsfunktion f' von f**.

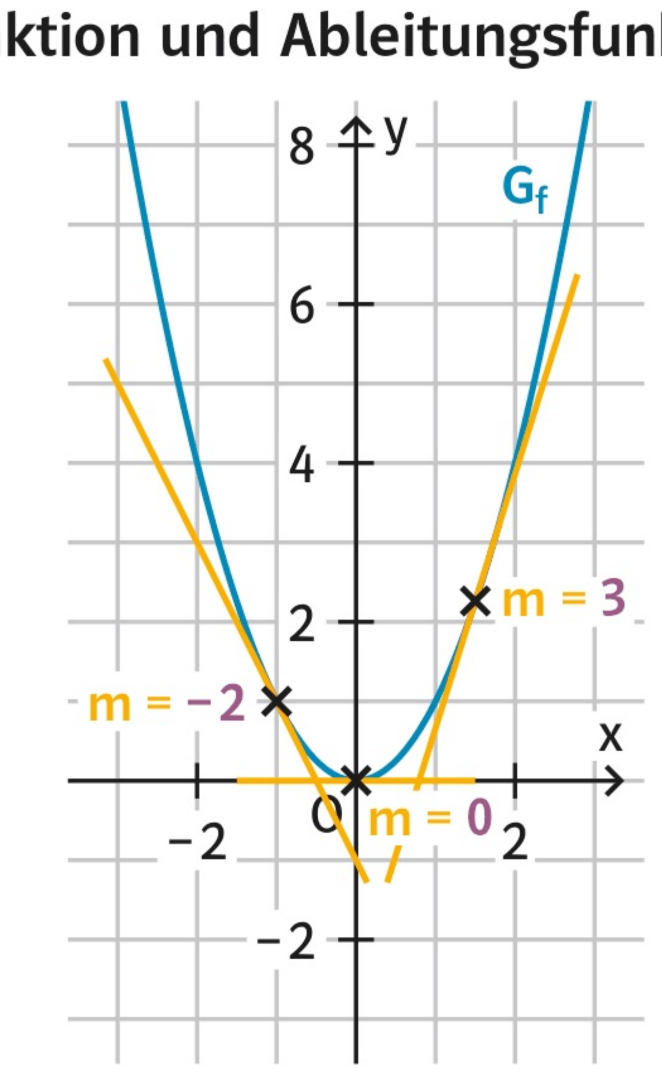
Das Ermitteln der Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**; die Ableitungsfunktion f' nennt man auch kurz **Ableitung**.

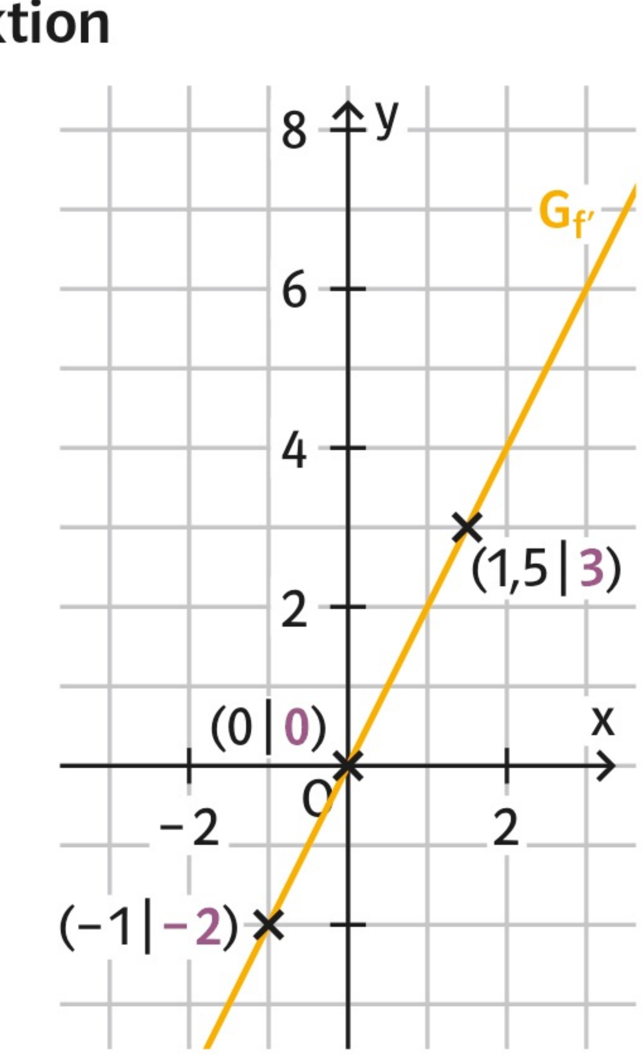
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion

Betrachtet man die Graphen von f und f', so erkennt man:

- Wenn die Steigung des Graphen von f positiv ist, dann verläuft der Graph von f' oberhalb der x-Achse.
- Wenn die Steigung des Graphen von f an einer Stelle null ist, dann hat f' dort eine Nullstelle.
- Wenn die Steigung des Graphen von f negativ ist, dann verläuft der Graph von f' unterhalb der x-Achse.

Es gilt jeweils auch die Umkehrung.



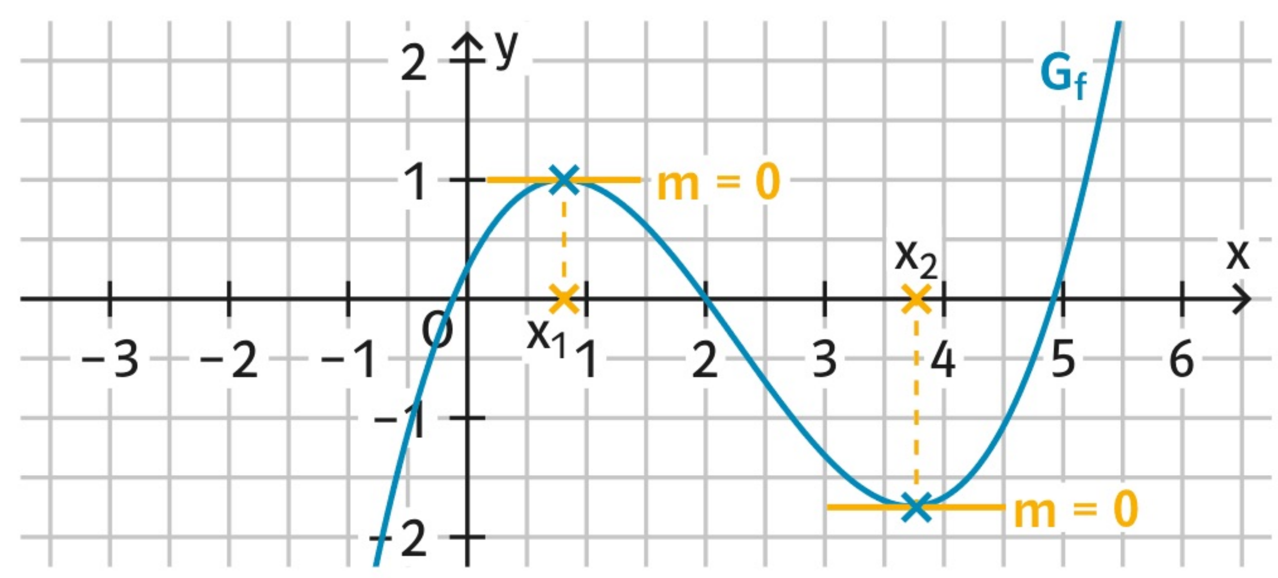


Zur Erinnerung:
Das Monotonieverhalten einer Funktion beschreibt, ob der Graph der Funktion steigt oder fällt.

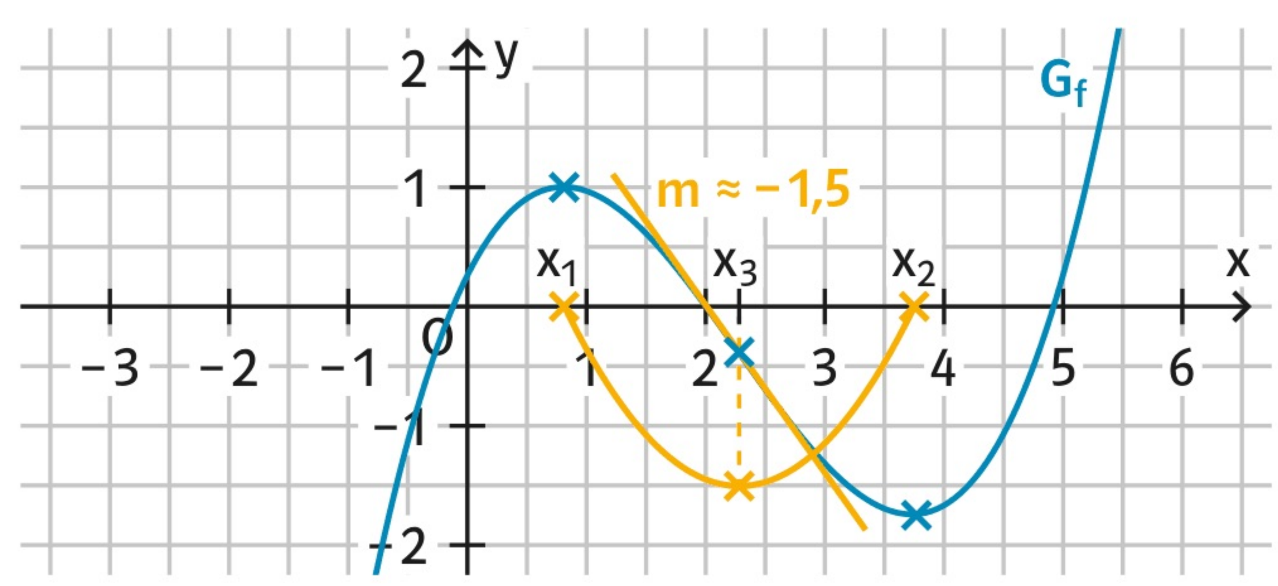
Zeichnen des Graphen einer Ableitungsfunktion

Ist der Graph G_f einer Funktion f vorgegeben, so kann mithilfe von G_f eine Skizze des Graphen $G_{f'}$ der Ableitung f′ erstellt werden. Man ermittelt dazu für verschiedene Punkte von G_f jeweils die Steigung der zugehörigen Tangente. Weist ein Graph „markante“ Graphenpunkte (z. B. mit waagerechter Tangente) auf, so bezieht man diese als Erstes in die Überlegungen ein. Eine mögliche Vorgehensweise wird im Folgenden dargestellt.

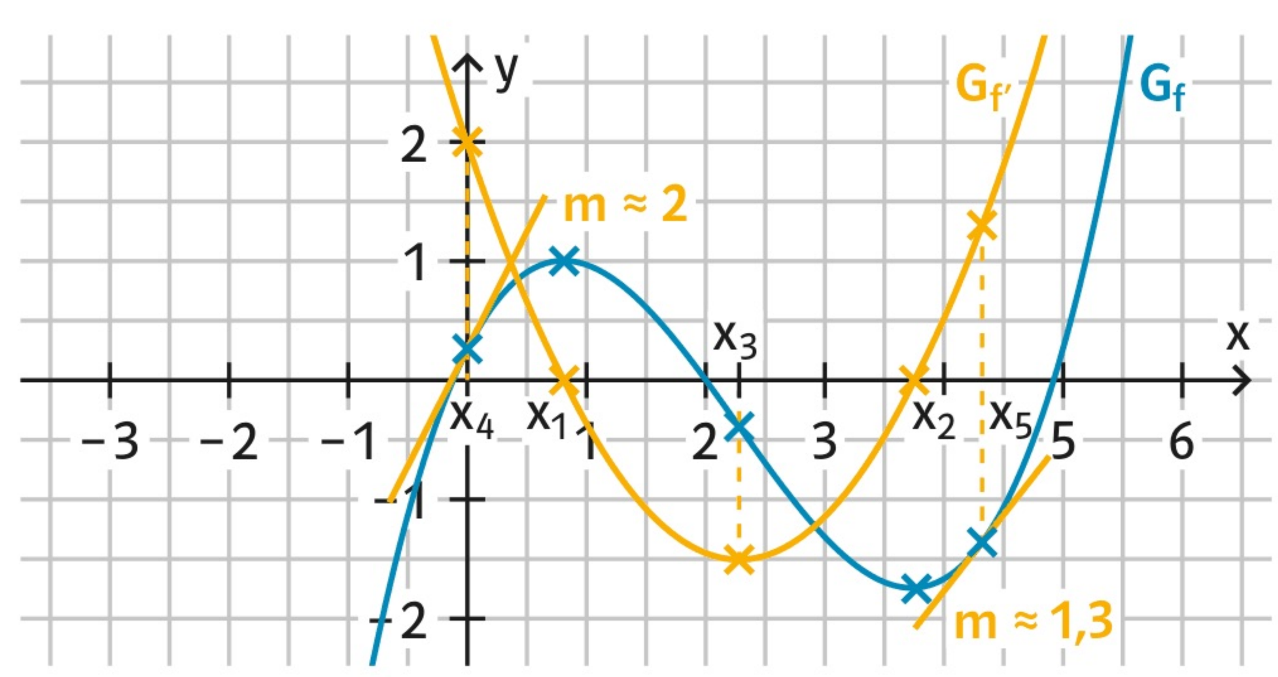
Gegeben ist der Graph G_f der Funktion f.
An den Stellen x_1 und x_2 ist die Steigung von G_f null, d. h., es gilt $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
Daher hat die Ableitung f′ von f an den Stellen x_1 und x_2 Nullstellen.



Zwischen x_1 und x_2 fällt der Graph von f, d. h., es gilt $f'(x) < 0$ für $x_1 < x < x_2$.
Die Steigung von G_f nimmt bis x_3 immer mehr ab und dann wieder zu. Also hat f′ bei x_3 den kleinsten Funktionswert, $f'(x_3) \approx -1{,}5$.
Damit kann $G_{f'}$ für $x_1 < x < x_2$ skizziert werden.



Für $x > x_2$ steigt G_f, d. h., es gilt $f'(x) > 0$ für $x > x_2$. Da die Steigung von G_f für größer werdende x-Werte immer mehr zunimmt, nehmen auch die Werte von f′ immer mehr zu.
Entsprechendes gilt für $x < x_1$.
Bestimmt man z. B. für x_4 und x_5 noch zusätzliche Steigungswerte, kann man $G_{f'}$ anschließend gut skizzieren.



Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 3x$.

a) Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion mithilfe des Differentialquotienten.
b) Berechnen Sie f′(2) und f′(−1).
c) Berechnen Sie die Stelle x_0 so, dass $f'(x_0) = -2$ gilt.
d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

Lösung

a) $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{-(x_0 + h)^2 + 3(x_0 + h) - (-x_0^2 + 3x_0)}{h}$

$= \frac{-x_0^2 - 2x_0h - h^2 + 3x_0 + 3h + x_0^2 - 3x_0}{h}$

$= \frac{-2x_0h - h^2 + 3h}{h} = \frac{h(-2x_0 - h + 3)}{h}$

$= -2x_0 - h + 3$

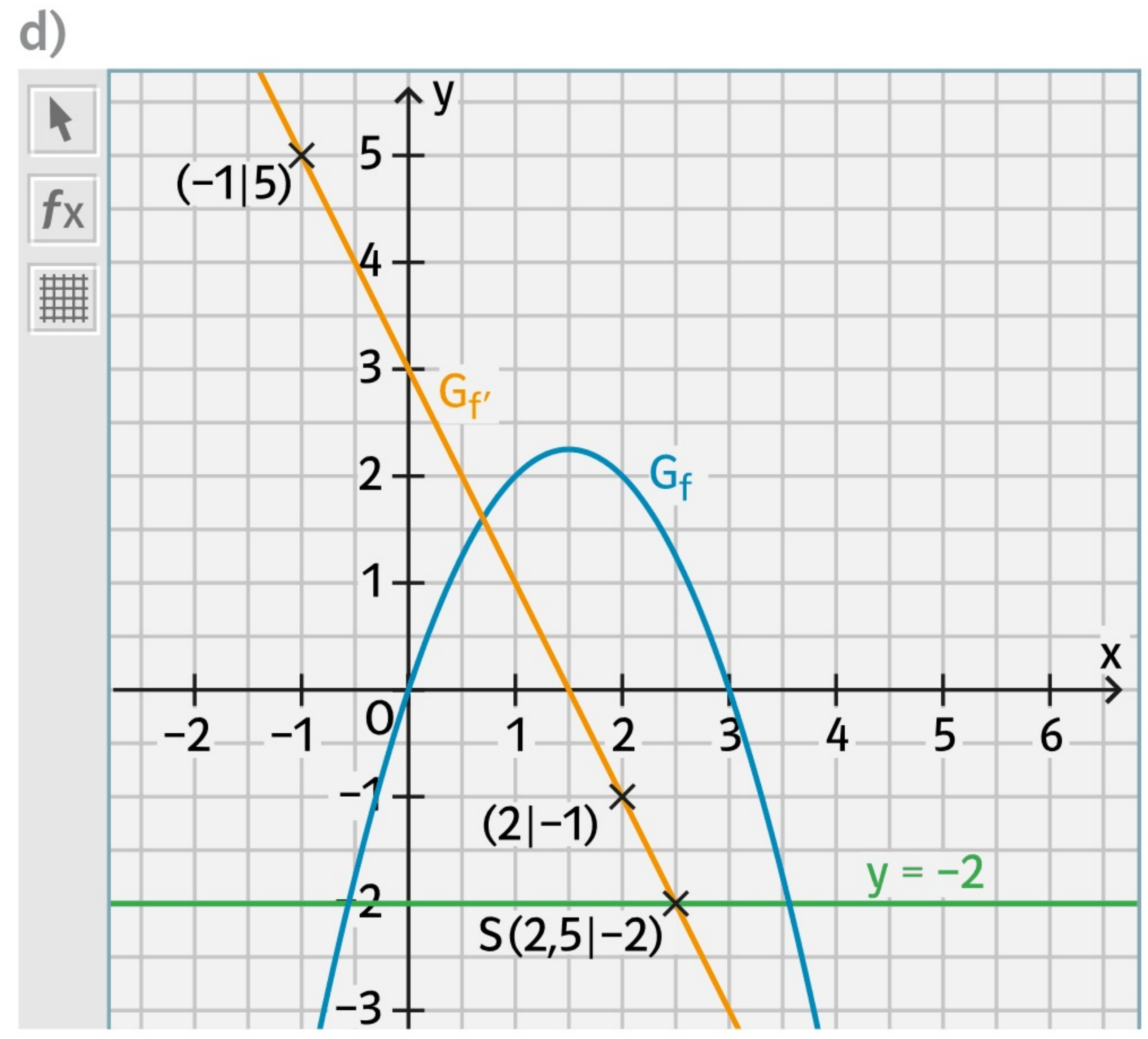
$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} (-2x_0 - h + 3) = -2x_0 + 3$

Da die Stelle x_0 beliebig gewählt ist, erhält man allgemein $f'(x) = -2x + 3$.

b) $f'(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -1$
$f'(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$

c) $f'(x) = -2 \Rightarrow -2x + 3 = -2$
$-2x = -5$
$x = 2{,}5$

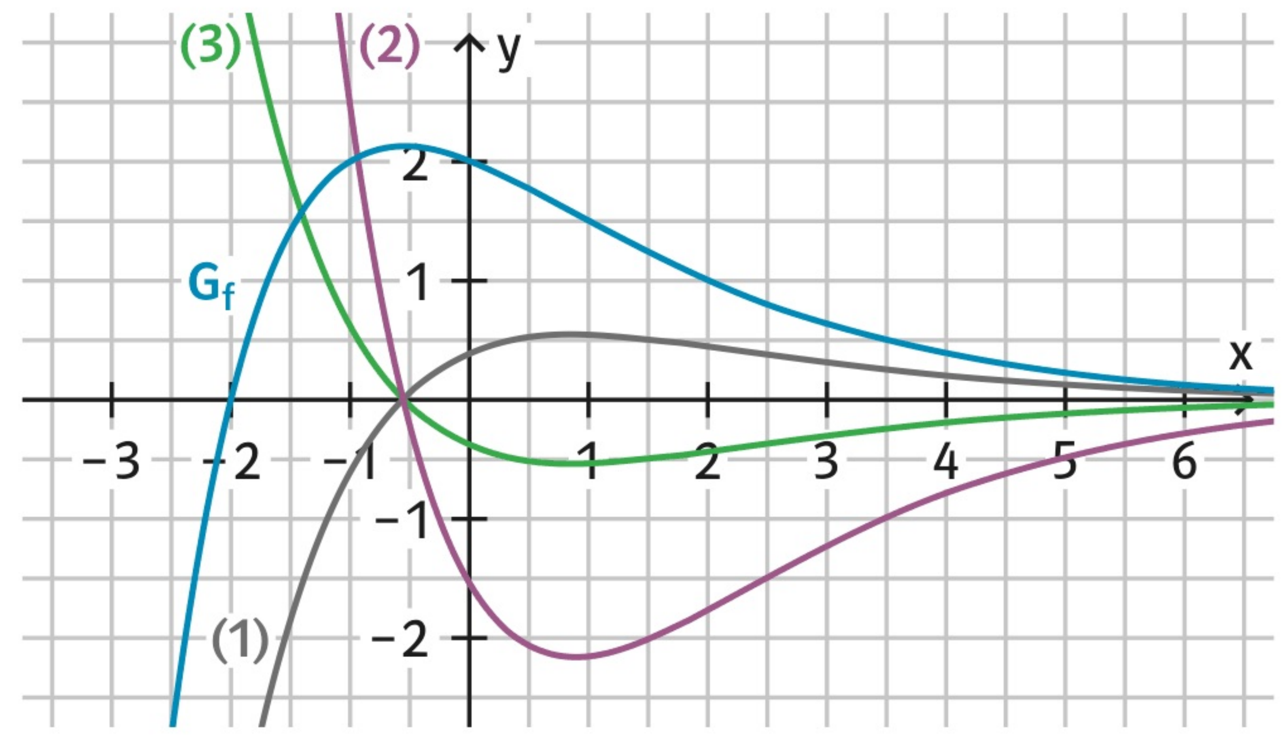
d)



Hinweis:
Mit einer geeigneten Mathematiksoftware kann man mithilfe eines Befehls die Ableitungsfunktion einer Funktion direkt bestimmen.

Beispiel 2

Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f. Geben Sie an, welcher der anderen Graphen der Graph der Ableitungsfunktion f′ von f ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



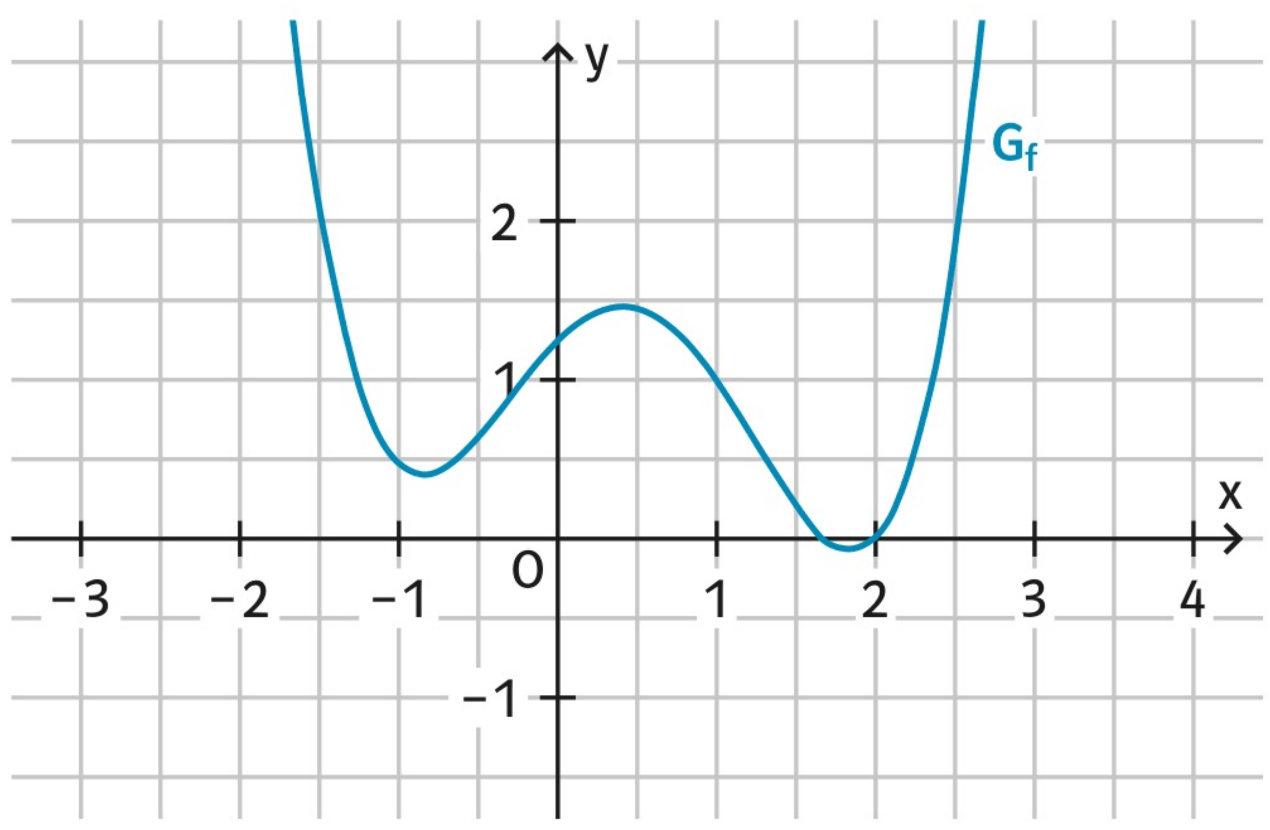
Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip

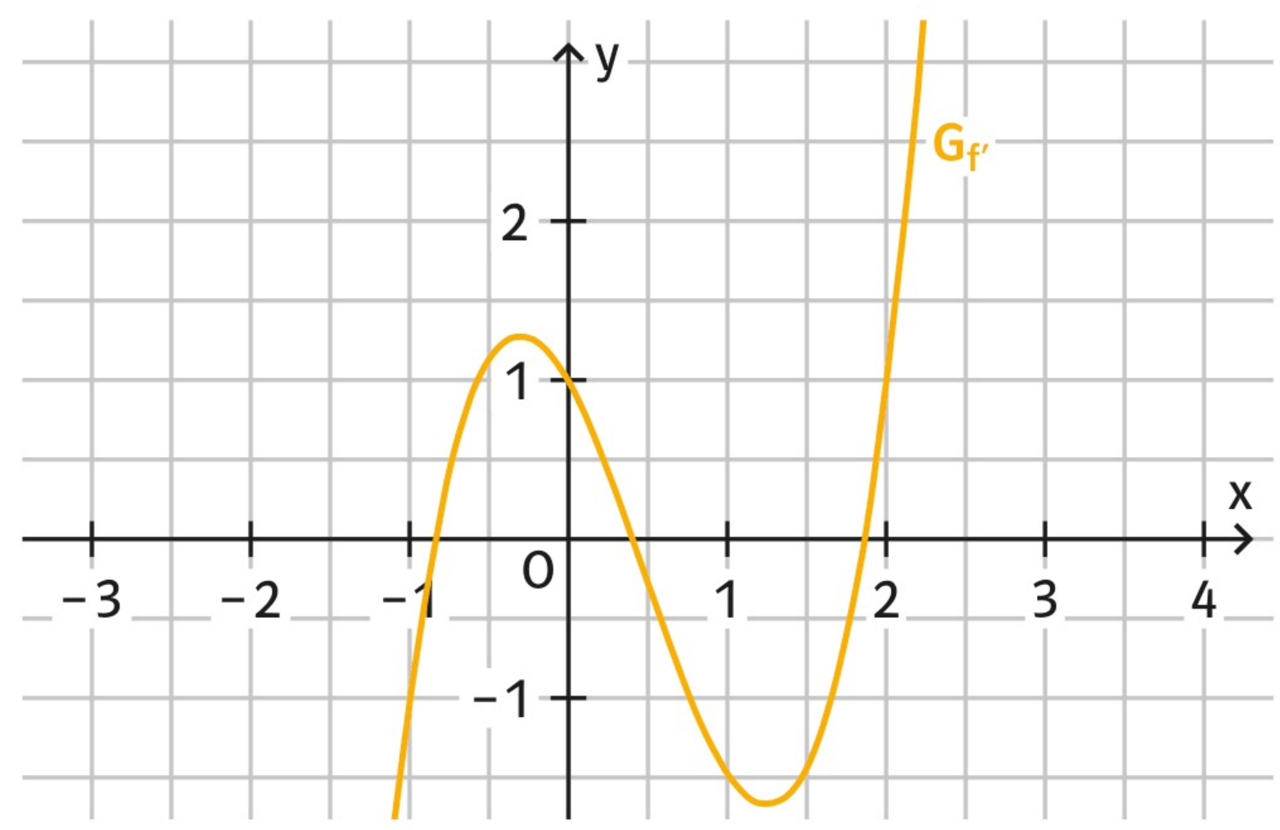
Lösung

Da G_f für $x > -0{,}5$ fällt, scheidet Graph (1) aus, da dieser dort oberhalb der x-Achse verläuft und somit nicht $f'(x) < 0$ gilt. Für $0 < x < 2$ fällt G_f nahezu konstant mit $m \approx -\frac{1}{2}$.
Somit kommt auch Graph (2) nicht infrage, der z. B. bei $x = 1$ den Funktionswert $-2{,}1$ hat.
Der Graph der Ableitung f′ von f ist folglich der Graph (3).

Aufgaben

1 Dargestellt sind die Graphen G_f und $G_{f'}$ einer Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f′.

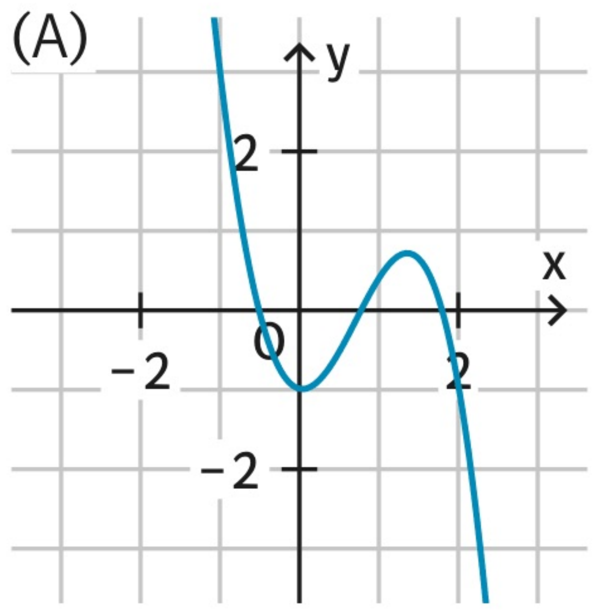
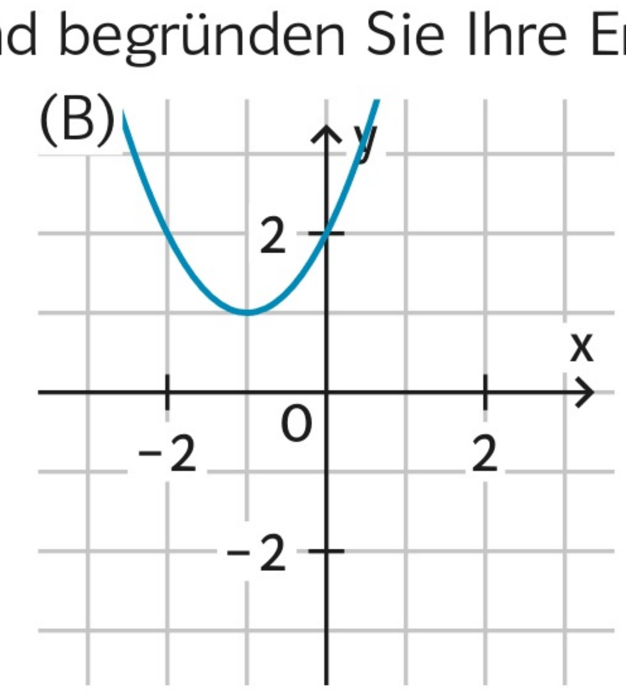
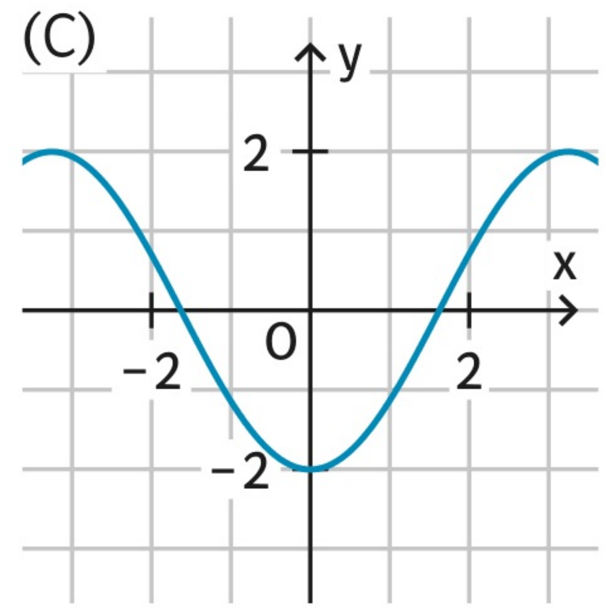
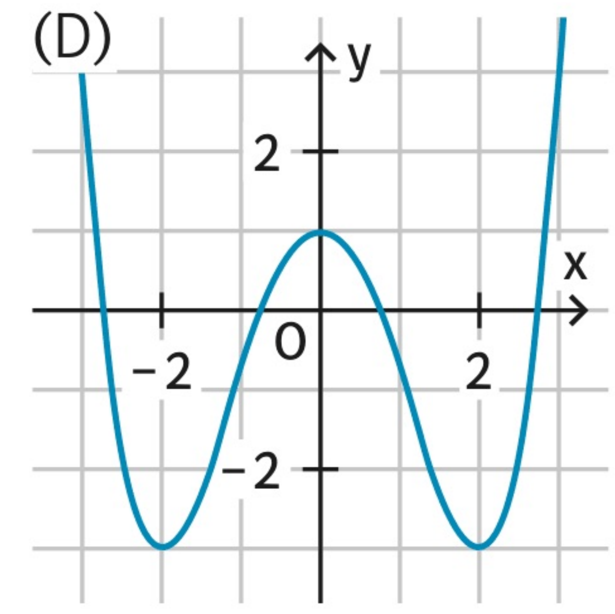
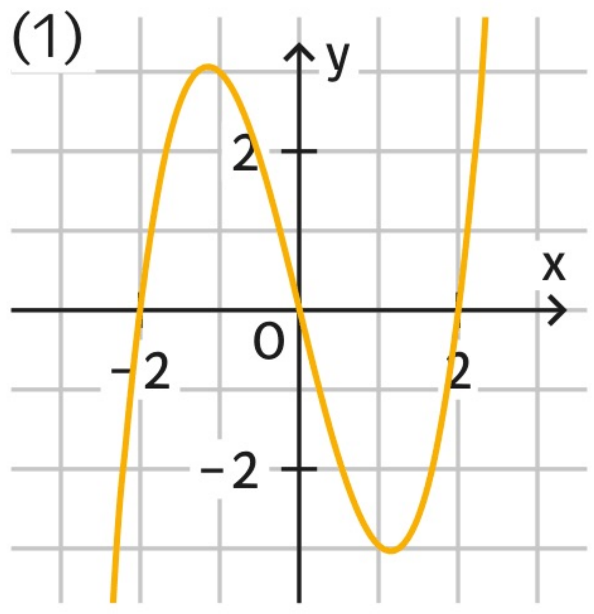
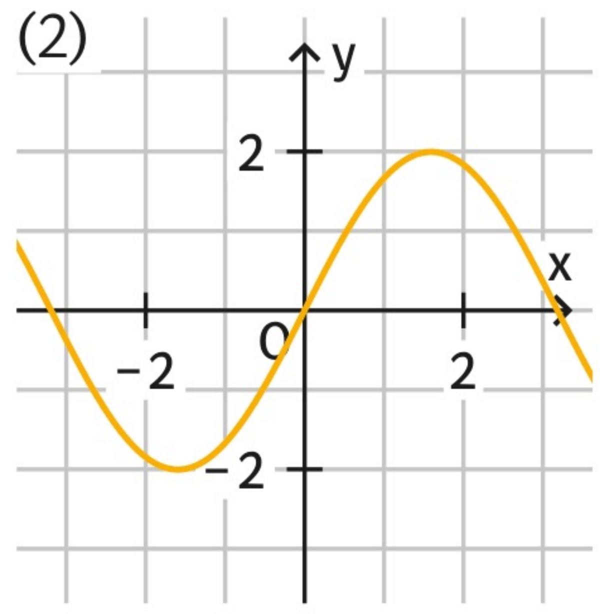
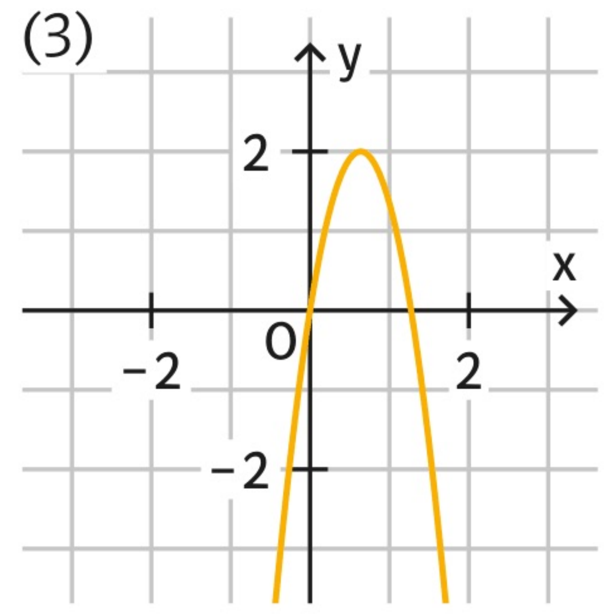
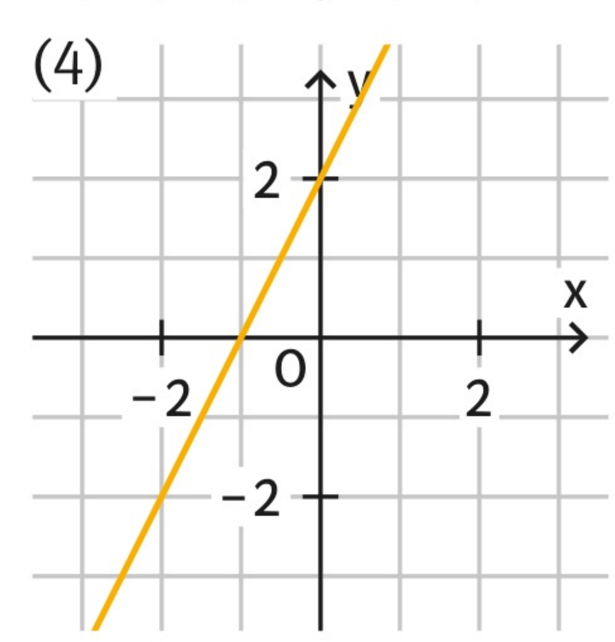




Geben Sie an:

a) f(2),
b) f′(2),
c) den Wert der Ableitung von f an der Stelle 0,
d) die Steigung von G_f im Punkt $A(-1\,|\,0{,}5)$,
e) eine Stelle a mit $f(a) = 1$,
f) zwei Stellen b mit $f'(b) = 1$.

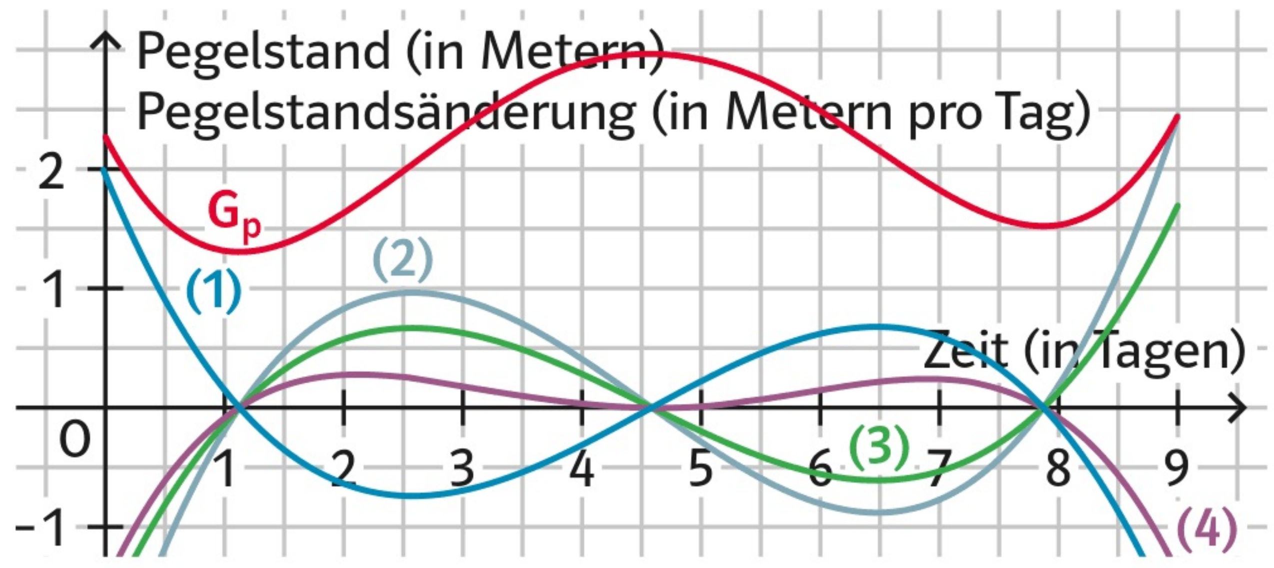
2 Ordnen Sie den Graphen (A), (B), (C) und (D) die Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion (1), (2), (3) und (4) zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(A)

(B)

(C)

(D)

(1)

(2)

(3)

(4)


3 Bestimmen Sie für die Funktion f die Ableitung f′ mithilfe des Differentialquotienten. Ermitteln Sie, falls möglich, die Stelle x_0, an der $f'(x_0) = 2$ gilt.

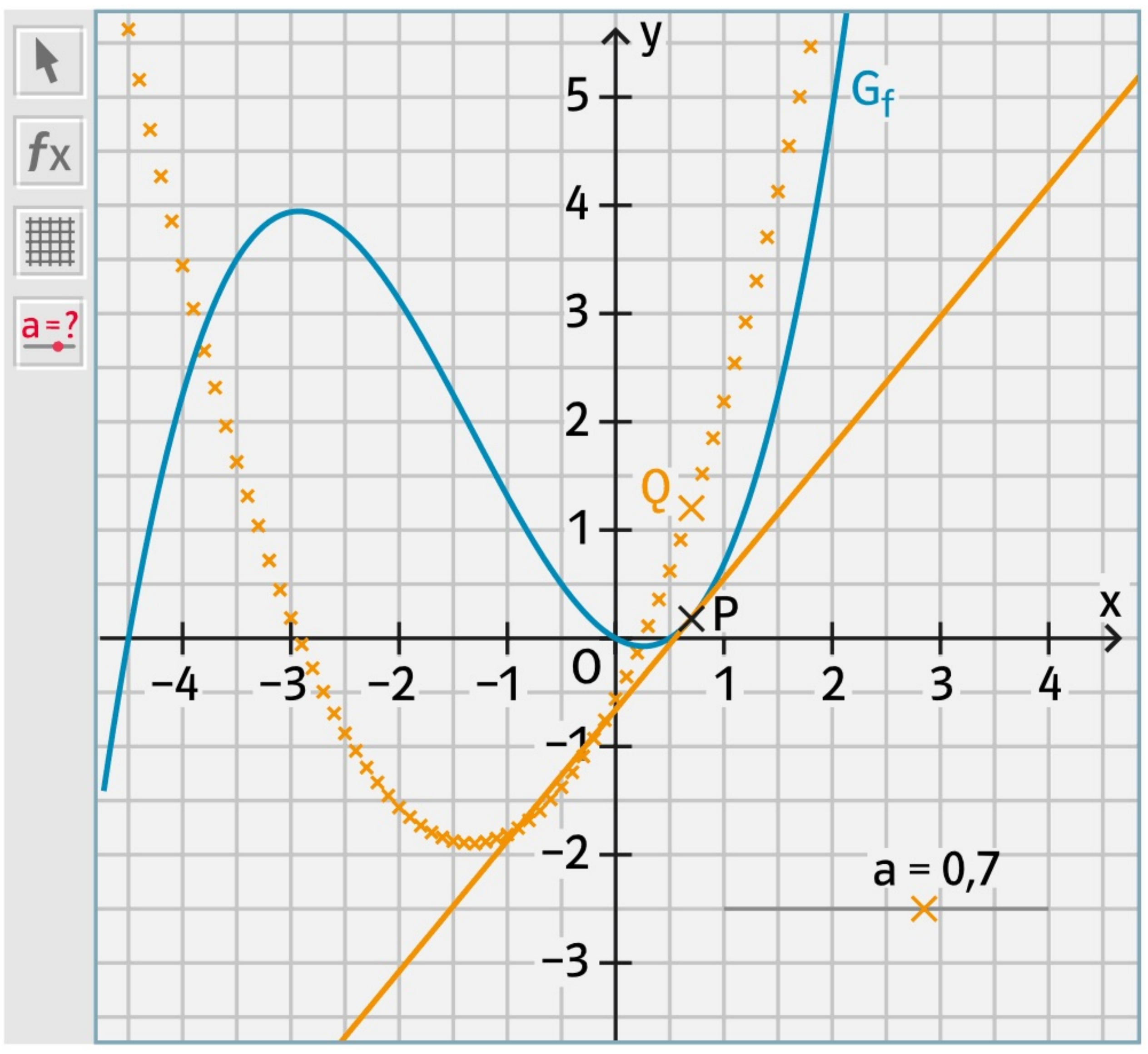
a) $f\colon x \mapsto 2x^2$
b) $f\colon x \mapsto 2x$
c) $f\colon x \mapsto 2$
d) $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

4 Die Funktion p beschreibt den Pegelstand eines Flusses in Abhängigkeit von der Zeit. Geben Sie an, welcher der anderen Graphen die Pegelstandsänderung darstellen könnte, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip

5 Zeichnen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit mindestens Grad 3. Legen Sie einen Punkt $P(a \mid f(a))$ auf dem Graphen fest und erstellen Sie einen Schieberegler für a, sodass sich der Punkt P bewegen lässt. Zeichnen Sie die Tangente an den Graphen im Punkt P und legen Sie einen Punkt Q fest, der die x-Koordinate a und als y-Koordinate die Steigung der Tangente hat. Bewegen Sie den Schieberegler und zeichnen Sie die Spur des Punktes Q auf. Erläutern Sie, dass alle Punkte der Spur auf dem Graphen der Ableitungsfunktion von f liegen.

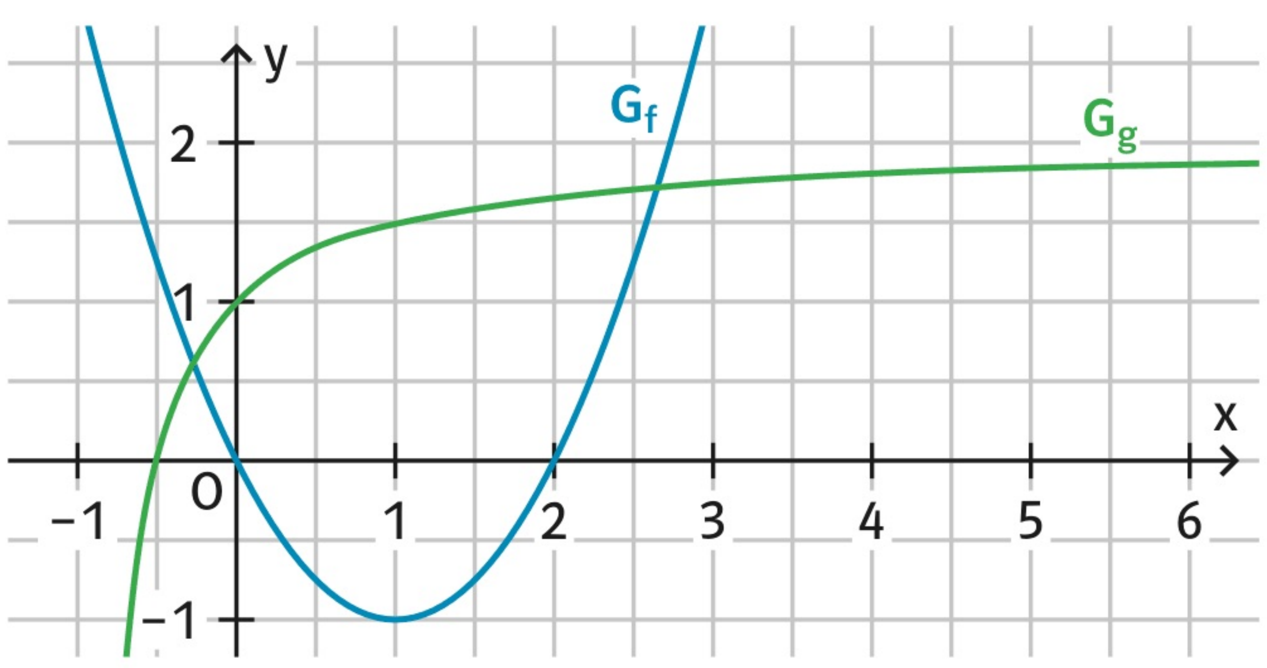


Hinweis:
In einer geeigneten Mathematiksoftware gibt es einen Befehl wie „Steigung“, der die Steigung einer gegebenen Geraden angibt.

Test 1

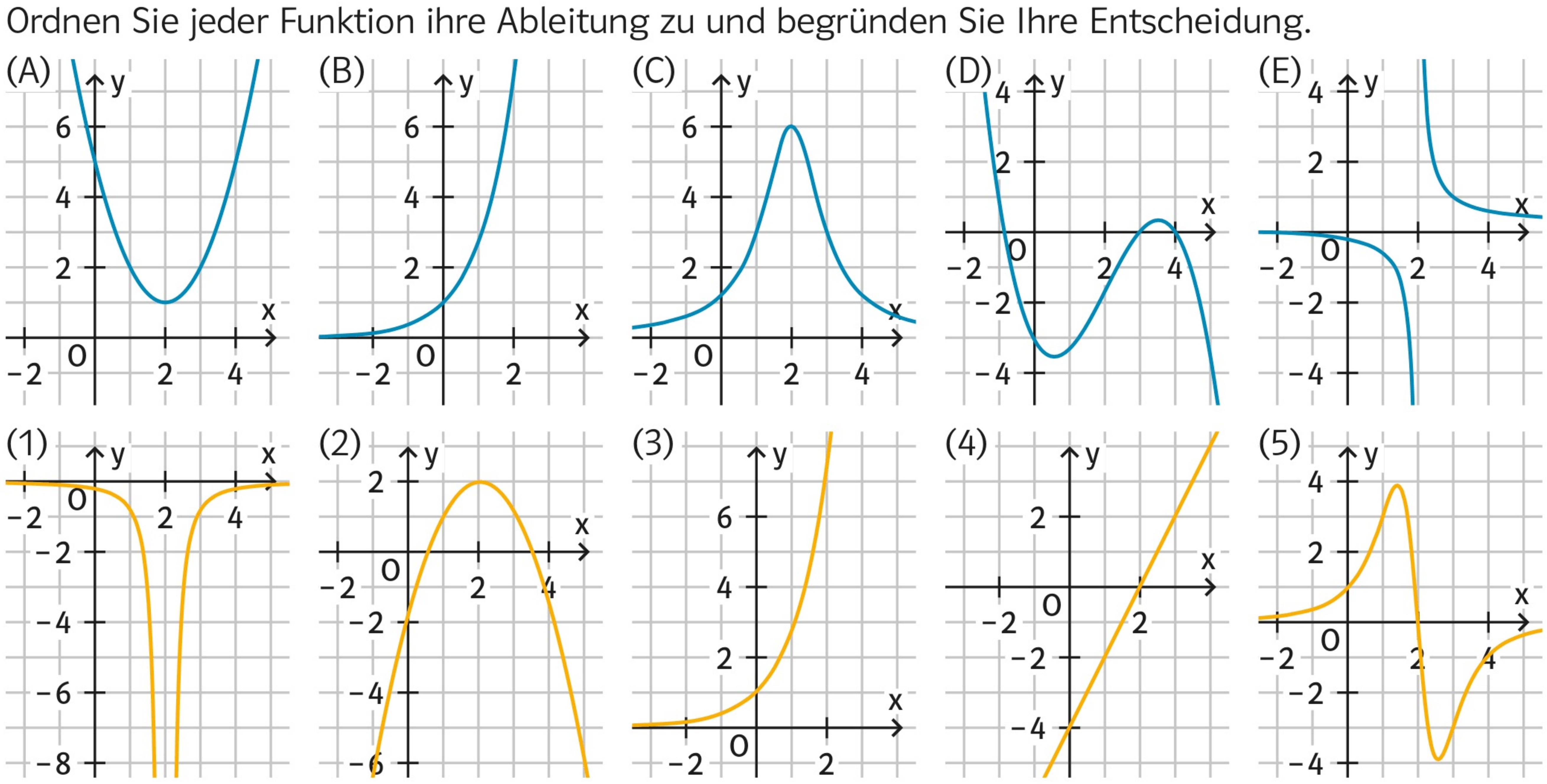
Lösungen | Seite 211

6 Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g. Begründen Sie, dass g nicht die Ableitungsfunktion von f und f nicht die Ableitungsfunktion von g sein kann.



7 Bestimmen Sie mithilfe des Differentialquotienten einen Term der Ableitungsfunktion f′ der Funktion f mit $f(x) = -3x^2$.

8 Die Abbildungen (A) bis (E) zeigen fünf Funktionsgraphen und die Abbildungen (1) bis (5) die zugehörigen Graphen der Ableitungsfunktionen.
Ordnen Sie jeder Funktion ihre Ableitung zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.



9 Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion, deren Ableitung die angegebene Eigenschaft besitzt. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.
Die Ableitung
a) besitzt keine Nullstellen,
b) besitzt eine einfache Nullstelle,
c) ist für $x > 0$ negativ,
d) ist nur für $x < 2$ positiv.

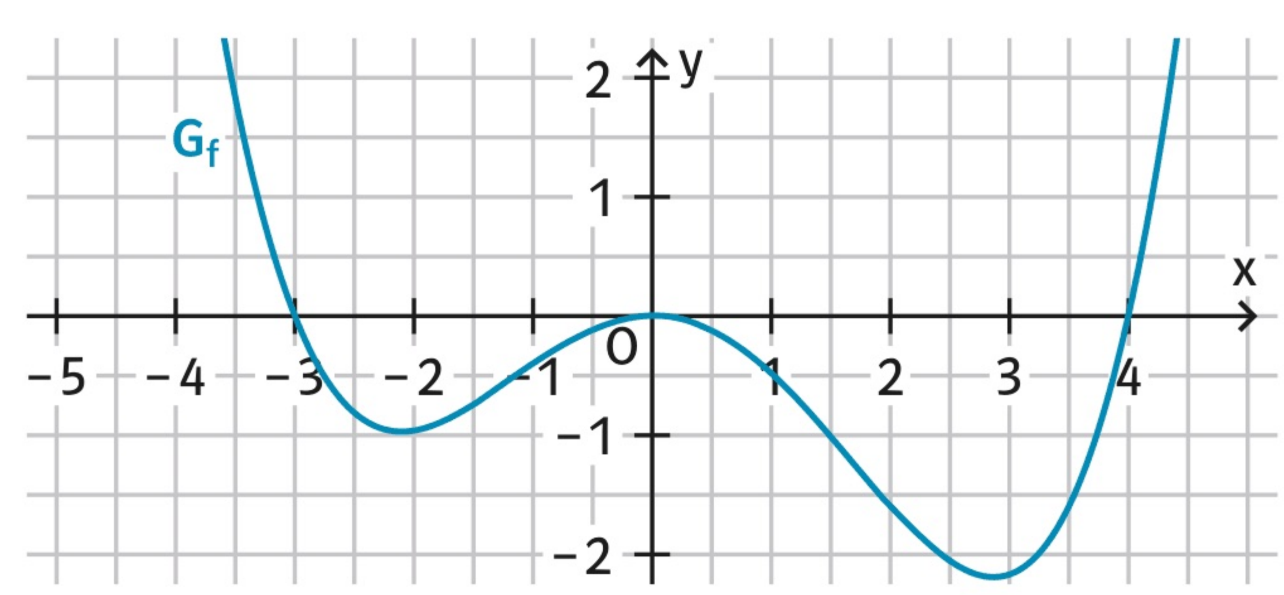
10 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + x$. Es gilt $f'(x) = 3x^2 + 1$.
a) Geben Sie $f'(-1)$ und $f'(2)$ an.
b) Berechnen Sie die Stellen x_0, an denen $f'(x_0) = 4$ gilt.
c) Bestimmen Sie, in welchen Punkten der Graph von f die Steigung 13 hat.
d) Ermitteln Sie rechnerisch, in welchen Punkten des Graphen von f die zugehörige Tangente parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = \frac{4}{3}x - 5$ ist.

11 Bestimmen Sie für die Funktion f die Ableitung f'. Ermitteln Sie die Stelle x_0, an der $f'(x_0) = 1$ gilt. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.
a) $f: x \mapsto 3x^2 - 2$
b) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x$
c) $f: x \mapsto (x - 1)^2$
d) $f: x \mapsto x^2 + \frac{x}{2}$

12 Geben Sie einen Term einer Funktion f an, welche die angegebene Bedingung erfüllt. Überprüfen Sie gegenseitig Ihre Antwort, gegebenenfalls mit einem Funktionenplotter.
a) Die Steigung des Graphen von f ist in D negativ.
b) Die Ableitungsfunktion f' hat mindestens eine Nullstelle.
c) Der Graph G_f hat genau zwei waagerechte Tangenten.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

13 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Beurteilen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

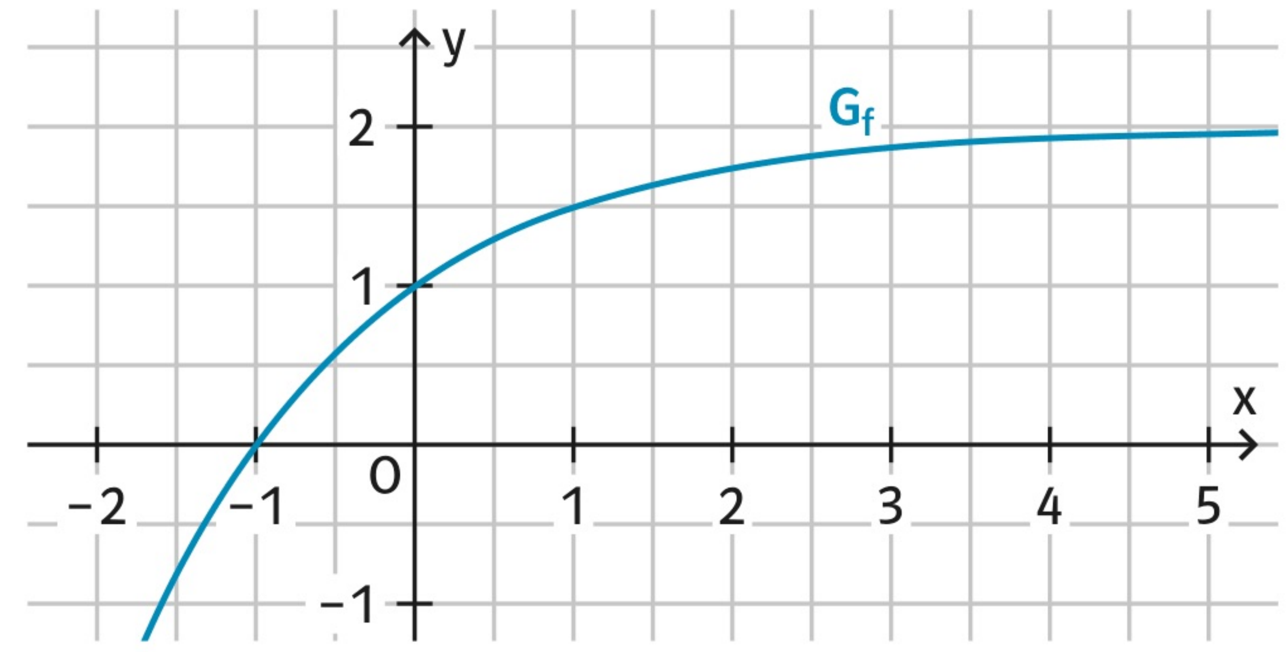


(1) G_f schneidet die x-Achse außerhalb des gezeichneten Bereichs noch einmal.
(2) Die Graphen von f und f' schneiden sich im Ursprung.
(3) Die Ableitung von f hat drei Nullstellen.
(4) Für $x \in \left]0; 4\right[$ verläuft der Graph von f' unterhalb der x-Achse.
(5) Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.
(6) Die Graphen von f und f' schneiden sich im zweiten Quadranten.

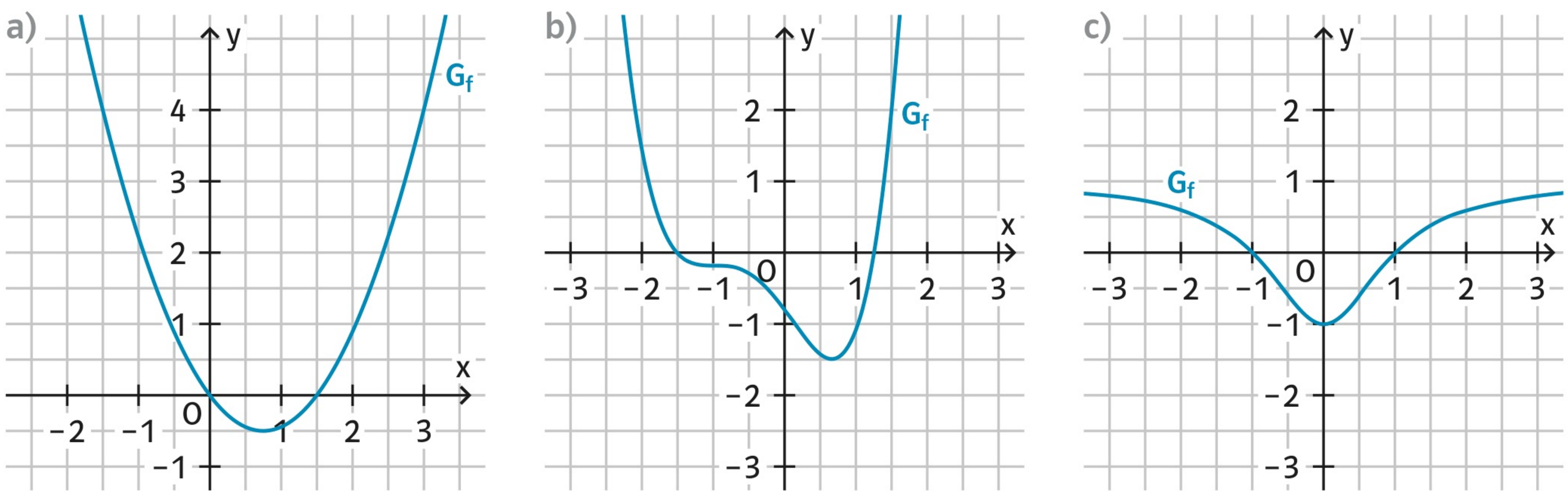
14 Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen. Für die Höhe h (in m) über dem Boden gilt in Abhängigkeit von der Zeit t (in s): $h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}8$, $t \geq 0$.
a) Bestätigen Sie, dass der Stein zum Zeitpunkt t die momentane Geschwindigkeit $v(t) = h'(t) = -10t + 10$ (in $\frac{m}{s}$) besitzt.
b) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Stein seine maximale Höhe erreicht, und bestimmen Sie diese.
c) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt der Stein mit der Geschwindigkeit $5\frac{m}{s}$ steigt bzw. fällt.
d) Bestimmen Sie, wie lange der Stein in der Luft ist und mit welcher Geschwindigkeit er auf dem Boden auftrifft.

15 Gegeben sind die Funktion $f: x \mapsto 0{,}5x^3 - 2x^2 + 2$ sowie ihre Ableitungsfunktion $f': x \mapsto 1{,}5x^2 - 4x$. Zeichnen Sie die Graphen von f und f' mithilfe eines Funktionenplotters und bestimmen Sie anhand dieser Graphen
a) die Stellen, an denen der Graph von f die Steigung 2 hat,
b) die Koordinaten des Punktes $A(x_0 \mid f(x_0))$, an dem der Graph von f am stärksten fällt,
c) die x-Werte, für die der Graph der Funktion f steigt,
d) die x-Werte, für die die Steigung des Graphen von f größer als 3 ist.

16 Beurteilen Sie, welche der Aussagen über die Ableitungsfunktion f′ der Funktion f, deren Graph gegeben ist, wahr sind.
(1) Der Graph von f′ verläuft im Intervall $[-2; 2]$ oberhalb der x-Achse.
(2) $f'(-1) = 0$
(3) $f'(0) > f'(1)$
(4) $f'(0) = 1$



17 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen von f′ in Ihr Heft und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

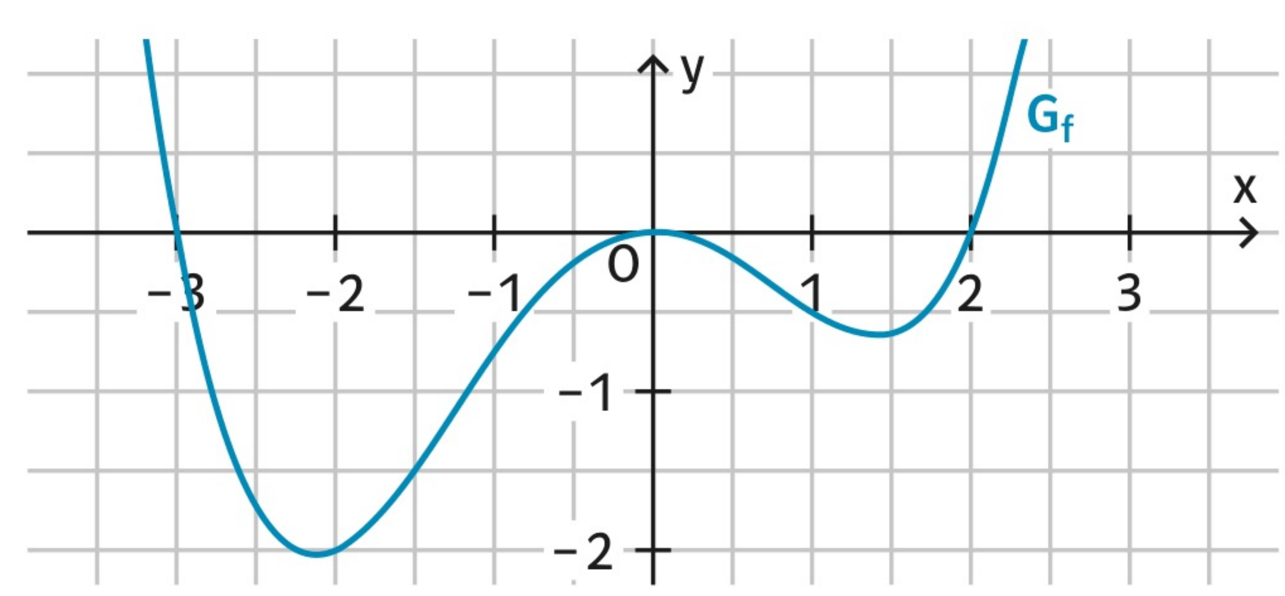


18 Skizzieren Sie einen beliebigen Funktionsgraphen G_f und im gleichen Koordinatensystem drei weitere Graphen, wobei einer davon der Graph der Ableitung f′ von f sein soll. Tauschen Sie untereinander Ihre Skizzen aus und finden Sie heraus, welcher der drei weiteren Graphen die Ableitung f′ darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Test 2

Lösungen | Seite 212

19 Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f in Ihr Heft. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



20 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 + x$.
a) Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′.
b) Ermitteln Sie, in welchem Punkt $A(a\,|\,f(a))$ der Graph von f die Steigung -2 hat.
c) Bestimmen Sie, in welchem Punkt $C(c\,|\,f(c))$ die Tangente an G_f parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = -5x + 3$ ist.

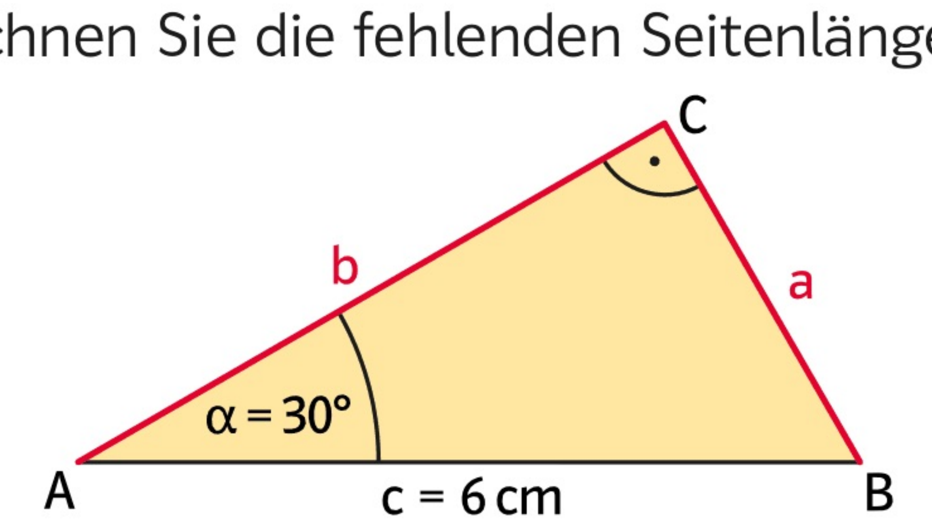
21 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′ von f.
a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ c) $f(x) = mx + t$ d) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Grundwissen Test

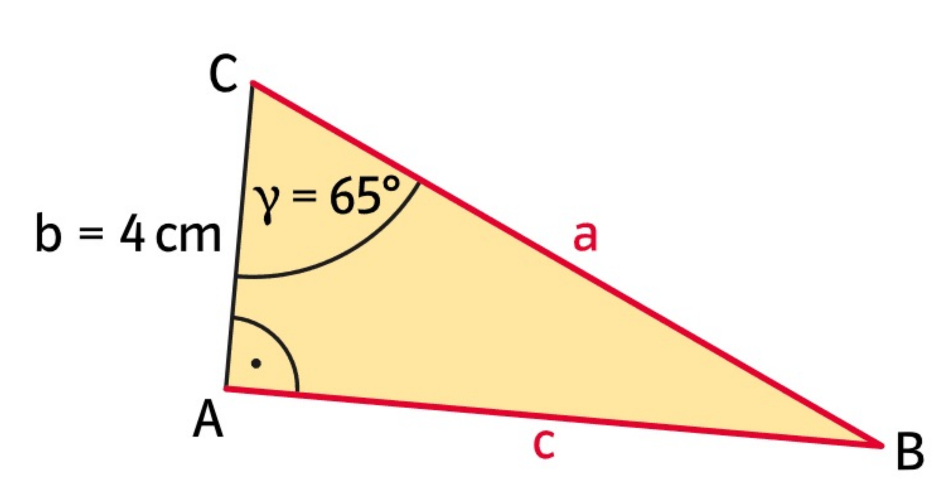
Lösungen | Seite 212

G 22 Berechnen Sie die fehlenden Seitenlängen.

a)

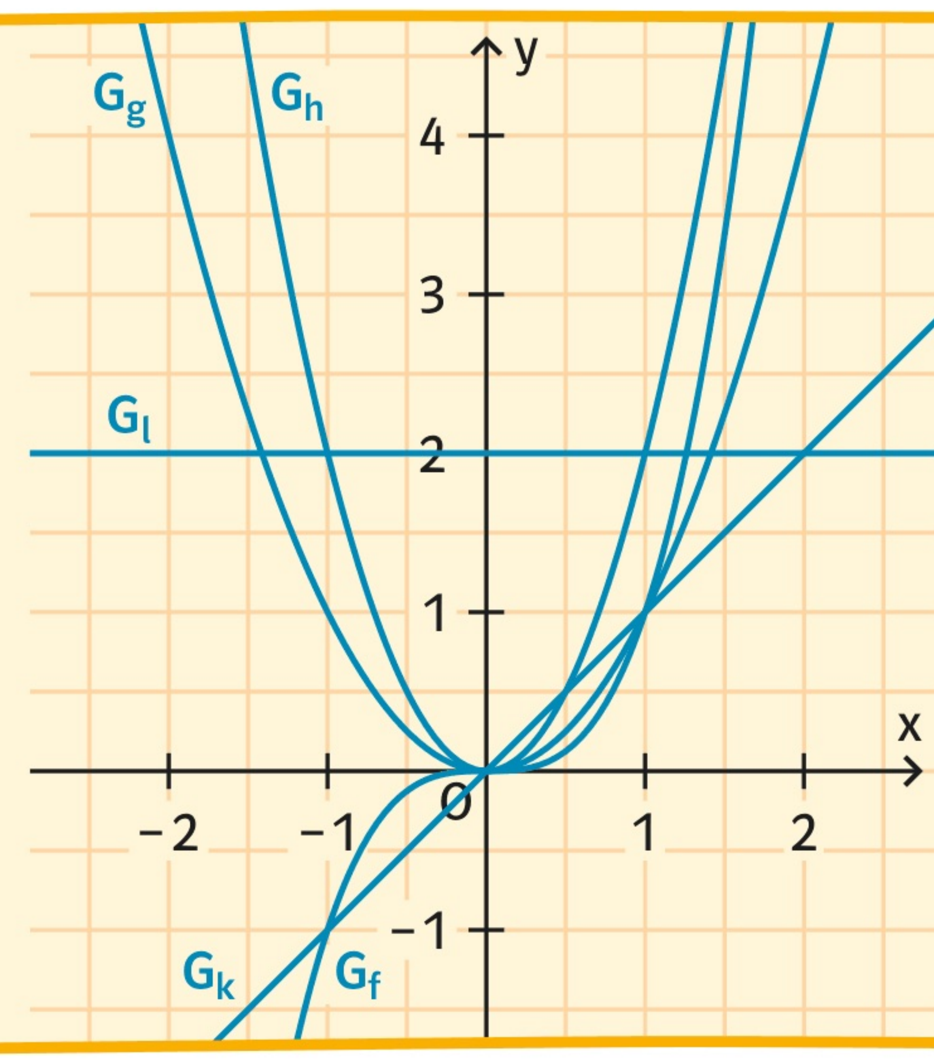


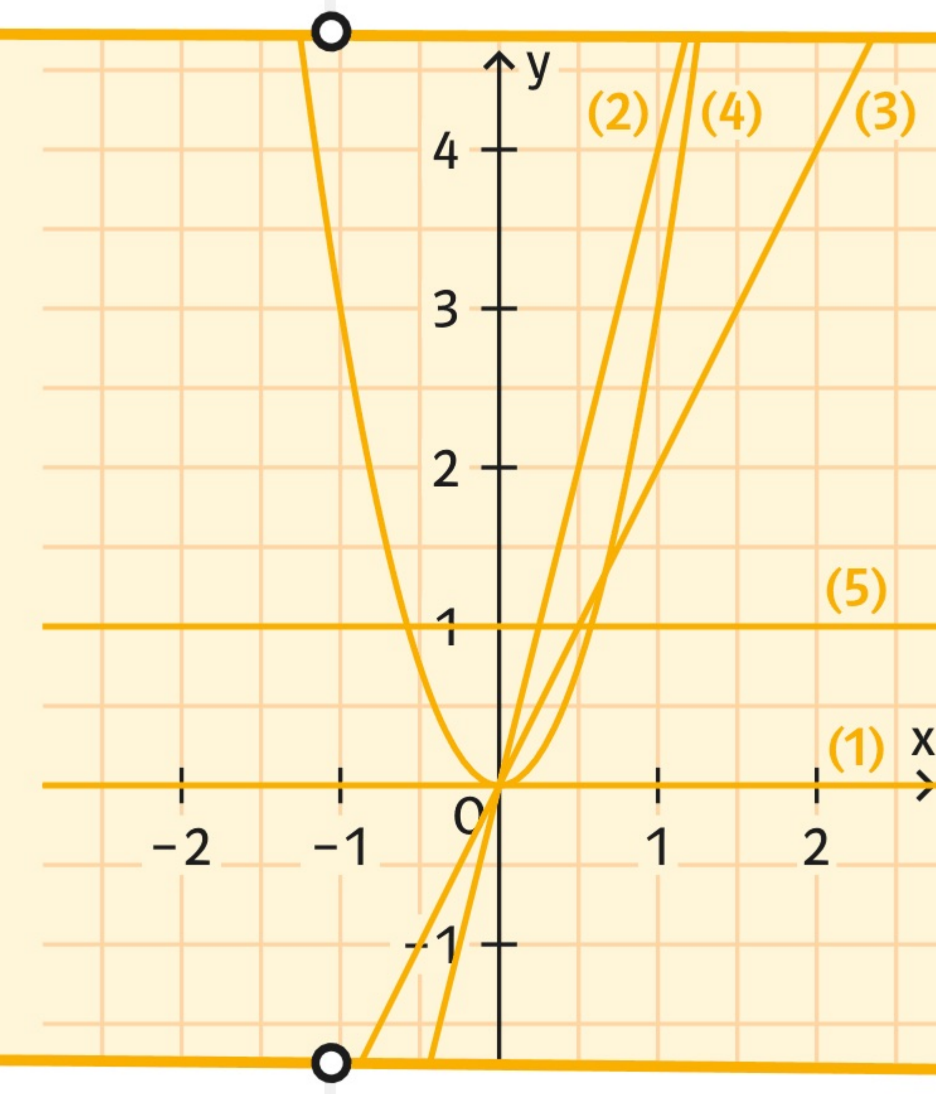
b)



5 Ableitung ganzrationaler Funktionen

In der linken Abbildung sind die Graphen der Funktionen $f\colon x \mapsto x^3$, $g\colon x \mapsto x^2$, $h\colon x \mapsto 2x^2$, $k\colon x \mapsto x$ und $l\colon x \mapsto 2$ und in der rechten Abbildung die Graphen ihrer Ableitungsfunktionen dargestellt.
Ordnen Sie den Funktionen jeweils den Graphen ihrer Ableitungsfunktion zu und begründen Sie. Geben Sie die Funktionsterme der Ableitungsfunktionen an und stellen Sie eine Vermutung auf, welche Regeln beim Ableiten ganzrationaler Funktionen gelten.





Das Ableiten einer Funktion mithilfe des Differentialquotienten ist in der Regel aufwendig. Leitet man Potenzfunktionen ab, so zeigen sich Gesetzmäßigkeiten, die eine Ableitungsregel nahelegen. Aus den bisherigen Lerneinheiten sind folgende Ableitungen bekannt:
$f_1\colon x \mapsto x \;\Rightarrow\; f_1'\colon x \mapsto 1$ und $f_2\colon x \mapsto x^2 \;\Rightarrow\; f_2'\colon x \mapsto 2x$.

Für die Ableitung der Funktion $f_3\colon x \mapsto x^3$ ergibt sich:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) - x_0^3}{h}$$

$$= \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \frac{h\left(3x_0^2 + 3x_0h + h^2\right)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x_0^2 + 3x_0h + h^2\right) = 3x_0^2, \text{ also } f_3'\colon x \mapsto 3x^2.$$

Es lassen sich damit die folgenden Vermutungen aufstellen:
- Die Ableitung einer Potenzfunktion ist ebenfalls eine Potenzfunktion.
- Beim Ableiten verringert sich der Exponent um 1.
- Der Exponent der Funktion wird zum Vorfaktor ihrer Ableitungsfunktion.

$f(x)$	x^1	x^2	x^3
$f'(x)$	1	$2x$	$3x^2$

Für eine beliebige Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, gilt $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$.
Multipliziert man die n Faktoren $(x_0 + h)$ im Zähler aus, so erhält man einmal den Summanden x_0^n, n-mal den Summanden $h \cdot x_0^{n-1}$ sowie weitere Summanden, die mindestens den Faktor h^2 enthalten. Es ergibt sich also $(x_0+h)^n = x_0^n + n\cdot x_0^{n-1}\cdot h + h^2\cdot(\ldots)$.
Damit gilt:

$$\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{x_0^n + n\cdot x_0^{n-1}\cdot h + h^2\cdot(\ldots) - x_0^n}{h}$$

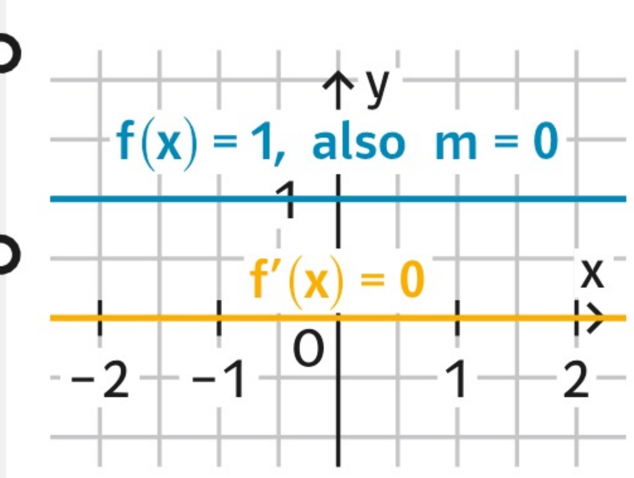
$$= \frac{n\cdot x_0^{n-1}\cdot h + h^2\cdot(\ldots)}{h}$$

$$= \frac{h\cdot\left(n\cdot x_0^{n-1} + h\cdot(\ldots)\right)}{h}$$

$$= n\cdot x_0^{n-1} + h\cdot(\ldots),$$

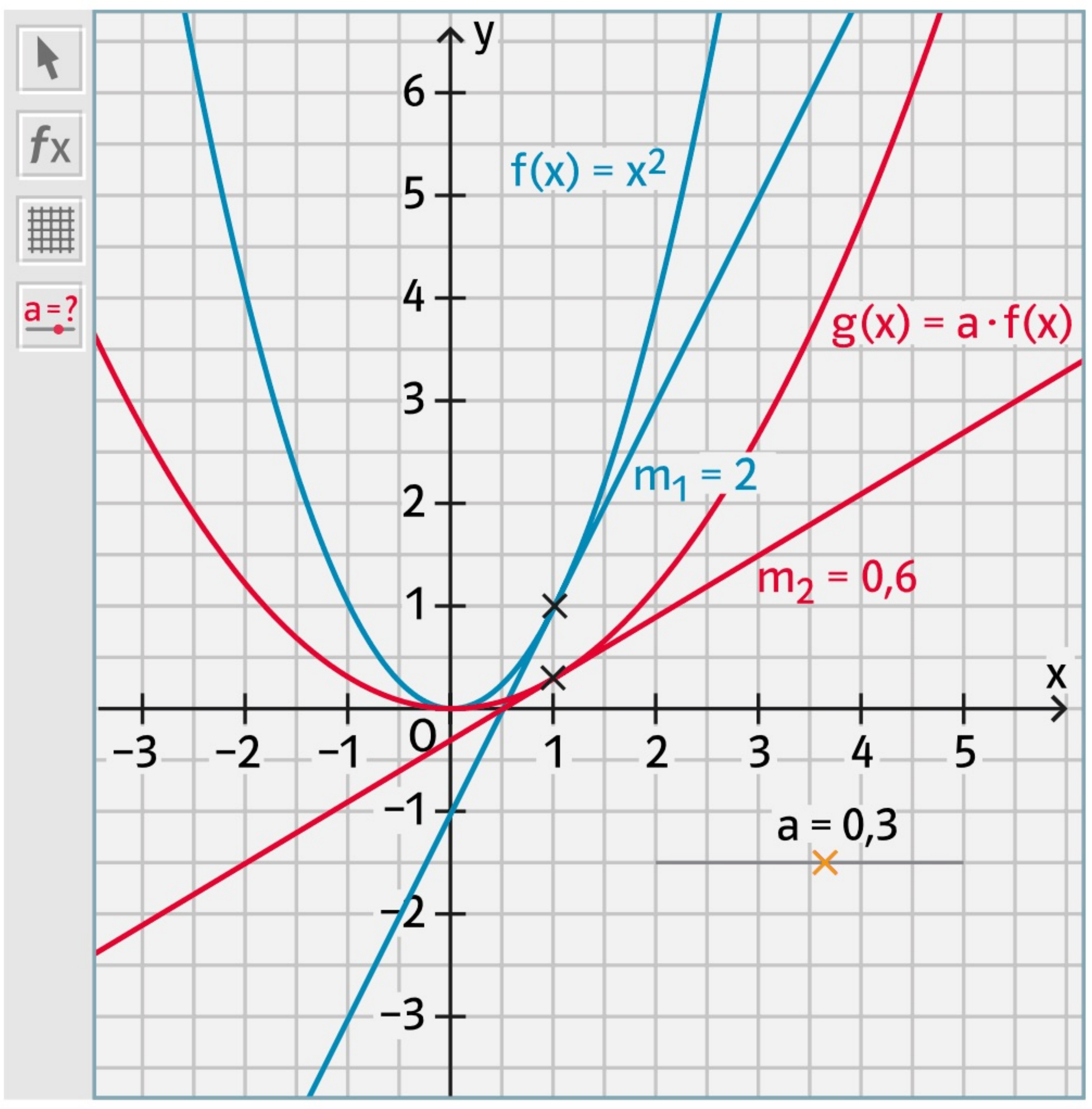
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(n\cdot x_0^{n-1} + h\cdot(\ldots)\right) = n\cdot x_0^{n-1}.$$

Satz (Potenzregel): Die Funktion f mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, hat die Ableitung $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$.

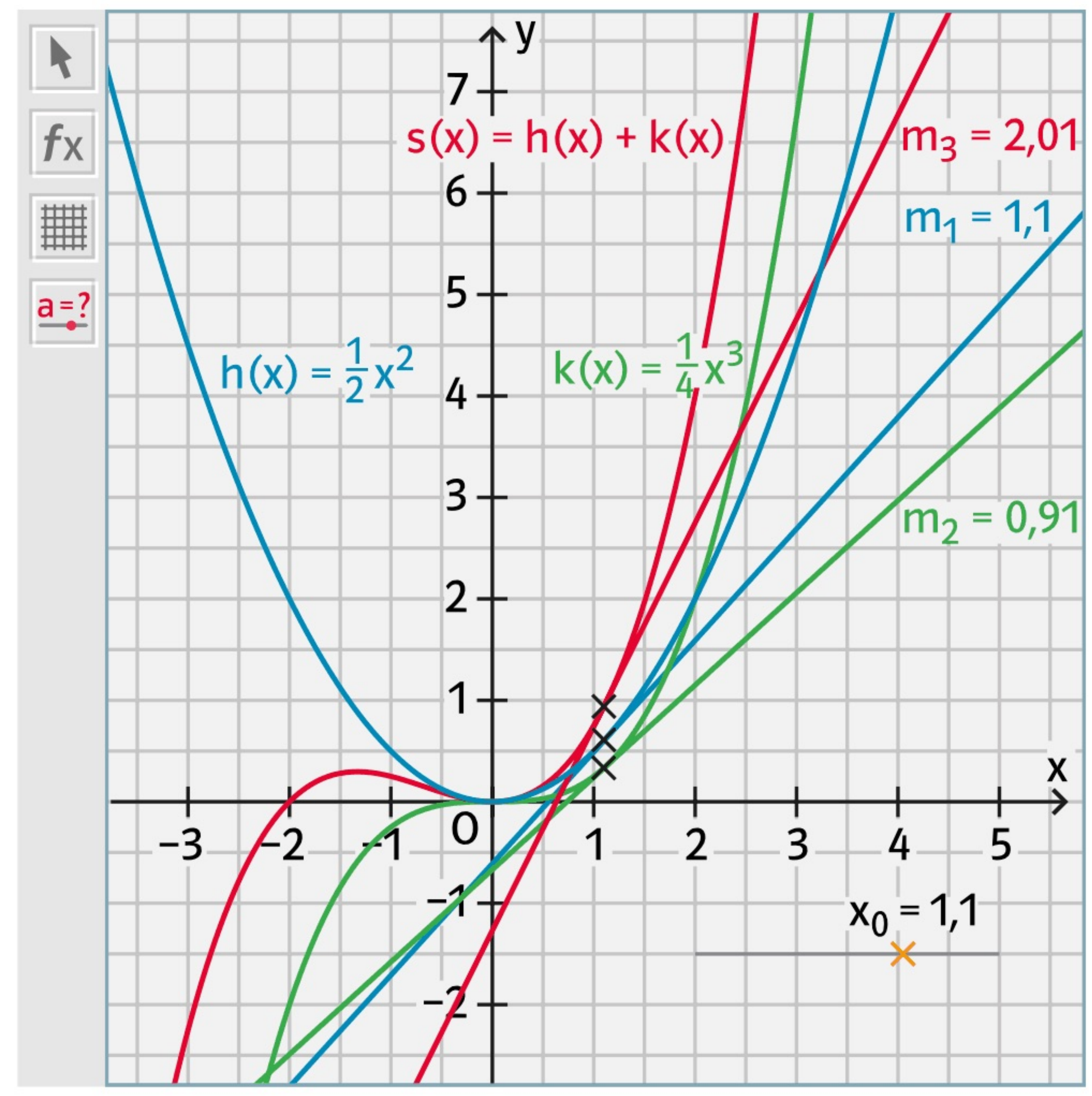


Der Graph der konstanten Funktion $f\colon x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$, ist eine Parallele zur x-Achse und hat die Steigung $m = 0$. Somit ergibt sich die Ableitung $f'\colon x \mapsto 0$.

Jede ganzrationale Funktion lässt sich aus einfachen Grundfunktionen zusammengesetzt denken, womit sich weitere Ableitungsregeln herleiten lassen.
Untersucht man mithilfe von Schiebereglern in einer dynamischen Mathematiksoftware den Einfluss des Parameters $a \in \mathbb{R}$ in $g(x) = a \cdot f(x)$ auf die Ableitung g' und die Ableitung s' einer Summe s aus zwei Funktionen k und h, so lassen sich weitere Vermutungen aufstellen.



Betrachtet man die Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, so erkennt man, dass eine Änderung von a bewirkt, dass die Steigung m_2 des Graphen von g an einer bestimmten Stelle das a-Fache der Steigung m_1 des Graphen von f an dieser Stelle ist.
Es lässt sich vermuten, dass für die Ableitungsfunktion von g gilt: $g'(x) = a \cdot f'(x)$.



Betrachtet man die Funktionen s, h und k mit $s(x) = h(x) + k(x)$, so erkennt man, dass die Steigung m_3 des Graphen von s an einer Stelle x_0 der Summe der Steigungen m_1 und m_2 der Graphen von h und k an dieser Stelle entspricht.
Es lässt sich vermuten, dass für die Ableitungsfunktion von s gilt: $s'(x) = h'(x) + k'(x)$.

Die vorangegangenen Untersuchungen legen folgende Ableitungsregeln nahe:

Satz: Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so gilt:

Faktorregel:	$f: x \mapsto k \cdot u(x),\; k \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow\; f': x \mapsto k \cdot u'(x)$
Summenregel:	$f: x \mapsto u(x) + v(x)$	$\Rightarrow\; f': x \mapsto u'(x) + v'(x)$
Konstantenregel:	$f: x \mapsto c,\; c \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow\; f': x \mapsto 0$

Beispiel:
$f(x) = x^5 - 3x^2 + 4$
$f'(x) = 5 \cdot x^4 - 3 \cdot 2 \cdot x + 0$
$= 5x^4 - 6x$

Beweis der Faktorregel:
Ist die Funktion u differenzierbar, dann gilt für $f(x) = k \cdot u(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{k \cdot u(x_0 + h) - k \cdot u(x_0)}{h} = k \cdot \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = k \cdot u'(x_0)$$

Beweis der Summenregel:
Sind die Funktionen u und v differenzierbar, dann gilt für $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h) + v(x_0 + h) - (u(x_0) + v(x_0))}{h} = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} = u'(x_0) + v'(x_0)$$

Bei den nebenstehenden Umformungen werden die folgenden Rechenregeln für Grenzwerte verwendet:

(1) $\lim_{h \to 0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{h \to 0} f(x)$,

(2) $\lim_{h \to 0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{h \to 0} f(x) \pm \lim_{h \to 0} g(x)$.

Mit den vorangegangenen Regeln kann man jede ganzrationale Funktion ableiten.
Für $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ergibt sich
$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$.

Satz: Jede ganzrationale Funktion f vom Grad n, $n \geq 1$, ist differenzierbar und ihre Ableitung ist eine ganzrationale Funktion vom Grad $n - 1$.

Beispiel 1

Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′ der gegebenen Funktion f an.

a) $f: x \mapsto x^5$ b) $f: t \mapsto t \cdot (3t^3 - 2)$ c) $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$

Lösung

a) $f'(x) = 5x^4$

b) $f(t) = 3t^4 - 2t$
$f'(t) = 12t^3 - 2$

c) $f'(x) = 2ax + b$

Beispiel 2

Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′ von f mit $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 3$ an, berechnen Sie f′(2) und bestimmen Sie die Stellen, an denen $f'(x) = 0$ gilt.

Lösung

$f'(x) = 8x^3 - 8x$
$f'(2) = 8 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 48$
$f'(x) = 8x^3 - 8x = 0$
$\Leftrightarrow 8x(x^2 - 1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1$ und $x_3 = 1$

Aufgaben

1 Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′ der Funktion f an.

a) $f: x \mapsto x^6$ b) $f: x \mapsto x^{11}$ c) $f: x \mapsto 5$
d) $f: x \mapsto -7x^5$ e) $f: x \mapsto 2x^9 - x$ f) $f: x \mapsto x^2 + 3$

2 Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion an.

a) $f(x) = 2x^3 + 5x^2$ b) $f(x) = 4x^5 - 3x$ c) $f(x) = 2x^7 - 3x^4$
d) $f(t) = -5t^4 - 4t^3 + t$ e) $f(z) = -\frac{2}{3}z^3 + 2z^2 + 3$ f) $f(a) = a^4 - 2a^3 + \frac{1}{4}a^2$
g) $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ h) $f(x) = t^3x^6 - tx$ i) $f(t) = t^3x^6 - tx$

3 Ordnen Sie dem Funktionsterm f(x) den zugehörigen Term f′(x) auf einem der Puzzleteile zu.

- $f(x) = 4x^2 - \frac{4}{3}x$ (1)
- $f(x) = 8x - \frac{2}{3}x^2 + 2$ (2)
- $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x$ (3)
- $f(x) = -\frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4$ (4)

- A $f'(x) = -8x^2 + \frac{4}{3}x^3$
- C $f'(x) = 8x^2 - \frac{4}{3}x$
- E $f'(x) = 8 - \frac{4}{3}x$
- B $f'(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$
- D $f'(x) = 8x - \frac{4}{3}$

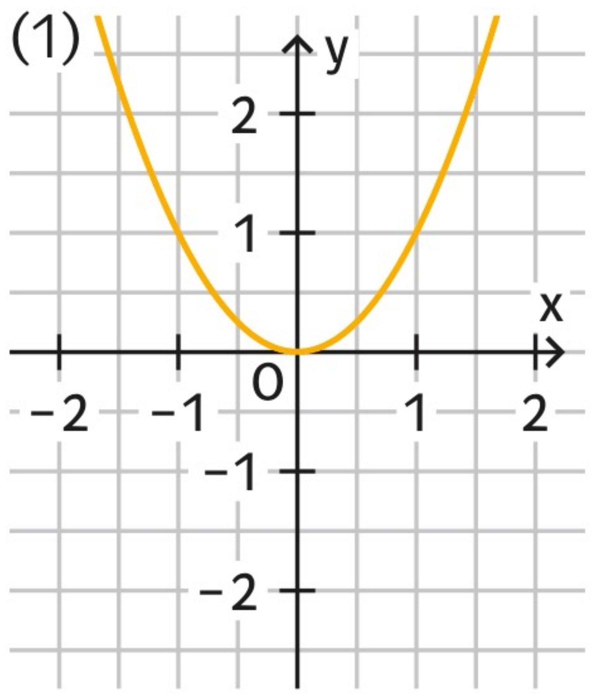
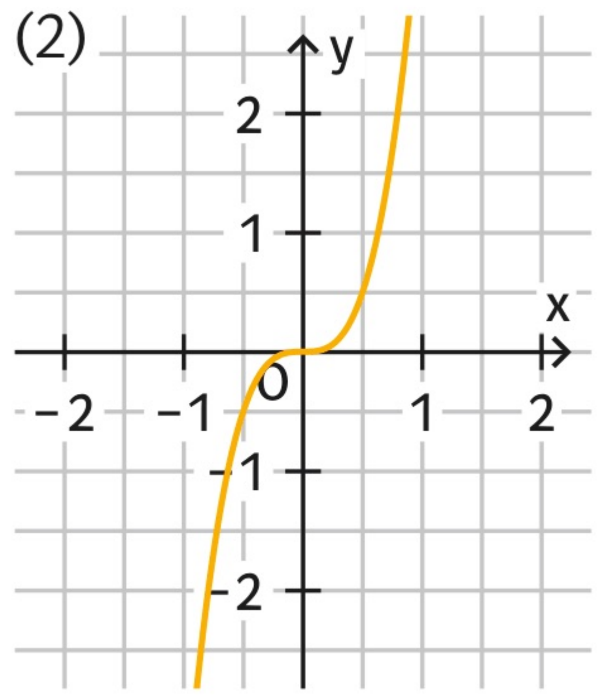
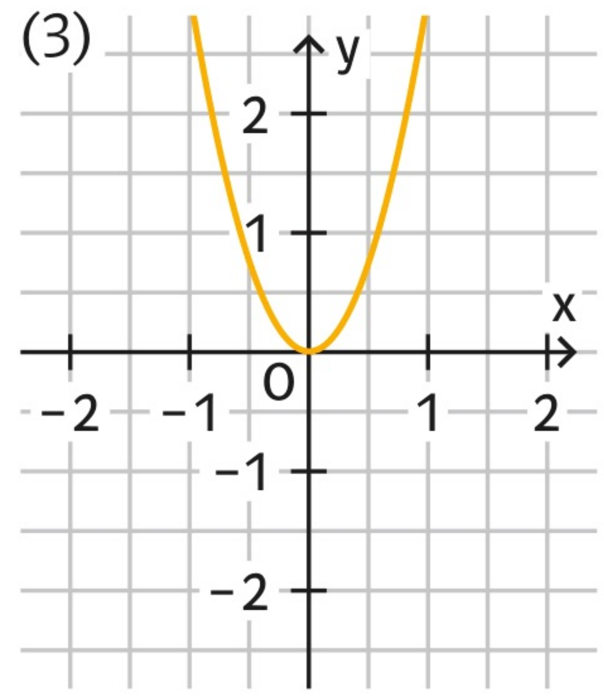
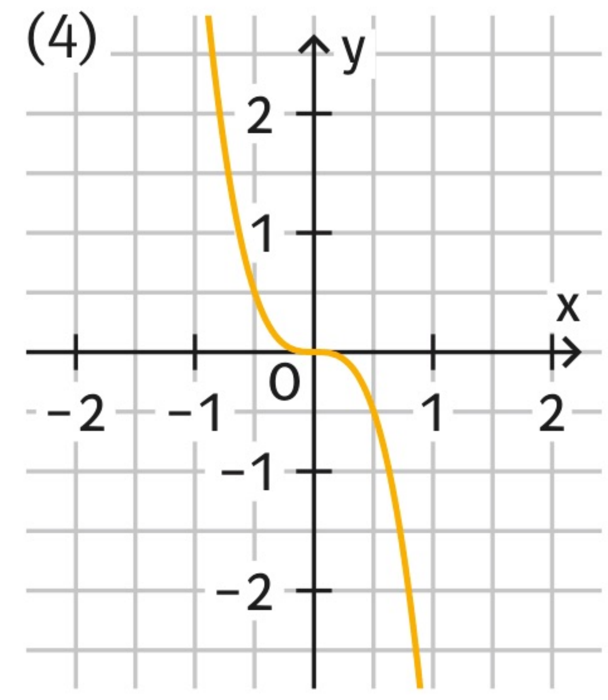
4 Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $A(-1 \mid f(-1))$.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ b) $f(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^3$ c) $f(z) = \frac{3}{4}z^2 - 3z$

5 Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′ von f an und beurteilen Sie, ob der Graph von f an der Stelle $x_0 = 2$ steigt oder fällt.

a) $f(x) = 2x^5 - x^3$ b) $f(x) = -x^6 + \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = -\frac{1}{5}x^{10} + \frac{3}{4}x^2$

6 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^4$ und $g(x) = x^3$.
Beurteilen Sie, welcher der vier Graphen die Ableitungsfunktion f′ und welcher g′ darstellt.

Test 1

Lösungen | Seite 212

7 Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′ der Funktion f an.
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5$ **b)** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

8 Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x_0 = 4$.
a) $f(x) = x^5 + 2x^2 - 3$ **b)** $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{6}x + 2$

9 Beschreiben Sie, welcher Fehler jeweils beim Ableiten gemacht wurde.

(A) $f(x) = 3x^2 - 1$
$f'(x) = 6x - 1$

(B) $g(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$
$g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x$

(C) $h(x) = \frac{5}{16}x^5 - \frac{3}{4}x^3$
$h'(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

10 Lösen Sie zunächst die Klammer auf und bestimmen Sie dann einen Term der Ableitungsfunktion. Überprüfen Sie Ihre Lösung mit einer geeigneten Mathematiksoftware.
a) $f(x) = x \cdot (3 + x)$ b) $f(z) = (2z - 1)^2$ c) $f(u) = (u - 3)(u + 3)$

11 Eine Rakete startet senkrecht nach oben. Die Funktion h mit $h(t) = t^3$ (t in Sekunden, h(t) in Metern) gibt in den ersten beiden Sekunden näherungsweise die Höhe h(t) der Rakete an.
a) Bestimmen Sie Höhe und Geschwindigkeit der Rakete nach 1,2 Sekunden.
b) Berechnen Sie, wann die Geschwindigkeit $12\,\frac{m}{s}$ beträgt.



12 Gegeben ist der Graph einer Funktion g. Begründen Sie, welcher der folgenden Funktionsterme zur Ableitungsfunktion g′ gehört.

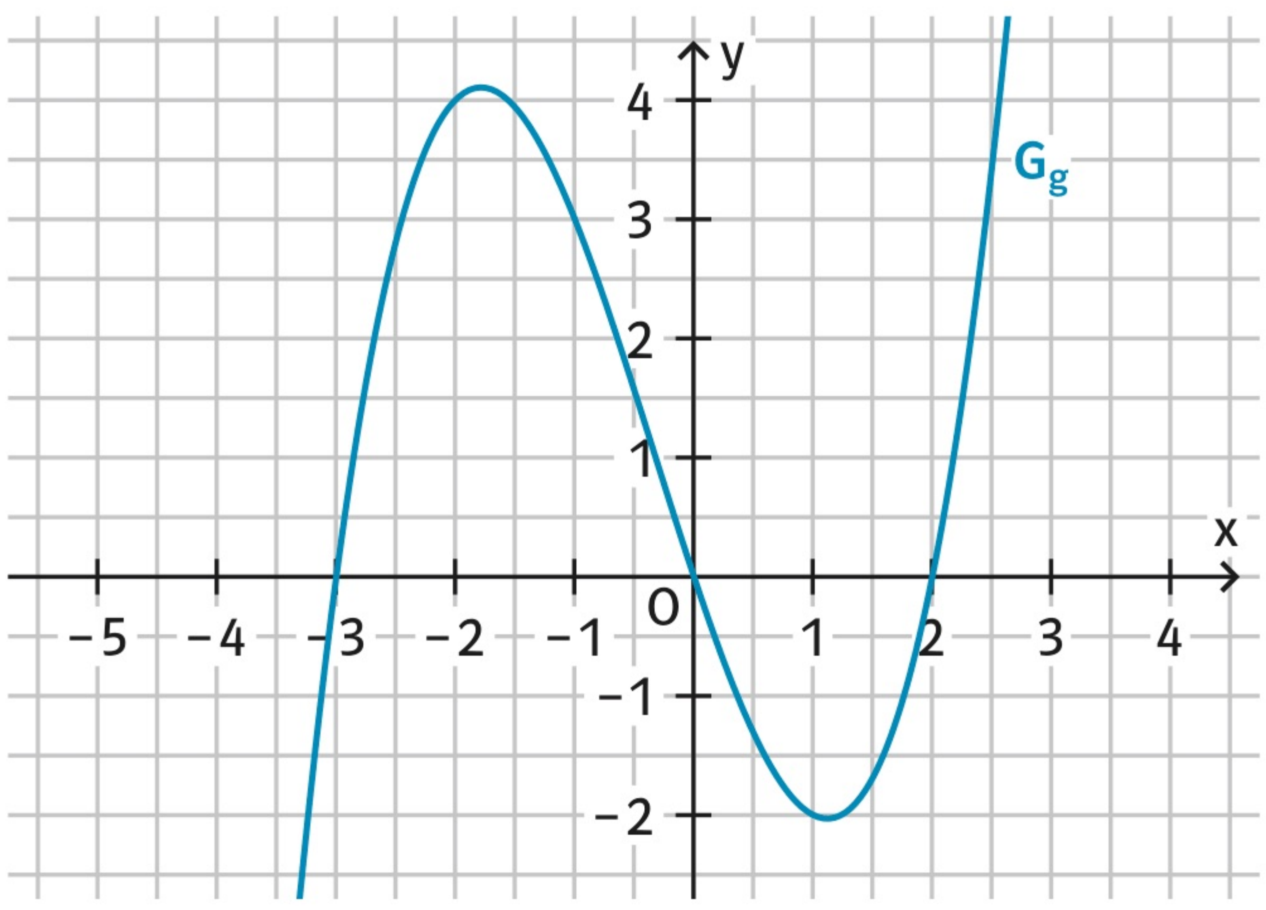
Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip

A $2x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

B $\frac{1}{3}x^3 + x - 2$

C $\frac{3}{2}x^2 + x - 3$

D $-\frac{1}{2}x^2 + x - 3$



13 Berechnen Sie jeweils die Steigung des Graphen von f in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

a) $f(x) = -x^3 + 4$ b) $f(x) = 4x^2 - x - 3$ c) $f(x) = 3x^2 - 1$
d) $f(x) = x^3 - 3x$ e) $f(x) = -x^4 + 2x^2$ f) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 - x^2 - 3$.

a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f.
b) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Ableitungsfunktion f′.
c) Zeichnen Sie die beiden Graphen mit einem Funktionenplotter.
d) Begründen Sie allgemein, dass der Graph der Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 2$, ihr Graph ist G_f.

a) Bestimmen Sie, in welchem Punkt G_f die Steigung $m = 4$ hat.
b) Bestimmen Sie, an welchen Stellen G_f und der Graph von g mit $g(x) = x^3 - 4x - 1$ dieselbe Steigung haben.

16 Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Wenn f eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist, so hat f′ höchstens $n - 1$ Nullstellen.
b) Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot x^2$ ist $f'(x) = 3x^2 \cdot 2x$.
c) Der Graph der Ableitungsfunktion f′ hat einen Schnittpunkt mit der x-Achse weniger als der Graph der Funktion f.
d) Die Tangente an den Graphen einer Funktion hat mit dem Graphen genau einen gemeinsamen Punkt.
e) Zwei verschiedene Funktionen können nicht die gleiche Ableitungsfunktion haben.
f) Wenn man den Graphen einer Funktion f an der x-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion an der x-Achse.

Strategie | Seite 188
Betrachten von etwas Gegenteiligem

17 Vitus sagt, dass für drei beliebige differenzierbare Funktionen f, g und h aus $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ auch $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$ folge. Nehmen Sie Stellung zu Vitus’ Behauptung.

Test 2

Lösungen | Seite 212

18 Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Ableitung von f den Wert 2 hat.

a) $f(x) = 6x^2 - 10x + 5$ b) $f(x) = 2x \cdot (x - 1)^2$

19 Beurteilen Sie, ob die Aussage über ganzrationale Funktionen wahr oder falsch ist.

a) Die Ableitung einer ungeraden Funktion ist immer eine gerade Funktion.
b) Eine Funktion g, deren Graph G_g durch Verschiebung in y-Richtung aus dem Graphen G_f einer Funktion f hervorgeht, hat die gleiche Ableitungsfunktion wie die Funktion f.
c) Wenn der Graph der Ableitungsfunktion f′ die x-Achse einmal schneidet, so hat die Funktion f ebenfalls mindestens eine Nullstelle.

20 Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion an und beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Funktion und ihrer Ableitungsfunktion.

a) $V(h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ b) $V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ c) $A(r) = \pi \cdot r^2$ d) $V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Grundwissen Test

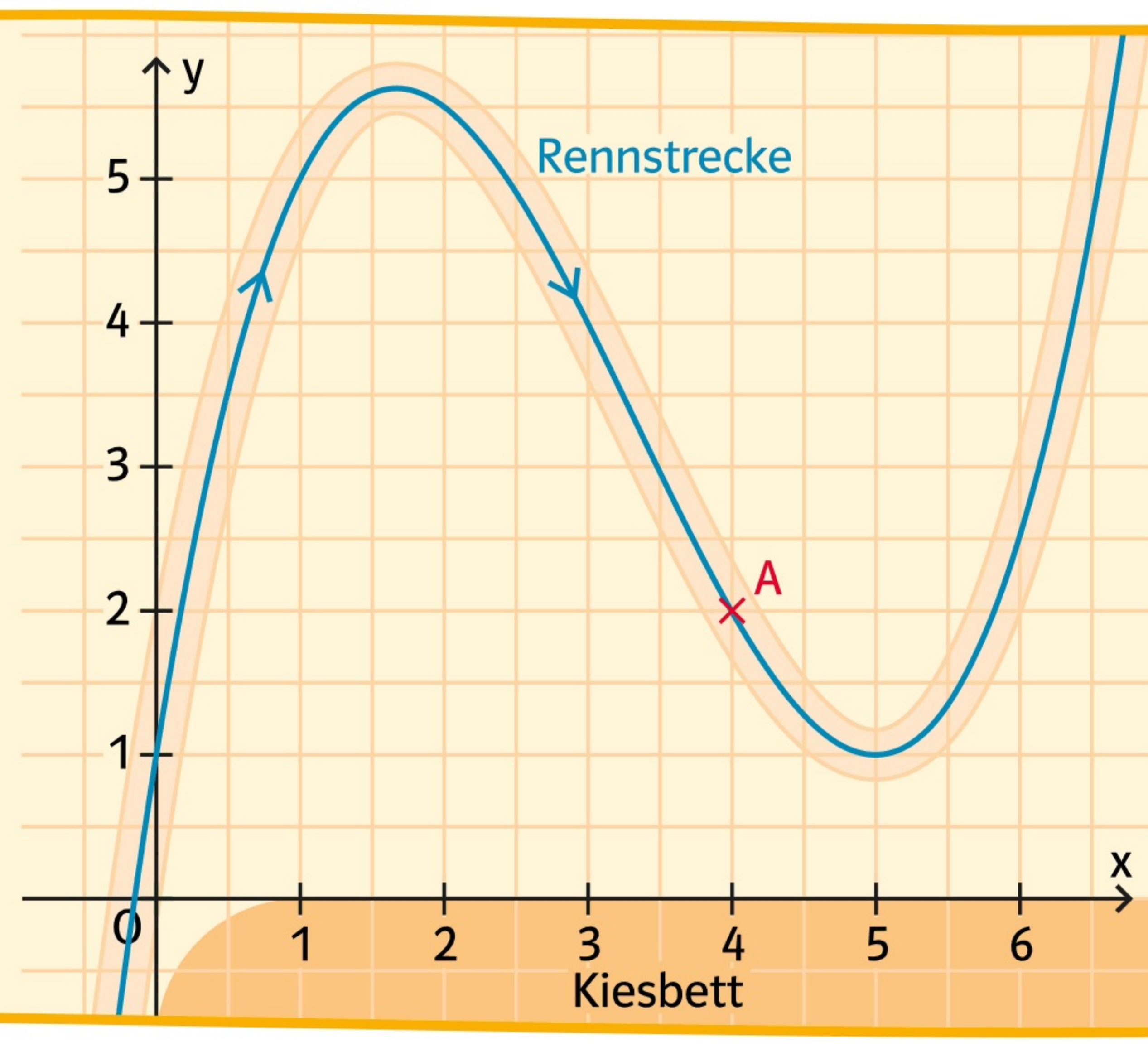
Lösungen | Seite 213

G 21 Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade, die durch den Punkt P verläuft und die Steigung m besitzt.

a) $P(2|1)$; $m = 3$ b) $P(4|-2)$; $m = -1$ c) $P(-3|0)$; $m = \frac{4}{3}$ d) $P(3|2{,}5)$; $m = -\frac{1}{2}$

6 Tangentengleichung und Steigungswinkel

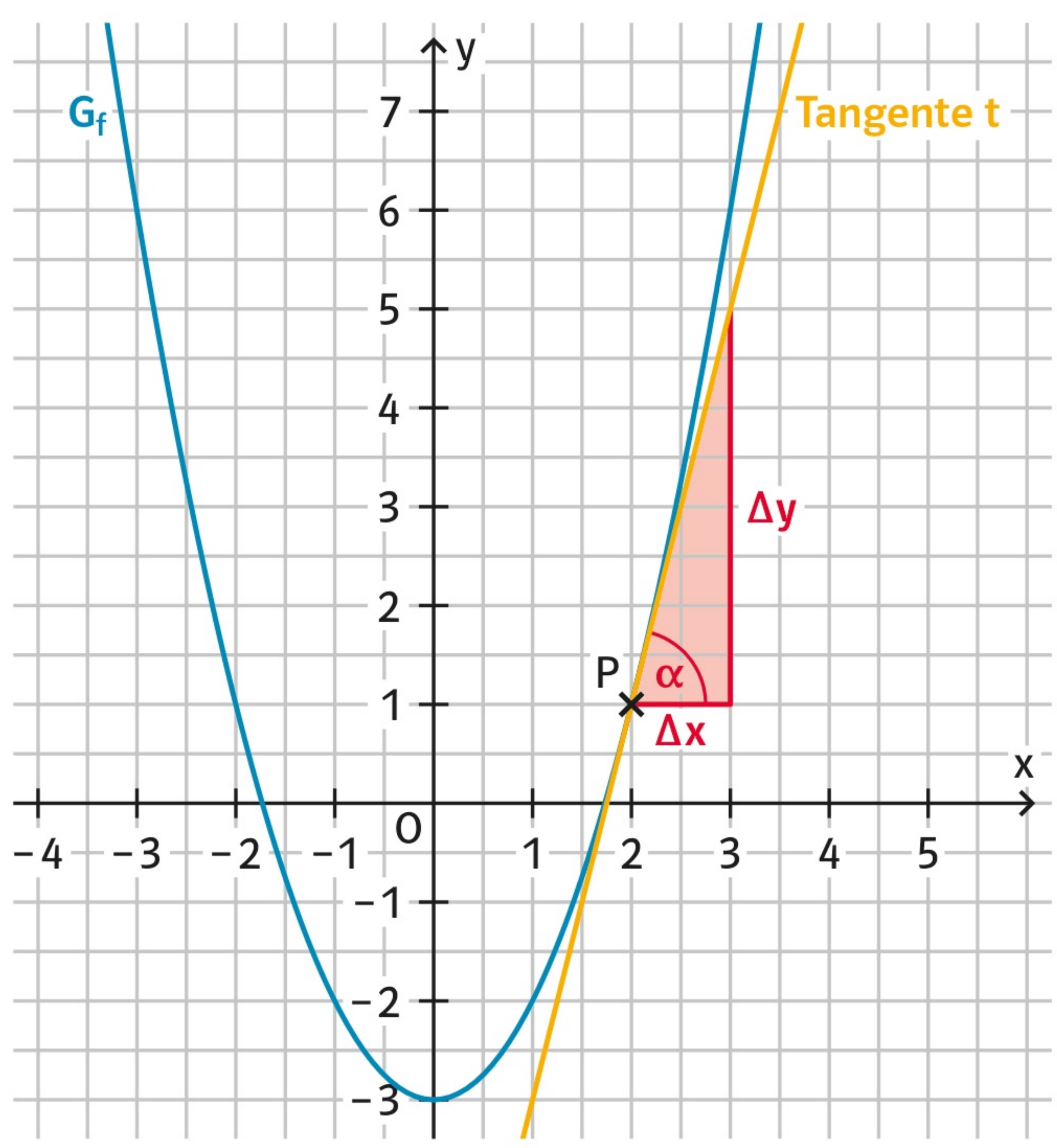
Die S-Kurve in einer Formel-1-Rennstrecke entspricht von oben betrachtet dem abgebildeten Graphen einer Funktion.
Ein Rennfahrer verliert bei regennasser Fahrbahn im Punkt A die Kontrolle über sein Fahrzeug. An welcher Stelle wird er vermutlich ins Kiesbett fahren?





Die Steigung der Tangente in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ des Graphen einer Funktion f ist der Wert der Ableitung $f'(x_0)$. Am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3$ wird eine Gleichung der Tangente im Punkt $P(2|1)$ aufgestellt und die Größe des Steigungswinkels α dieser Tangente berechnet, also des Winkels, den die Tangente mit der x-Achse einschließt.

Die Tangente ist eine Gerade, hat also eine Gleichung der Form $y = mx + t$.
Da $f'(x) = 2x$ ist, ist die Steigung $m = f'(2) = 4$.
Den y-Achsenabschnitt t bestimmt man, indem man den Wert für m und die Koordinaten von $P(2|1)$ in die Gleichung einsetzt und diese nach t auflöst.
$1 = 4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -7$
Die Tangentengleichung lautet $y = 4x - 7$.
Der **Steigungswinkel** α der Tangente lässt sich ebenfalls mithilfe der Ableitung berechnen.
Dem Steigungsdreieck entnimmt man
$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$; somit gilt
$\tan\alpha = f'(2) = 4$.
Aus $\tan\alpha = 4$ erhält man mithilfe des Taschenrechners $\alpha \approx 76°$.

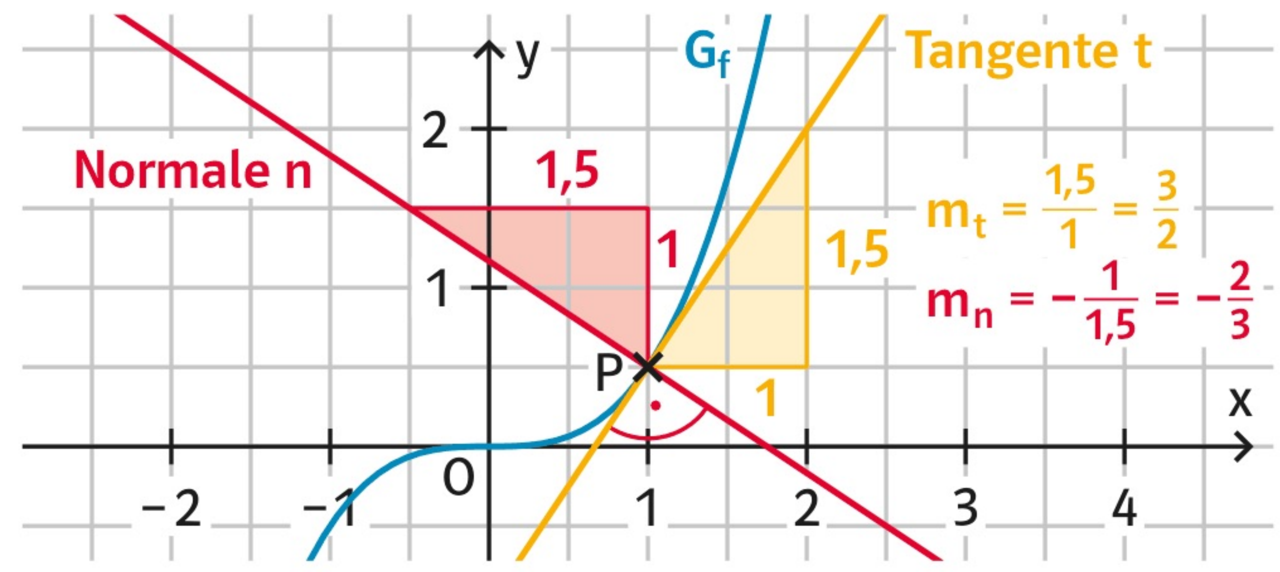


Zur Erinnerung:
Der Taschenrechner hat eine Taste $\tan^{-1}$, mit der man die Größe von α berechnen kann.

Die **Tangentengleichung** der Form $y = mx + t$ der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ bestimmt man durch folgende Schritte:	Beispiel: $f: x \mapsto -0{,}5x^3 + 3x + 4$ Punkt $P(-2|2)$
1. Berechnen der Tangentensteigung m mithilfe der Ableitung: $m = f'(x_0)$.	$f'(x) = -1{,}5x^2 + 3$ $m = f'(-2) = -3$
2. Einsetzen des Wertes von m und der Koordinaten von P in die Geradengleichung und Auflösen nach t.	$2 = -3 \cdot (-2) + t \Rightarrow t = -4$
3. Angeben der Tangentengleichung.	$y = -3x - 4$
Für den **Steigungswinkel** α dieser Tangente gilt $\tan\alpha = f'(x_0)$.	$\tan\alpha = -3$ $\Rightarrow \alpha \approx -71{,}6°$

Das Vorzeichen der Steigung ist gleich dem Vorzeichen des Winkels. Es gilt $-90° < \alpha < 90°$.

Die Gerade n, die senkrecht zur Tangente t in P verläuft, heißt **Normale**. Wenn die Tangente in $P(x_0|f(x_0))$ die Steigung $f'(x_0) = 1{,}5$ besitzt, so hat die Normale die Steigung $-\frac{1}{1{,}5} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Für die Steigung m_t der Tangente und die Steigung m_n ihrer zugehörigen Normalen gilt allgemein $\mathbf{m_t \cdot m_n = -1}$.



Der Steigungswinkel eines Graphen in einem Punkt entspricht dem Steigungswinkel der Tangente in diesem Punkt.

Beispiel 1

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}5$ und der Punkt $P(1|f(1))$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P und berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels des Graphen von f in P.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen im Punkt P.

Lösung

a) $y = f(1) = 1$; $f'(x) = 1{,}5x^2$

$m_t = f'(1) = 1{,}5$

Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:

$1 = 1{,}5 \cdot 1 + t$

$t = -0{,}5$

Tangentengleichung: $y = 1{,}5x - 0{,}5$.

Aus $\tan\alpha = 1{,}5$ folgt $\alpha \approx 56{,}3°$.

b) Steigung der Normalen:

$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{1{,}5} = -\frac{2}{3}$

Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:

$1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + t$

$t = \frac{5}{3}$

Normalengleichung: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Beispiel 2

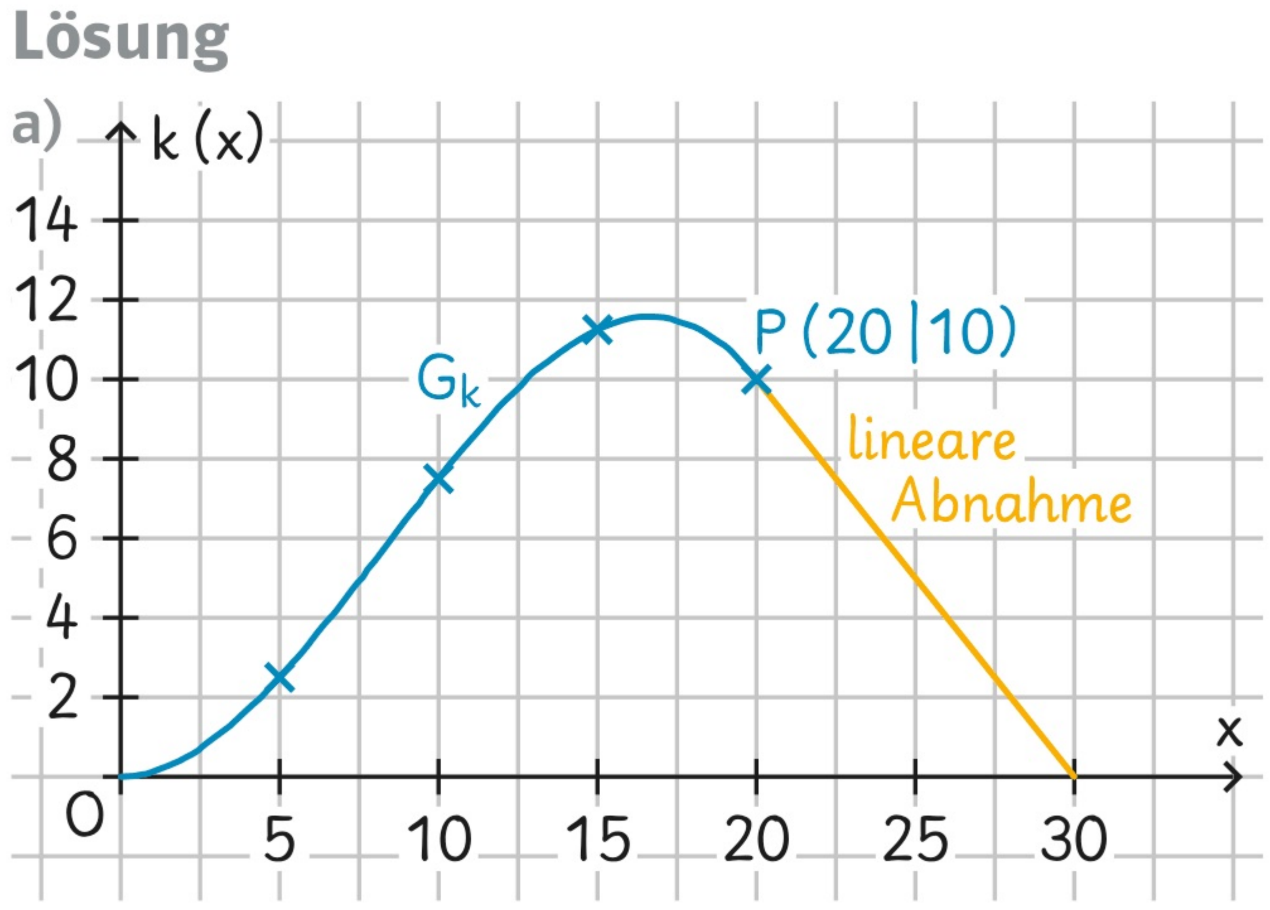
Während einer Grippewelle lässt sich die Anzahl der Erkrankten in Abhängigkeit der vergangenen Zeit x nach Beobachtungsbeginn mithilfe der Funktion k mit $k(x) = -\frac{1}{200}x^3 + \frac{1}{8}x^2$, $0 \le x \le 20$, beschreiben (x in Tagen, k(x) in Tausend). Für $x \ge 20$ nimmt die Anzahl der Erkrankten linear ab, wobei der Graph von k ohne Knick in den Graphen der linearen Abnahme übergeht.

a) Skizzieren Sie den Graphen für die Anzahl der Erkrankten in Abhängigkeit von x.

b) Bestimmen Sie rechnerisch, wann die Grippewelle vorbei ist, wenn man davon ausgeht, dass die Abnahme weiterhin linear verläuft.

Lösung

a)



b) Der Graph für die lineare Abnahme entspricht der Tangente an den Graphen von k im Punkt $P(20|10)$.

$f'(x) = -\frac{3}{200}x^2 + \frac{1}{4}x$; $m = f'(20) = -1$

Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:

$10 = -1 \cdot 20 + t \quad | + 20$

$t = 30$

Tangentengleichung: $y = -x + 30$.

Aus $-x + 30 = 0$ folgt $x = 30$.

Die Grippewelle ist nach 30 Tagen vorbei.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

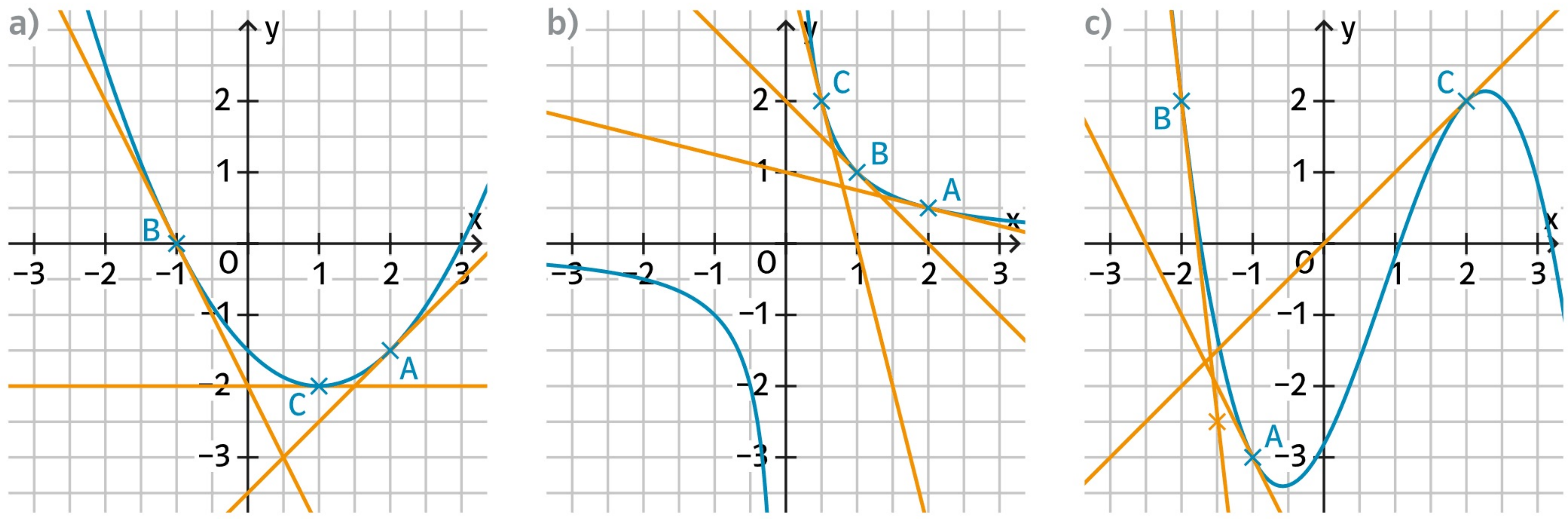
a) $f(x) = x^2$; $x_0 = 2$ b) $f(x) = 2x^2 - 3x$; $x_0 = 1$ c) $f(x) = \frac{8}{3}x^3$; $x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2$; $x_0 = 2$ e) $f(x) = 3x^4 + 4x$; $x_0 = -1$ f) $f(x) = 2x^3 - x$; $x_0 = -2$

2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangente an den Graphen von f im Punkt P mit der x-Achse.

a) $f(x) = 2x^2$; $P(2|f(2))$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$; $P(-1|f(-1))$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x$; $P(1|f(1))$

3 Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten in den Punkten A, B und C, indem Sie die Koordinaten geeigneter Gitterpunkte ablesen, und berechnen Sie jeweils die Größe des Steigungswinkels der Tangente.



4 Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2;\ x_0 = 0{,}5$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2;\ x_0 = 1{,}5$ c) $f(x) = -x^4 - 2x^3;\ x_0 = 1$

5 Die Flugbahn eines Pfeils, der mit einem Bogen abgeschossen wird, entspricht ungefähr der Parabel einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{50}(x + 1{,}2)(x - 70),\ x \geq 0$. Dabei gibt x die horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Metern und f(x) die Höhe über dem Erdboden in Metern an.

a) Geben Sie an, in welcher Entfernung der Pfeil im Boden steckt, und skizzieren Sie den Graphen.
b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der Pfeil mit dem Boden einschließt.

6 Ein Straßenstück wird modellhaft durch den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}6x + 2{,}9$, $x \in [-1;\ 6]$, beschrieben (x und y jeweils in 100 m). Die Straße soll für $x < -1$ geradlinig ohne Knick weitergeführt werden. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die dieses Straßenstück beschreibt.

Test 1 → Lösungen | Seite 213

7 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f mit $f(x) = 2x^3 - 5$ im Punkt $P(1 \mid f(1))$ und berechnen Sie die Größe ihres Steigungswinkels.

8 Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4;\ x_0 = 1$ b) $f(x) = x^3 + \frac{26}{27};\ x_0 = \frac{1}{3}$ c) $f(x) = x^3 + 1;\ x_0 = -0{,}5$

9 Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen an den Graphen G_f der Funktion f im Punkt P. Bestimmen Sie die Größe der Steigungswinkel beider Geraden.

a) $f\colon x \mapsto x^2;\ P(2 \mid 4)$ b) $f\colon x \mapsto -\frac{1}{8}x^2;\ P(-2 \mid -0{,}5)$ c) $f\colon x \mapsto x^2 - 5x;\ P(0 \mid 0)$

10 Berechnen Sie, in welchen Punkten des Graphen von f die Tangente den Steigungswinkel 21,8° hat, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $f\colon x \mapsto 5x^2$ b) $f\colon x \mapsto \frac{5}{6}x^3$ c) $f\colon x \mapsto 0{,}15x^2 - 0{,}2x$

11 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 3 a)**
Betrachtet werden eine in ℝ definierte ganzrationale Funktion p und der Punkt $Q(2 \mid p(2))$. Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von p im Punkt Q ermitteln kann.

12 Das Kirchenmittelschiff der Parabelkirche in Gelsenkirchen hat eine Breite von 10 m und eine Höhe von 15 m.

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie einen Term einer quadratischen Funktion, die einen der Parabelbögen des Mittelschiffs beschreibt.

b) Die im Boden verlaufenden Stützpfeiler wurden nicht mehr aus Parabelstücken, sondern aus Geradenstücken gefertigt, die knickfrei an die Parabelstücke anschließen. Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden, die die Stützpfeiler beschreiben.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Stützpfeiler mit dem Boden einschließen, wenn dabei die Dicke der Pfeiler vernachlässigt wird.



Strategie | Seite 186
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

Seit 2007 wird das Gebäude nicht mehr als Kirche genutzt, sondern nach einem Umbau als Multifunktionshaus.

13 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x + 3)^2$. Man betrachtet die Tangente und Normale an den Graphen von f im Punkt $P(-4 \mid f(-4))$. Bearbeiten Sie die Teilaufgaben arbeitsteilig und stellen Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen vor.

a) Die Tangente, die Normale und die x-Achse schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Die Tangente, die Normale und die y-Achse schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes des Graphen von f und der Normalen.

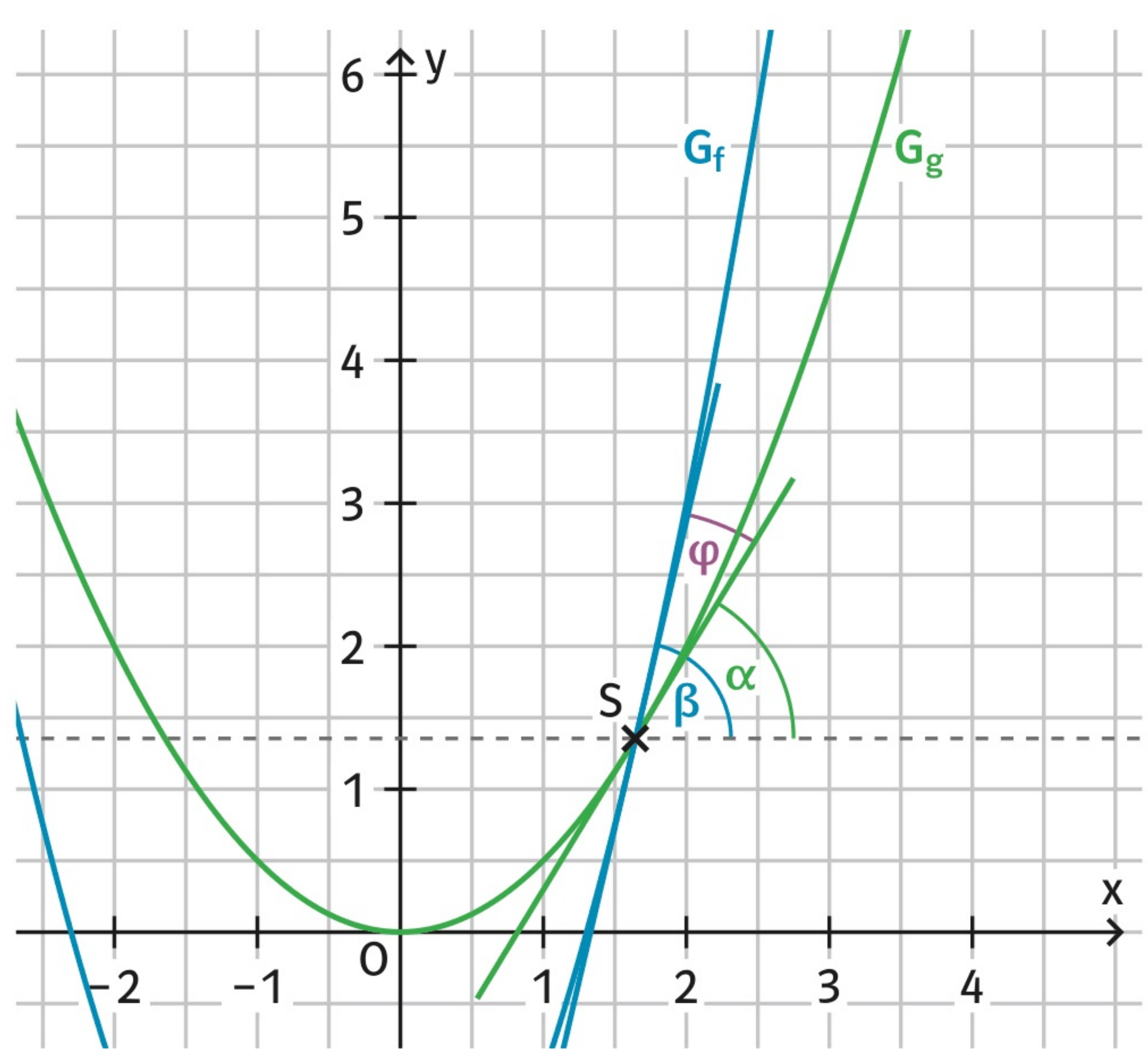
Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

14 **Schnittwinkel zweier Graphen**

Der Schnittwinkel zweier Graphen, die sich in einem Punkt S schneiden, ist der Winkel φ, den die Tangenten in S miteinander einschließen. Dabei gilt $0° \le \varphi \le 90°$.

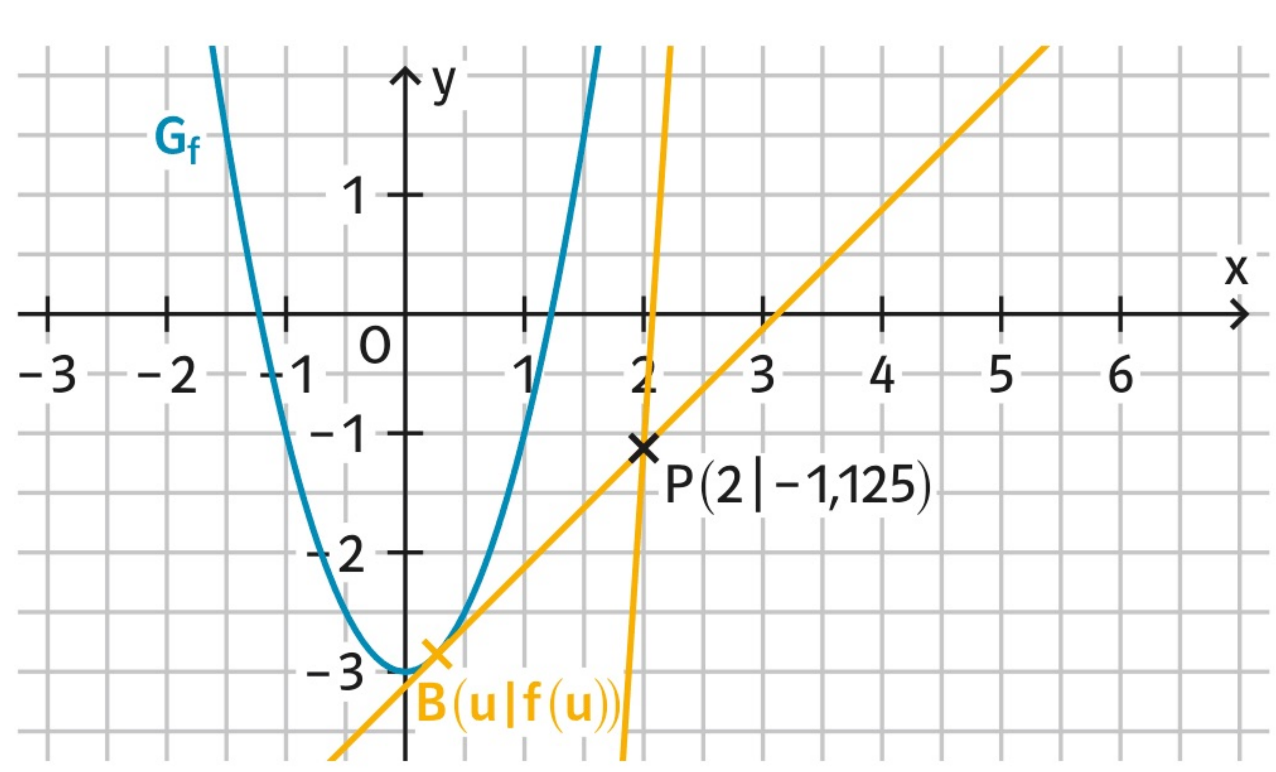
a) Beschreiben Sie anhand der Grafik ein Verfahren zur Bestimmung der Größe des Schnittwinkels zweier Graphen, die an der Schnittstelle positive Steigungen haben.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Graphen der Funktionen $h: x \mapsto x^2 + x - 2$ und $k: x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x - 2$ in genau einem Punkt schneiden, und berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der beiden Graphen.

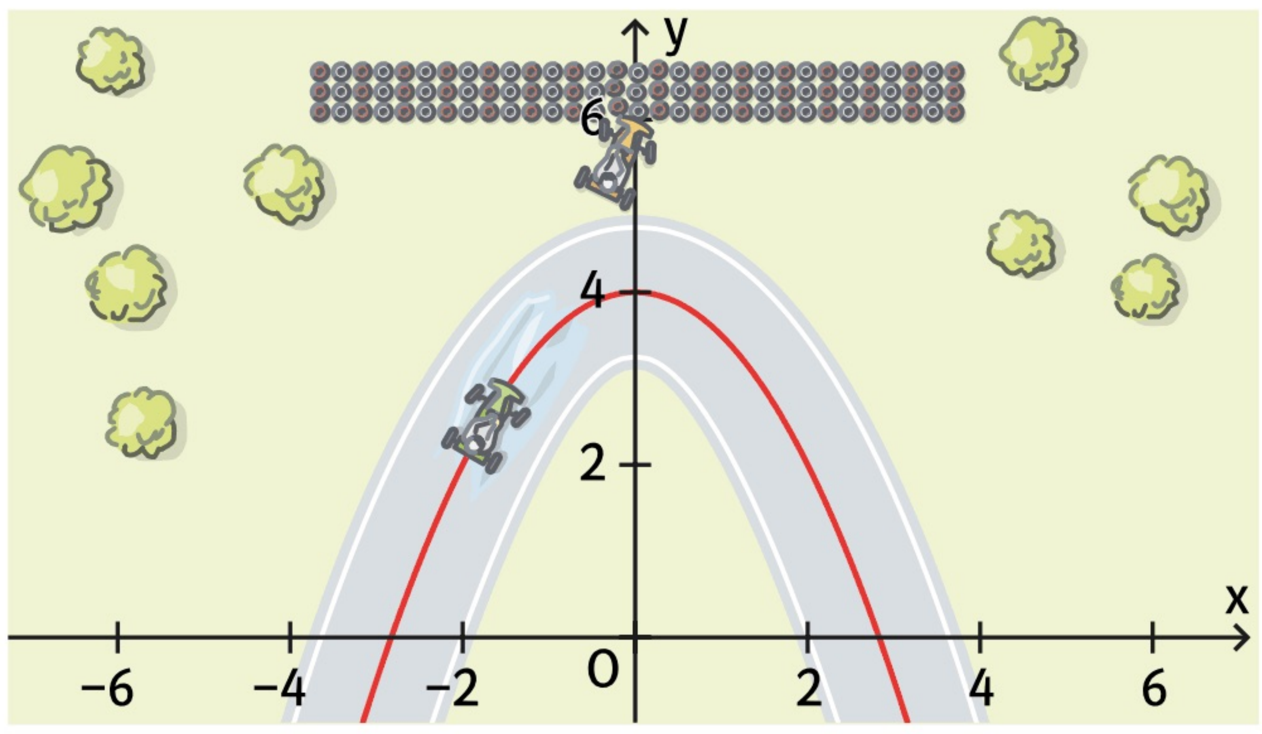


15 **Tangente von außen**

Durch den Punkt $P(2 \mid -1{,}125)$ werden Tangenten an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2x^2 - 3$ gelegt. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten, indem Sie zunächst die Gleichung der Tangente in einem Berührpunkt $B(u \mid f(u))$ in Abhängigkeit von u aufstellen, anschließend die Koordinaten von P einsetzen und dann die Berührstellen u_1 und u_2 bestimmen.



16 Die Mittellinie einer von oben betrachteten Rennstrecke wird modellhaft durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$ dargestellt. Bei Aquaplaning wird ein Rennwagen geradlinig, tangential aus der Kurve getragen und landet an dem Punkt in den Reifen, der durch $Q(0|6)$ beschrieben wird. Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punktes, an dem der Wagen die Strecke verlassen hat. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



Test 2

Lösungen | Seite 213

17 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente bzw. der Normalen an den Graphen G_f im Punkt $P(-1|f(-1))$.

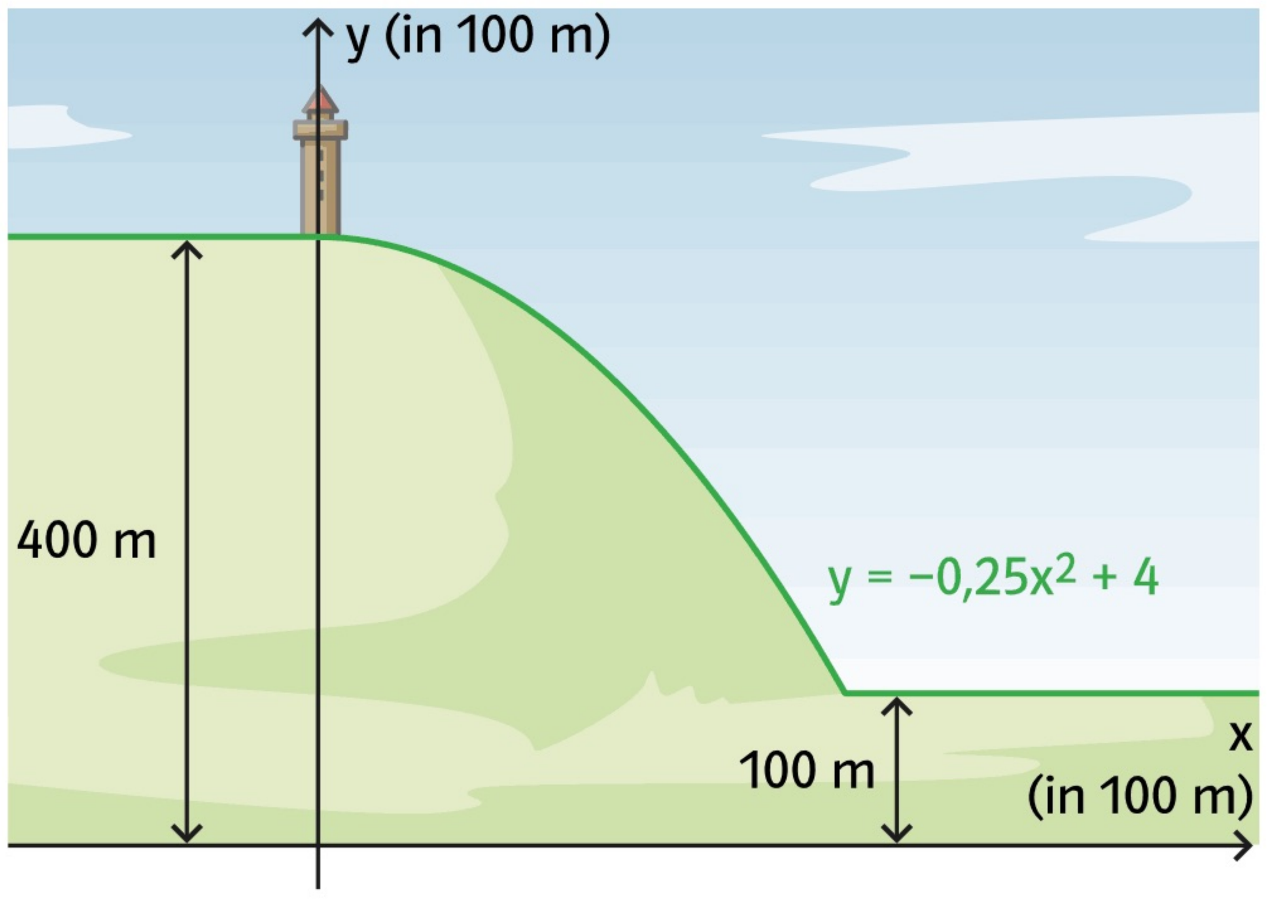
b) Berechnen Sie, an welchen Stellen der Graph von f einen Steigungswinkel von 30° hat.

c) Überprüfen Sie, ob die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + \frac{1}{3}$ eine Tangente an G_f an der Stelle $x = 1$ ist.

18 Die Firma RhinoFlight stellt eine Spiele-App her. Die Anzahl der täglichen Downloads für das Spiel in Abhängigkeit von der Zeit nach Markteinführung (in Wochen) lässt sich zunächst modellhaft mithilfe der Funktion f mit $f(x) = 0{,}005x^3 - 0{,}5x^2 + 12{,}5x + 10$ mit $0 \le x \le 20$ beschreiben. Zwanzig Wochen nach Markteinführung nimmt die Anzahl der täglichen Downloads linear ab, wobei der Graph von f ohne Knick in den Graphen der linearen Abnahme übergeht. RhinoFlight nimmt das Spiel vom Markt, wenn erstmalig weniger als zehn Spiele pro Tag verkauft werden. Bestimmen Sie rechnerisch, wie viele Tage nach Markteinführung dies der Fall ist.



19 Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hanges mit einem 100 m hohen Aussichtsturm. Bestimmen Sie rechnerisch, welcher Bereich von der Turmspitze aus nicht einsehbar ist.

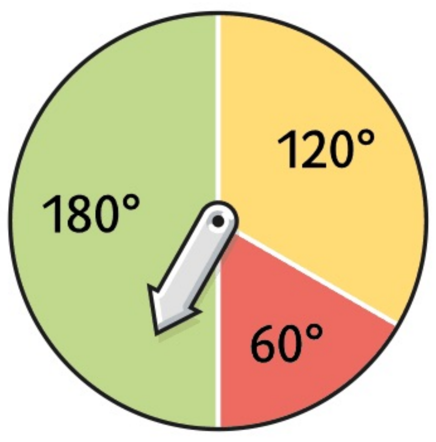


20 Gegeben ist für jedes $c > 0$ eine Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - cx$. Der Graph von f schneidet die x-Achse in den Punkten $O(0|0)$ und $A(a|0)$. In O und A wird jeweils eine Tangente an den Graphen gezeichnet.
Die Tangenten schneiden sich im Punkt S.
Die Punkte O, A und S bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie den Wert für c so, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 213

G 21 Ein Glücksrad wird zweimal gedreht und die Farbe des Feldes notiert, auf dem der Zeiger stehen bleibt. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal Rot gedreht wurde.



Wiederholen

1 Beurteilen Sie zunächst, ob der Wert des Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall I positiv oder negativ ist, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschließend rechnerisch.

a) $f: x \mapsto -2x^2$ $I = [1; 3]$ **b)** $f: x \mapsto 5x^3$ $I = [-1{,}5; 1{,}5]$ **c)** $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 3$ $I = [-3; 2]$ **d)** $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ $I = [-2; -1]$

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

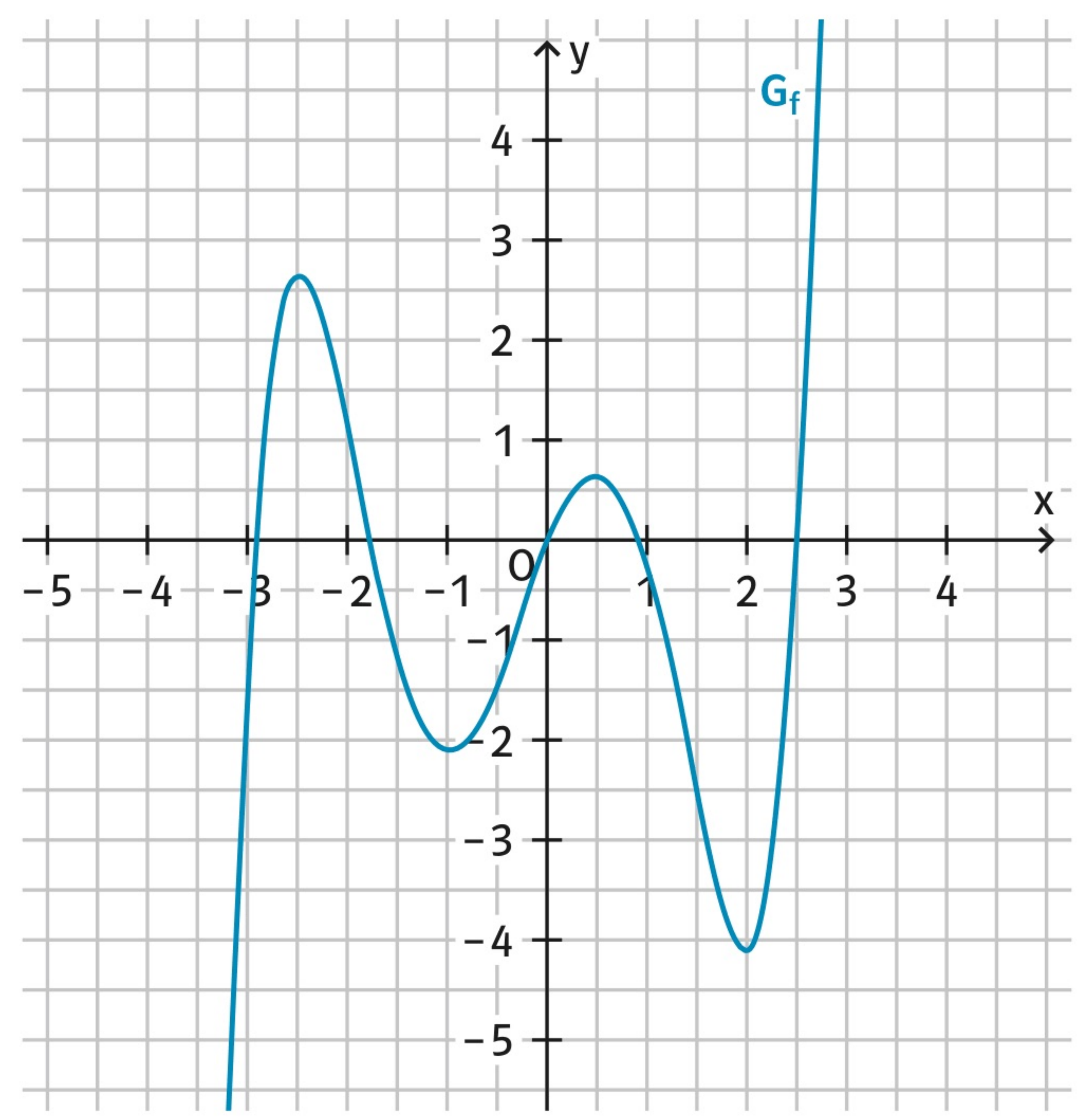
2 Ermitteln Sie einen Term der Ableitungsfunktion f′ der Funktion f und geben Sie f′(0) an.

a) $f(x) = -x^3 + 2x^2$ **b)** $f(t) = -\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t - \frac{5}{3}$
c) $f(s) = (s - 3)(2s - 5)$ **d)** $f(x) = x(x^2 - 2x + 5) - 2x^3$
e) $f(t) = \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{x^2}t$ **f)** $f(x) = (x - t)^2 - 2x$

3 Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f.

a) Beurteilen Sie die Aussagen über die zugehörige Ableitungsfunktion f′.
(1) Der Graph von f′ verläuft zwischen $x = 0$ und $x = 1$ oberhalb der x-Achse.
(2) $f'(2) = 0$
(3) Der Graph von f′ verläuft durch den Ursprung.
(4) Der Graph von f′ verläuft im Intervall $[-0{,}5; 0]$ oberhalb der x-Achse.
(5) $f'(1) < 0$
(6) f′ hat mindestens drei Nullstellen.

b) Formulieren Sie jeweils eine Aussage zur Ableitungsfunktion f′ und lassen Sie sie von Ihrer Sitznachbarin bzw. Ihrem Sitznachbarn beurteilen.



4 Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen im Punkt $P\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{4}\right)$ an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2 - x$.

5 Das Höhenprofil des Beginns einer Achterbahn wird für $0 \le x \le 70$ beschrieben durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = -0{,}00001x^4 - 0{,}0006x^3 + 0{,}1x^2$ (x und h(x) in m).
Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels und die Steigung der Achterbahn in Prozent in den Punkten $B_1(10\,|\,h(10))$, $B_2(30\,|\,h(30))$, $B_3(50\,|\,h(50))$ und $B_4(60\,|\,h(60))$.

Vertiefen

6 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 - 4x + 4$ und $g(x) = -x^2 - 2x + 3{,}5$ im Punkt $P(0{,}5\,|\,f(0{,}5))$ berühren.
Ermitteln Sie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente an die beiden Graphen in diesem Punkt.

Die Graphen der Funktionen f und g berühren sich in $P(a\,|\,f(a))$, wenn gilt:
1. $f(a) = g(a)$ und
2. $f'(a) = g'(a)$.

7 Eine Bakterienkultur wächst in einer Schale. Die Größe der Fläche, die von Bakterien bedeckt ist, kann mithilfe der Funktion A modelliert werden: $A(t) = -0{,}001t^3 + 0{,}1t^2 + t + 1{,}5$, $0 \le t \le 70$ (t in h seit Beginn der Beobachtung, A(t) in cm²).

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der bakterienbesetzten Fläche für die ersten vier Stunden.
b) Bestimmen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit nach 6,5 Stunden.
c) Berechnen Sie, zu welchen Zeitpunkten die Wachstumsgeschwindigkeit $270\,\frac{mm^2}{h}$ beträgt.

8 Beim Tauchen gelten strenge Regeln für das Auftauchen. Die Tabelle zeigt den Auftauchvorgang, wie man ihn nach einem Tauchgang, bei dem man 28 Minuten in 39 m Tiefe war, gestalten kann.

a) Bestimmen Sie die mittlere Auftauchgeschwindigkeit für den gesamten Auftauchvorgang.

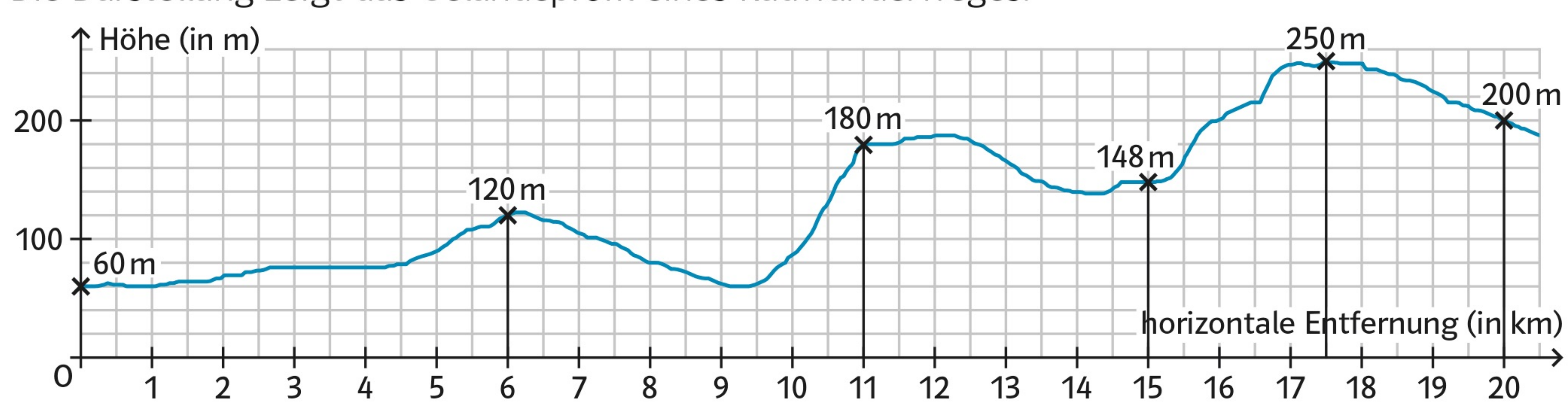
b) Bestimmen Sie die mittlere Auftauchgeschwindigkeit in der ersten bzw. zweiten Hälfte des Auftauchzeitraums.

c) Bestimmen Sie die mittlere Auftauchgeschwindigkeit in den ersten und in den letzten drei Minuten.



Zeit (in min)	0	3	7	7,5	15,5	17	31	34
Tiefe (in m)	39	9	9	6	6	3	3	0

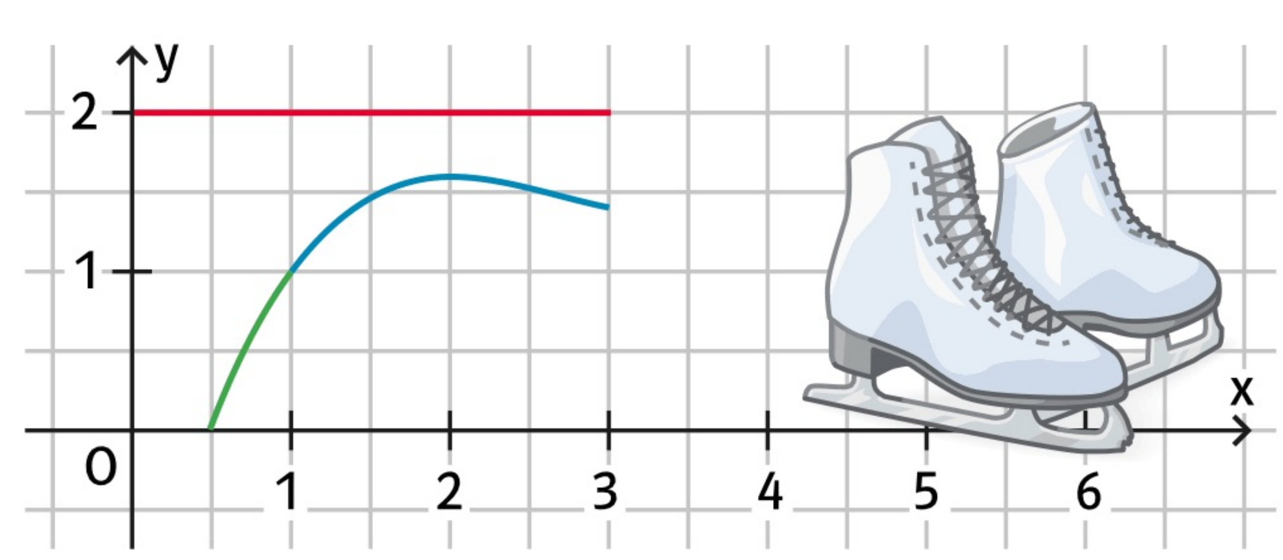
9 Die Darstellung zeigt das Geländeprofil eines Radwanderweges.



a) Bestimmen Sie die durchschnittlichen Steigungen der markierten Streckenabschnitte.

b) Jonas nennt Johannes nur die durchschnittlichen Steigungen. Johannes überlegt, ob er für die Radtour sein Tourenrad oder sein E-Bike verwenden soll. Beurteilen Sie die Aussagekraft der Werte aus Teilaufgabe a) für seine Entscheidung.

10 Ein Eiskunstläufer möchte entlang einer Kurve, die durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}6x^2 + 4x - 1{,}6$ (x, f(x) in 10 m) beschrieben werden kann, gleiten. Im Punkt P(1|1) rutscht er aus und prallt gegen die Bande, die durch die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ beschrieben werden kann.



Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A, in dem er an der Bande aufprallt.

11 Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ ist eine Funktion $g_a: x \mapsto x^3 + 2x^2 + ax + 1$ gegeben.

a) Bestimmen Sie für $a = -4$ die lokale Änderungsrate von g_{-4} an der Stelle $x_0 = -2$.

b) Untersuchen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware, für welche Werte von a die zugehörige Funktion Stellen besitzt, an denen die lokale Änderungsrate den Wert null hat.

Vernetzen

12 Beurteilen Sie, wie sich der Graph der Ableitungsfunktion f′ ändert, wenn der Graph der Funktion f wie angegeben verändert wird. Überprüfen Sie Ihre Antwort mit einem Funktionenplotter.

a) G_f wird in y-Richtung verschoben.

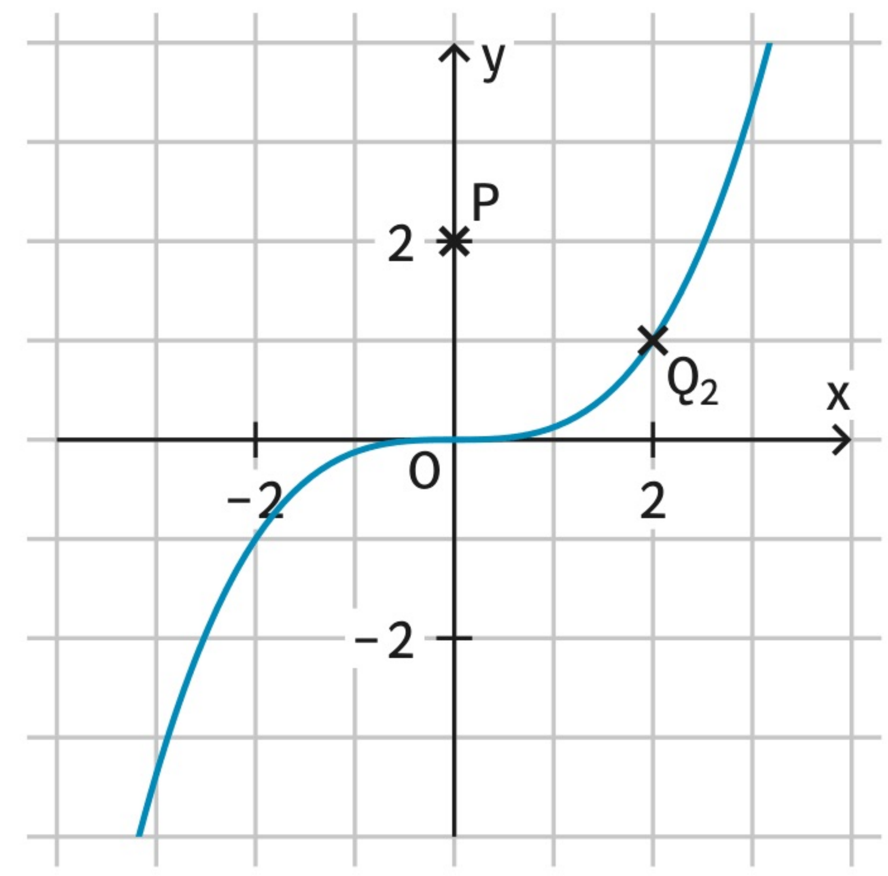
b) G_f wird nach rechts verschoben.

c) G_f wird nach links verschoben.

d) G_f wird an der x-Achse gespiegelt.

13 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 4**

Gegeben sind die in ℝ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a(a \mid f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0 \mid 2)$ und Q_2.



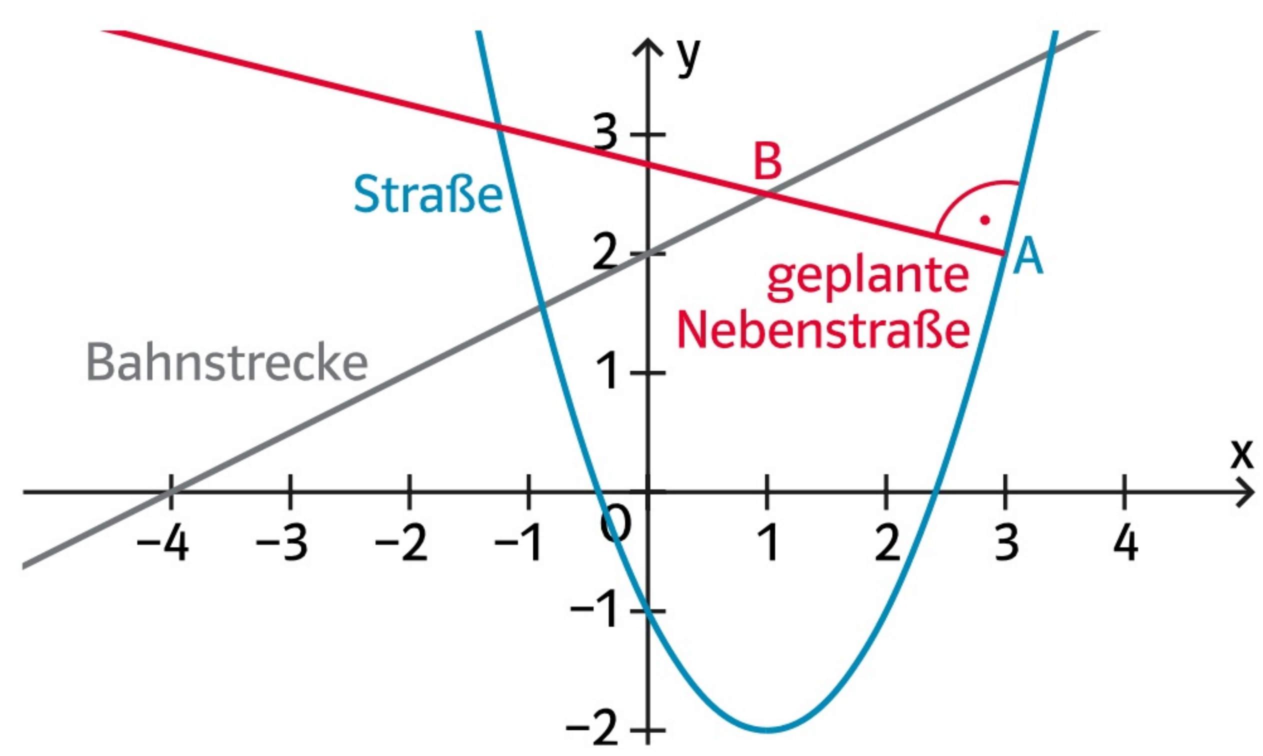
a) Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a.

$\left(\text{zur Kontrolle: } m_a = \frac{a^3 - 16}{8a}\right)$

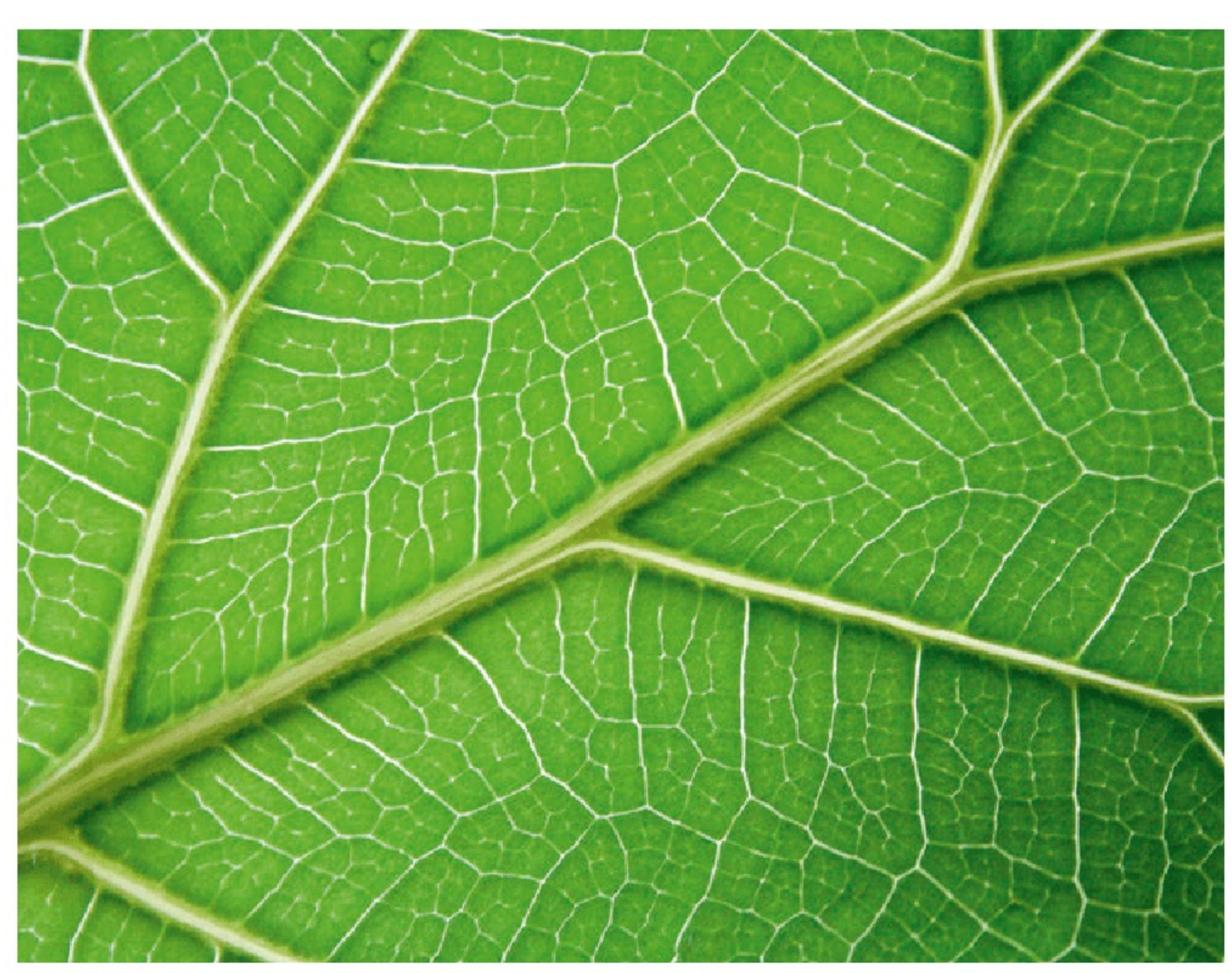
b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert für $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

14 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$ hat an zwei Punkten P und Q die Steigung $m = -1$. Die Punkte P, Q und der Koordinatenursprung O bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQO.

15 Eine Straßenkurve entspricht von oben betrachtet dem Graphen von f mit $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (x und f(x) in 10 m). Der Neubau einer Nebenstraße ist so geplant, dass sie im Punkt $A(3 \mid 2)$ senkrecht in diese Straße mündet. Bestimmen Sie, in welchem Punkt B man für die Nebenstraße eine Brücke über die Bahnstrecke planen muss, deren Verlauf durch die Gleichung $y = 0{,}5x + 2$ beschrieben werden kann.



16 Mithilfe der Photosynthese wandelt ein Baum Kohlenstoffdioxid in Sauerstoff um, den er dann an seine Umgebung abgibt. Die abgegebene Sauerstoffmenge hängt unter anderem von der Tageszeit t ab.
Die Funktion V mit $V(t) = -1{,}1t^3 + 20t^2 + 10t$ mit V(t) in Litern und t in Stunden nach 6 Uhr gibt für den Messzeitraum von zwölf Stunden während eines Tages näherungsweise an, wie viel Sauerstoff vom Baum insgesamt bis zum Zeitpunkt t an seine Umgebung abgegeben worden ist.



a) Zeichnen Sie den Graphen von V mithilfe eines Funktionenplotters.

b) Begründen Sie, warum die Modellierung durch die Funktion V nur im genannten Intervall sinnvoll ist.

c) Berechnen Sie, wie viel Sauerstoff der Baum während der Messzeit an seine Umgebung abgegeben hat.

d) Berechnen Sie, wie viel Sauerstoff der Baum zwischen 11 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich pro Stunde abgibt.

e) Erläutern Sie die Bedeutung von $V'(t)$ im Sachzusammenhang und bestimmen Sie $V'(3)$ und $V'(10)$.

f) Bestimmen Sie näherungsweise, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate am größten ist, und begründen Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Der Streit um die Ableitung

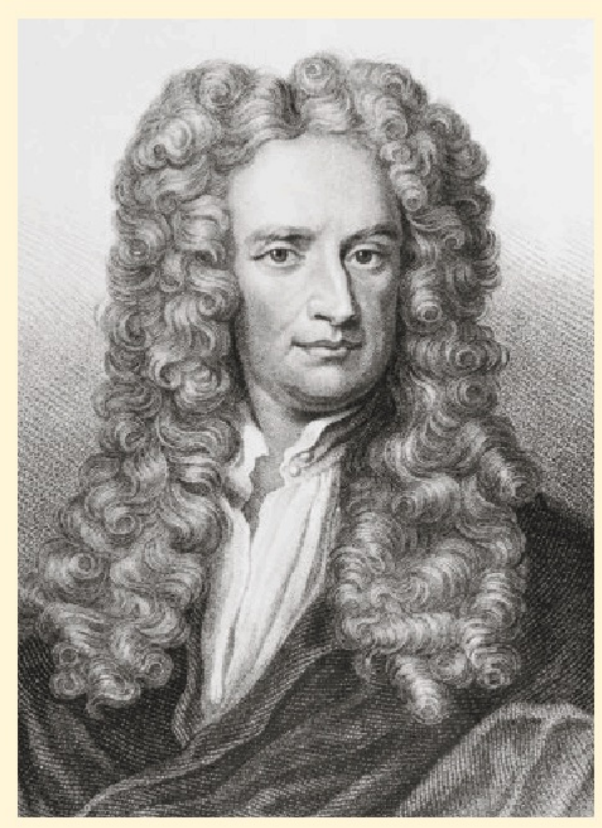
Der Ableitungsbegriff gehört zu den wohl größten geistigen Erkenntnissen in der Mathematik. Moderne Naturwissenschaft und Technik wären ohne den Ableitungskalkül kaum denkbar. Die Betrachtung beliebig kleiner Größen war seit der Antike von Interesse. Vollständig hergeleitet wurde die Ableitung im 17. Jahrhundert im Zusammenhang mit Extremwertaufgaben und der Bestimmung von Tangenten und Flächeninhalten.

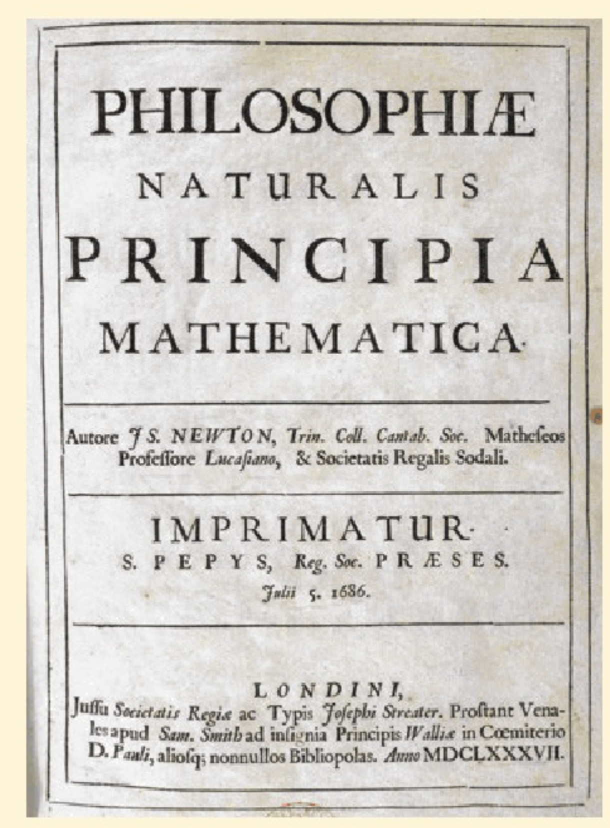
Ein Kalkül ist eine Methode zur systematischen Lösung bestimmter Probleme.

Nach Vorarbeiten von Pierre de Fermat (1607 – 1665), René Descartes (1596 – 1650), Isaac Barrow (1630 – 1677), James Gregory (1638 – 1675) und anderen waren es Barrows Schüler Sir Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), die den Ableitungsbegriff systematisch entwickelten, Newton von 1665 bis 1666 und Leibniz von 1672 bis 1676. Beide veröffentlichten ihre Ergebnisse erst viel später: Newton 1671 (in „De Methodis Serierum et Fluxiorum“) und 1704 („Opticks“), Leibniz sogar erst 1684.
Auch wenn sich die Ergebnisse von Newton und Leibniz formal unterschieden, waren sie inhaltlich gleichwertig.

Fermat löste das Tangentenproblem bereits 1640. Da er keine Grenzwertbetrachtung durchführte, konnte er seine Ergebnisse allerdings nicht mathematisch exakt begründen.

Sir Isaac Newton
Newton war Professor in Cambridge und einer der größten Mathematiker und Physiker aller Zeiten.
Das von ihm verfasste Werk „Principia Mathematica“, in dem er die Gravitation und die Bewegungsgesetze beschrieb, wird als eines der wichtigsten wissenschaftlichen Werke der Mathematik und Physik eingestuft.



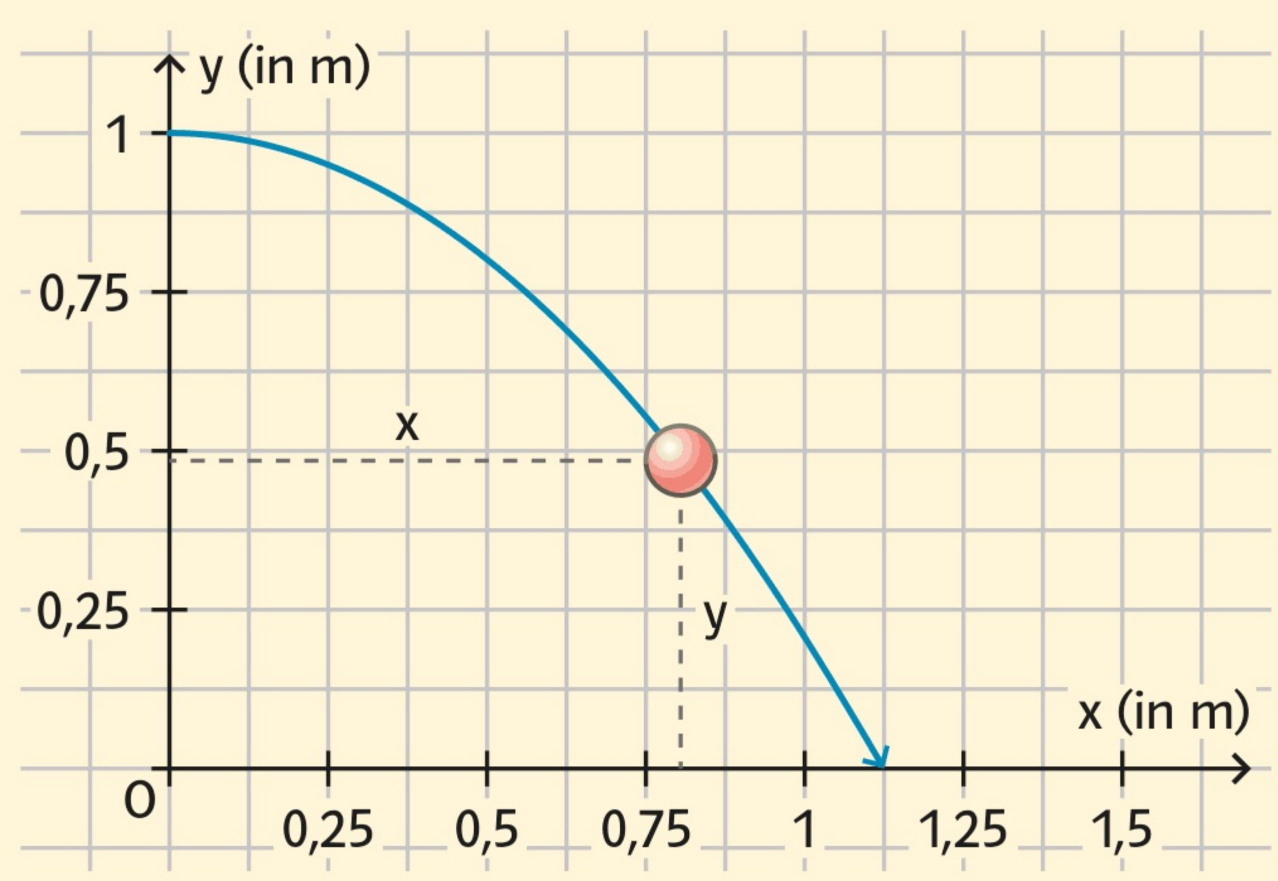

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Coemiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Newton fasste variable Größen wie x und y als zeitabhängig auf: $x(t)$ und $y(t)$. Diese nannte er „Fluenten“ (Fließende). Mit $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ bezeichnete er die Zeitableitungen von x und y, also deren „Geschwindigkeiten“, die er „Fluxionen“ nannte. Wie Newton mit diesen Fluxionen arbeitete, soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:
Eine Kugel wird von einem Tisch waagerecht aus einer Höhe von einem Meter mit einer waagerechten Anfangsgeschwindigkeit von $2{,}5\frac{m}{s}$ gestoßen. Die horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt x zur Zeit t lässt sich mit der Gleichung $x = 2{,}5\frac{m}{s}\cdot t$ berechnen. Die Ableitung $\dot{x} = 2{,}5\frac{m}{s}$ gibt die hier konstante horizontale Momentangeschwindigkeit der Kugel an. Die Höhe y kann man mit der Gleichung $y = 1\,m - \frac{1}{2}g\cdot t^2$, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$, bestimmen.



Die Schreibweise $\dot{x}$ wird heute noch in der Physik für die Ableitung einer zeitabhängigen Größe x verwendet.

Damit ist die vertikale Momentangeschwindigkeit $\dot{y} = -g\cdot t$. Newton deutete den Quotienten $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ als Steigung der Bahnkurve: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{g\cdot t}{2{,}5\frac{m}{s}} = -\frac{g\cdot\frac{x}{2{,}5\frac{m}{s}}}{2{,}5\frac{m}{s}} = -\frac{g\cdot x}{\left(2{,}5\frac{m}{s}\right)^2} = -\frac{g}{\left(2{,}5\frac{m}{s}\right)^2}\cdot x$. Dabei ersetzte er die Zeit t durch $\frac{x}{2{,}5\frac{m}{s}}$. Die Gleichung der Bahnkurve erhält man durch die gleiche Ersetzung aus $y = 1\,m - \frac{1}{2}g\cdot t^2$, also $y = 1\,m - \frac{g}{2\cdot\left(2{,}5\frac{m}{s}\right)^2}\cdot x^2$. Die Bahnkurve ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1\,m - \frac{g}{2\cdot\left(2{,}5\frac{m}{s}\right)^2}\cdot x^2$. Leitet man diese nach den bekannten Regeln ab, so erhält man mit $f'(x) = -\frac{g}{\left(2{,}5\frac{m}{s}\right)^2}\cdot x$ das gleiche Ergebnis wie Newton für den Quotienten $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Der Streit um die Ableitung

Gottfried Wilhelm Leibniz
Leibniz gilt als letzter Universalgelehrter.
Er war Jurist, Diplomat, Politiker, Philosoph, Historiker, Theologe, Naturwissenschaftler und Mathematiker.
In einem Manuskript von Leibniz trat 1673 erstmals das Wort „functio“ auf. Er gebrauchte dort „Funktion“ im Sinne von „eine Funktion haben“.



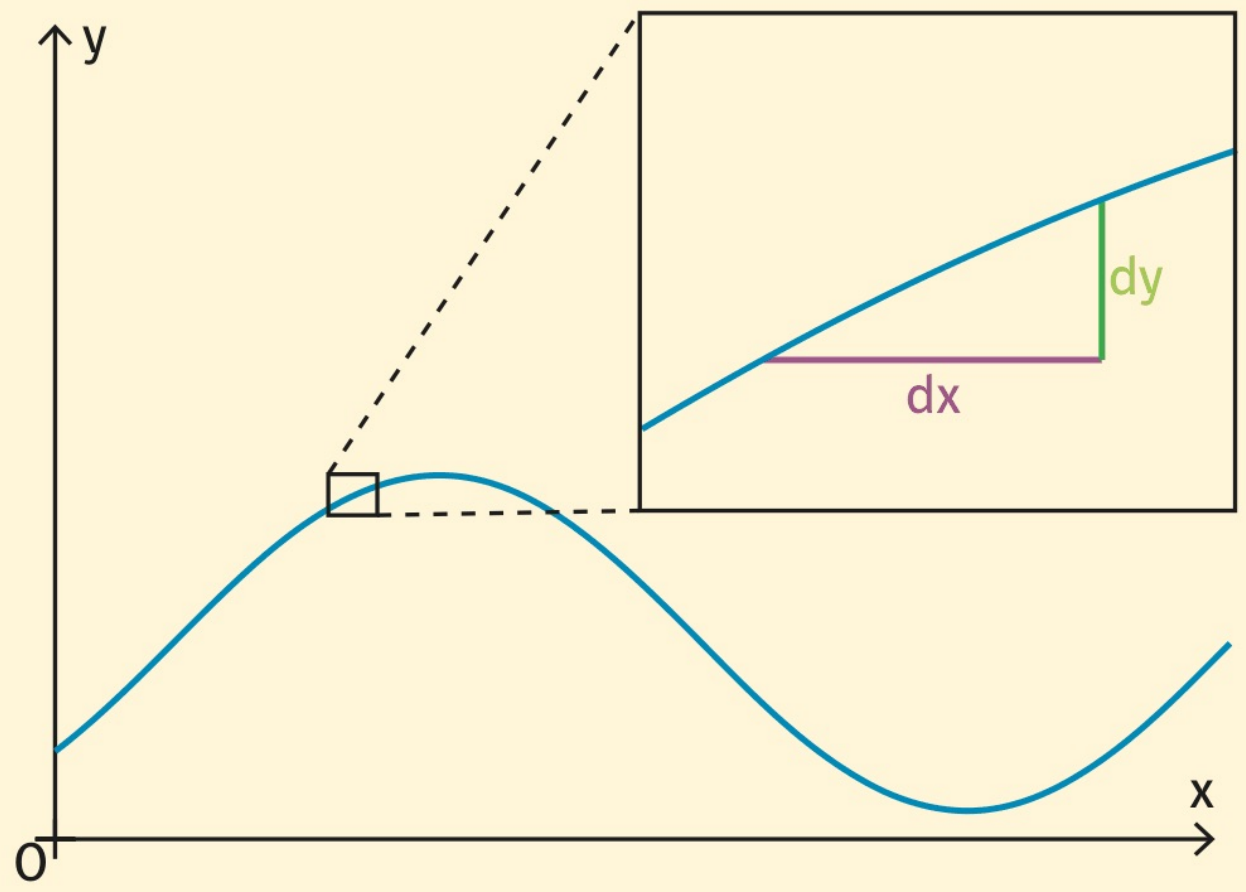
„Mir kommen morgens manchmal so viele Gedanken während einer Stunde, die ich noch im Bett liege, dass ich den ganzen Vormittag und bisweilen den ganzen Tag und länger brauche, um sie klar zu Papier zu bringen.“
Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz ging bei der Lösung des Tangentenproblems ähnlich wie Newton vor, benutzte aber eine dem Problem besser angepasste Schreibweise.
Im Falle der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ etwa bezeichnete er den Zuwachs von x mit dx und bestimmte damit den Zuwachs dy von y wie folgt:
$dy = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2 - x^2 = 2x \cdot dx + (dx)^2$.
Indem er nun $(dx)^2$ vernachlässigte („weil es im Vergleich zu den restlichen Größen unendlich viel kleiner ist“), erhielt er $dy = 2x \cdot dx$ und damit $\frac{dy}{dx} = 2x$.
Für die verschwindend kleinen Größendifferenzen dx und dy führte Leibniz den Begriff „Differentiale“ ein. Den „Quotienten“ $\frac{dy}{dx}$ nannte Leibniz entsprechend Differentialquotient.
Da dieser „Quotient“ der Differentiale kein Quotient im üblichen Sinne ist, wird er „dy nach dx“ gelesen und als Ganzes gesehen.
Betrachtet man die Ableitung, wie sie in diesem Kapitel eingeführt wurde, so ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ an der Stelle x_0: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, also die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Der Teilbereich der Mathematik, der sich u.a. mit Ableitungen beschäftigt, wird inzwischen auch **Differentialrechnung** genannt.

Leibniz betrachtete den Differentialquotienten nun geometrisch und beschrieb ihn mithilfe von verschwindend kleinen Dreiecken (heute würde man von Steigungsdreiecken sprechen). Die Ableitung ergibt sich dann über den Quotienten der Kathetenlängen dieser verschwindend kleinen Dreiecke, also der Differentiale $\frac{dy}{dx}$.

Auch wenn Leibniz noch nicht mathematisch exakt begründen konnte, wie man durch verschwindend kleine Größen dividieren soll, so konnte er doch mit dem von ihm entwickelten Ableitungsbegriff erfolgreich Probleme lösen, die zuvor nicht zugänglich waren. Hierzu nutzte er auch die in Lerneinheit 5 behandelten Ableitungsregeln, die also bereits von ihm gefunden wurden.



Zunächst wurde weder die Idee von Newton noch die von Leibniz von der Wissenschaft akzeptiert.
Berühmt wurde eine Schrift des Philosophen und Bischofs George Berkeley (1685 – 1753):
„Und was sind diese Fluxionen? Die Geschwindigkeiten von verschwindenden Zunahmen? Sie sind weder endliche Größen noch unendlich kleine Größen noch gar nichts. Sollten wir sie nicht die Geister dahingeschiedener Größen nennen?“

Nach Bischof Berkeley wurde später die Universitätsstadt von Kalifornien benannt.

Eine große Schwierigkeit lag darin, dass im 17. Jahrhundert der Grenzwertbegriff noch nicht zur Verfügung stand. Eine exakte Definition der Ableitung konnte daher weder von Newton noch von Leibniz gegeben werden, sondern nur jeweils eine mehr oder weniger anschauliche Beschreibung.

Da die damaligen Überlegungen zur Ableitung aber bereits zur Lösung von Extremwertproblemen oder zur Bestimmung von Tangenten sehr hilfreich waren, erkannte man schließlich doch die große Bedeutung der Ableitung. So kam es gegen Ende des 17. Jahrhunderts zu einem der wohl berühmtesten Prioritätenstreits in der Mathematik.

Der Konflikt schwelte zunächst für etwa ein Jahrzehnt, spitzte sich aber mit einer Antwort Leibniz' auf Newtons Veröffentlichung zu, die von Newtons Anhängern als Beleidigung angesehen wurde. Verschärft durch nationalistische Untertöne wurden dem Deutschen Leibniz 1710 aus dem britischen Umfeld Newtons heraus heftige Vorwürfe gemacht, er habe sich die Ideen von Newton aus zwei noch nicht veröffentlichten Schriften von diesem zunutze gemacht, ohne dies anzuerkennen.

Leibniz wehrte sich gegen die Vorwürfe durch einen förmlichen Einspruch. Eine von der Royal Society, deren Präsident zu dieser Zeit Newton selbst war, eingesetzte Untersuchungskommission entschied 1712 jedoch gegen Leibniz, ohne diesen überhaupt anzuhören oder auch nur anzuschreiben. Damit war Leibniz kurz vor seinem Lebensende wissenschaftlich zutiefst diskreditiert. Auf dem Kontinent sah man zwar den Schuldspruch der Kommission der Royal Society als nicht stichhaltig an; eine endgültige historische Rehabilitierung Leibniz' ergab sich aber erst 1949 durch das Bekanntwerden der mathematischen Manuskripte der Pariser Zeit (1671 – 1676) in allen Details. Hierdurch wurde deutlich, dass Newton und Leibniz ihre Entdeckungen unabhängig voneinander gemacht hatten.

Die „Royal Society" wurde 1660 in London gegründet und widmete sich der Förderung der Mathematik und der Naturwissenschaften. Von 1703 bis 1727 stand Sir Isaac Newton der Royal Society als Präsident vor.

Vermutlich wegen der einfacheren Darstellung hat sich der Formalismus von Leibniz später, vor allem unter dem Einfluss des Schweizer Mathematikers Leonhard Euler (1707 – 1783) durchgesetzt.
Euler erklärte, dass die unendlich kleinen Größen null seien, dass ihr Quotient aber durchaus einen endlichen Wert haben könne. Ihm gelang es, die Idee der Ableitung sowie deren Anwendungen maßgeblich weiterzuentwickeln.

Leonhard Euler
Leonhard Euler gehörte zu den produktivsten Mathematikern des 18. Jahrhunderts. Insgesamt gibt es 866 Publikationen von ihm. Er führte unter anderem die Schreibweise $f(x)$ für Funktionen und die Bezeichnung π für die Kreiszahl ein.



Eine genaue Definition der Ableitung konnte im 19. Jahrhundert mithilfe des inzwischen exakt gefassten Grenzwertbegriffs unter anderem von dem Franzosen Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) sowie dem deutschen Professor Karl Weierstraß (1815 – 1879) geliefert werden.

Karl Weierstraß
Karl Weierstraß war zunächst 20 Jahre lang Gymnasiallehrer in Münster, bevor er als Professor in Berlin lehrte.



1 Erstellen Sie eine Präsentation über den Prioritätenstreit zur Ableitung. Erläutern Sie hierbei auch die mit der Ableitung verbundenen Schwierigkeiten sowie die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Ansätze.

Rückblick

Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate

Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ definiert, so heißt der Quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ **Differenzenquotient** und sein Wert **mittlere Änderungsrate** von f im Intervall $[a; b]$.
Anschaulich entspricht der Wert des Differenzenquotienten $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ der Steigung der Sekante durch die Graphenpunkte $P(a \mid f(a))$ und $Q(b \mid f(b))$.

$f: x \mapsto 0{,}25x^2 + 1$

Mittlere Änderungsrate im Intervall $[-3; 0]$:

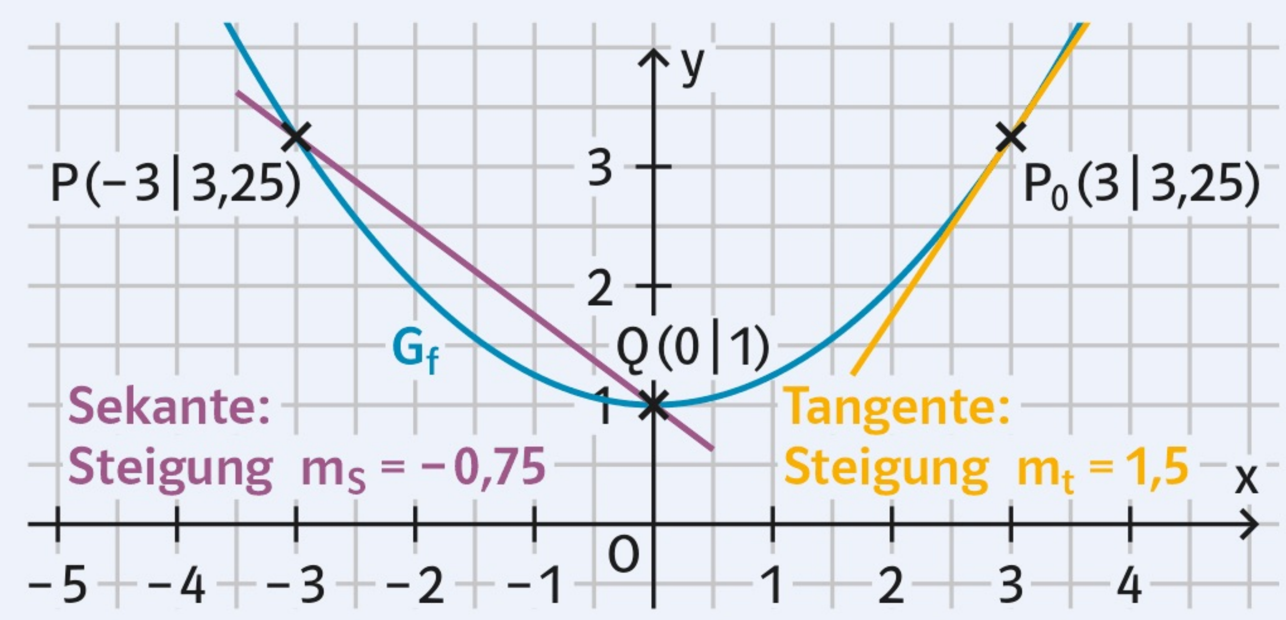
$$m_s = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{1 - 3{,}25}{3} = \frac{-2{,}25}{3} = -0{,}75$$

Differentialquotient, lokale Änderungsrate und Ableitung

Existiert für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ der mittleren Änderungsrate, dann heißt er **Differentialquotient** (oder **lokale** bzw. momentane **Änderungsrate**) von f an der Stelle x_0. Man bezeichnet den Grenzwert auch als **Ableitung** von f an der Stelle x_0 und schreibt $f'(x_0)$.
Die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ mit der Steigung $m = f'(x_0)$ heißt **Tangente** an den Graphen in P_0.
Die **Steigung des Graphen in einem Punkt** $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.

Lokale Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 3$:

$$\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{0{,}25(3 + h)^2 + 1 - 3{,}25}{h}$$
$$= \frac{0{,}25(9 + 6h + h^2) + 1 - 3{,}25}{h} = \frac{2{,}25 + 1{,}5h + 0{,}25h^2 + 1 - 3{,}25}{h}$$
$$= \frac{h(1{,}5 + 0{,}25h)}{h} = 1{,}5 + 0{,}25h$$
$$m_t = \lim_{h \to 0} (1{,}5 + 0{,}25h) = 1{,}5$$



Differenzierbarkeit

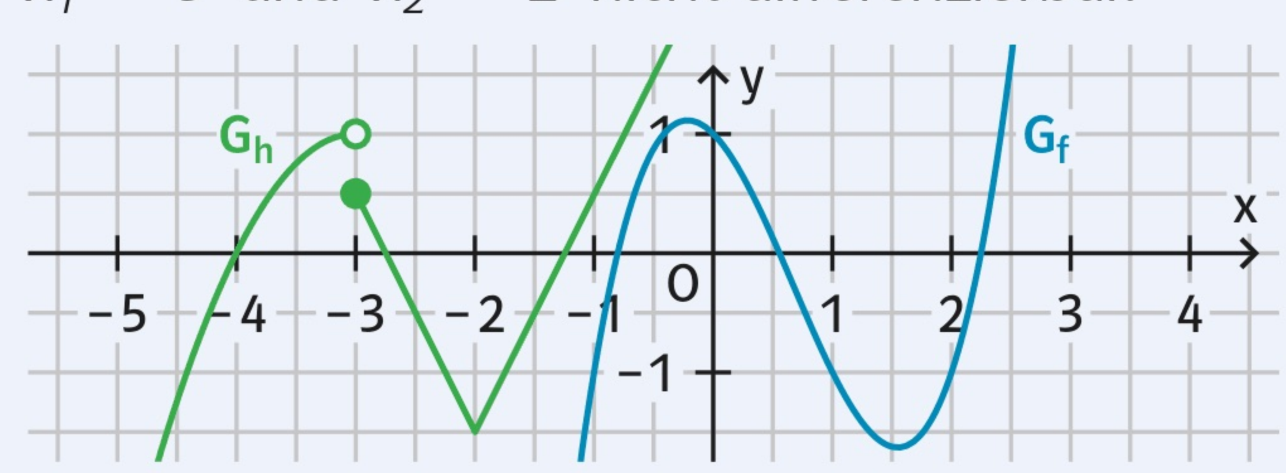
Existiert für eine Funktion f an der Stelle $x_0 \in D$ der Differentialquotient $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, so heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

Ist eine Funktion f für alle Werte x_0 aus einem Intervall I differenzierbar, so nennt man f eine in I **differenzierbare Funktion**.

Die Funktion $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Funktion

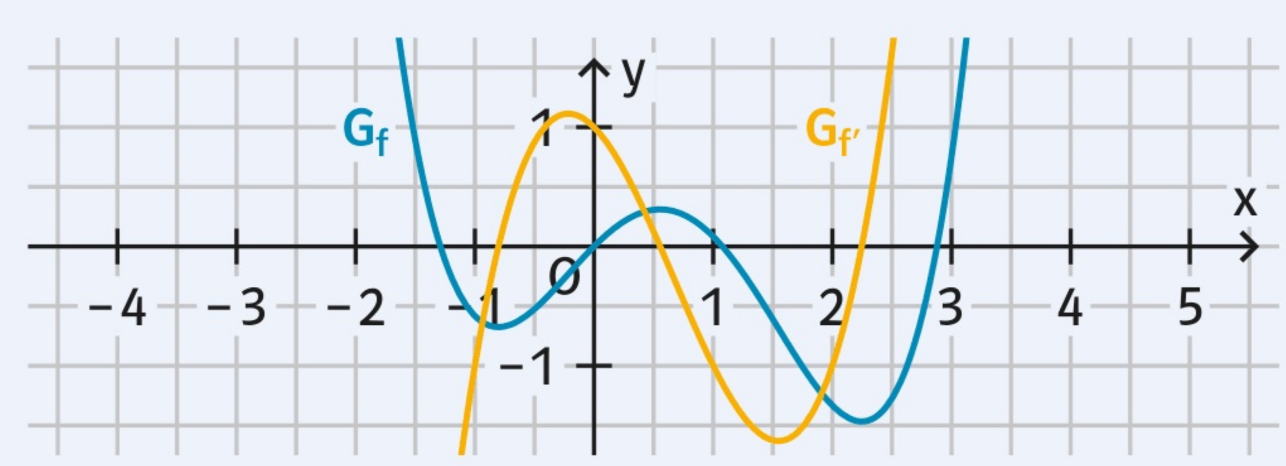
$$h: x \mapsto \begin{cases} -(x + 3)^2 + 1 & \text{für } x < -3 \\ 2|x + 2| - 1{,}5 & \text{für } x \geq -3 \end{cases} \text{ ist für}$$

$x_1 = -3$ und $x_2 = -2$ nicht differenzierbar.



Ableitungsfunktion

Ist f eine in ihrer Definitionsmenge D differenzierbare Funktion, so heißt die Funktion, die jedem $x \in D$ den Wert der Ableitung $f'(x)$ zuordnet, **Ableitungsfunktion** f' von f.



Ableitungsregeln

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so gilt:

			Beispiel
Potenzregel:	$f: x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\Rightarrow f': x \mapsto n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4,\ f'(x) = 4x^3$
Faktorregel:	$f: x \mapsto k \cdot u(x),\ k \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow f': x \mapsto k \cdot u'(x)$	$f(x) = -3 \cdot x^3,\ f'(x) = -3 \cdot 3x^2 = -9x^2$
Summenregel:	$f: x \mapsto u(x) + v(x)$	$\Rightarrow f: x \mapsto u'(x) + v'(x)$	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2,\ f'(x) = x^2 - 4x$
Konstantenregel:	$f: x \mapsto c,\ c \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow f': x \mapsto 0$	$f(x) = 5,\ f'(x) = 0$

Tangentengleichung und Steigungswinkel

Die **Tangentengleichung** der Form $y = mx + t$ der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ bestimmt man in folgenden Schritten:

1. Berechnen der Tangentensteigung mithilfe der Ableitung: $m = f'(x_0)$.
2. Einsetzen des Wertes von m und der Koordinaten von P in die Geradengleichung und Auflösen nach t.
3. Angeben der Tangentengleichung.

Für den **Steigungswinkel** α dieser Tangente gilt $\tan\alpha = f'(x_0)$.

$f(x) = x^3,\ P(2 \mid 8)$
$f'(x) = 3x^2,\ f'(2) = m = 12$
$x = 2,\ y = 8$ und $m = 12$ in $y = mx + t$:
$8 = 12 \cdot 2 + t,\ t = 8 - 24 = -16$
Tangentengleichung: $y = 12x - 16$.
Steigung: $m = 12 = \tan\alpha$.
Steigungswinkel: $\alpha \approx 85{,}2°$.

Lösungen | Seite 214

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion der Funktion f.

a) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$ **b)** $f: t \mapsto 0{,}3t^4 - 1{,}5t^2 + 2$

c) $f: z \mapsto (z - 3)(z - 5)$ **d)** $f: x \mapsto ax^3 - \frac{3}{2}a^2x$

2 Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f.

a) Bestimmen Sie den Wert des Differenzenquotienten von f im Intervall $[0; 2]$ sowie im Intervall $[-2; 1{,}5]$.

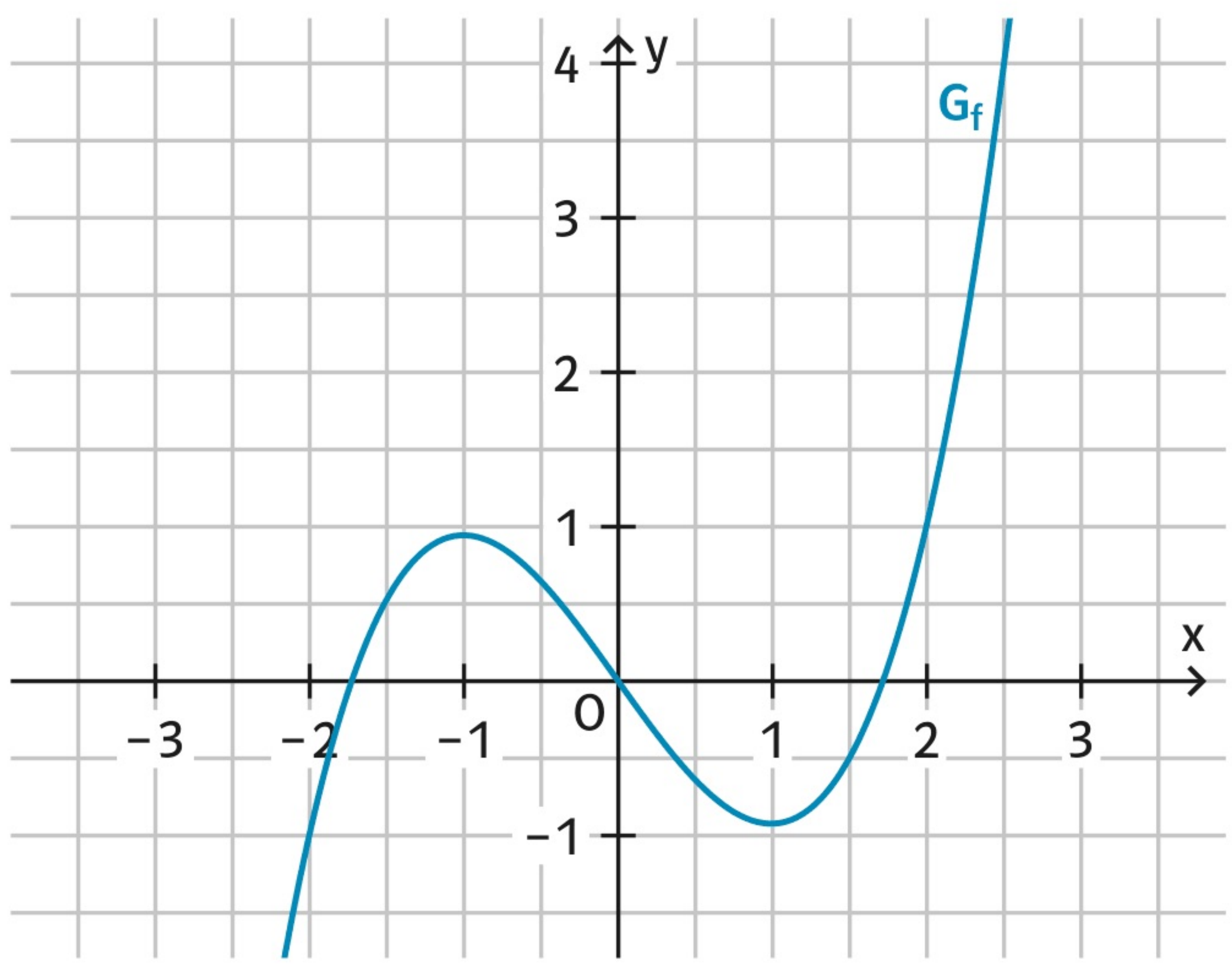
b) Beurteilen Sie die Aussagen über die zugehörige Ableitungsfunktion f′.

(1) Es gilt $f'(1) = 0$.

(2) Es gilt $f'(-2) < 0$.

(3) Der Graph von f′ verläuft zwischen $x = -0{,}5$ und $x = 0{,}5$ unterhalb der x-Achse.

(4) f′ hat mindestens zwei Nullstellen.



3 Skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$, für die gilt:
$f'(x) > 0$ für $x < -2$, $f'(x) < 0$ für $-2 < x < 2$ und $f'(x) = 0$ für $x = 2$.

4 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 4**
An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

5 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2**
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.

(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A(5\,|\,f(5))$ die x-Achse als Tangente.

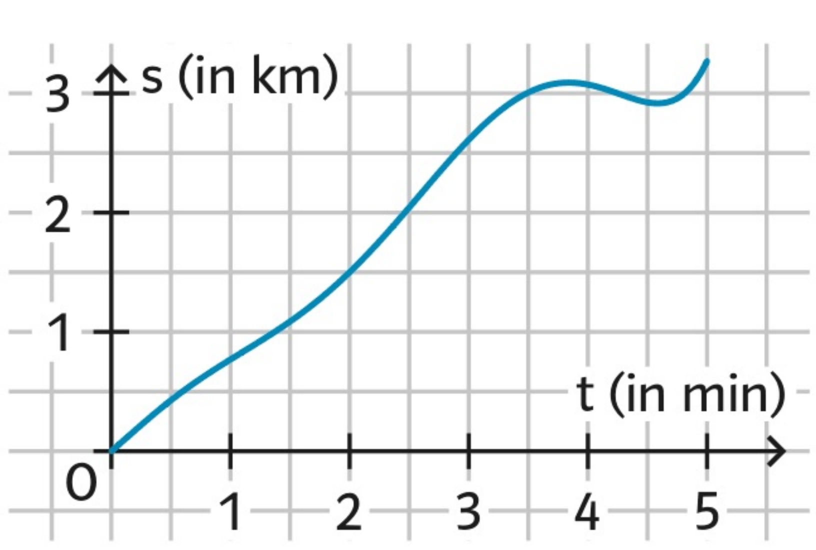
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1\,|\,f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

6 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und die Größe des Steigungswinkels des Graphen von f mit $f(x) = -2x^4 - 1{,}5x^3$ im Punkt $P(-1\,|\,f(-1))$.

7 **a)** Untersuchen Sie rechnerisch die Funktion f mit $f(x) = |x + 2| = \begin{cases} -(x + 2) & \text{für } x < -2 \\ x + 2 & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = -2$.

b) Skizzieren Sie eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, die an der Stelle $x = 4$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

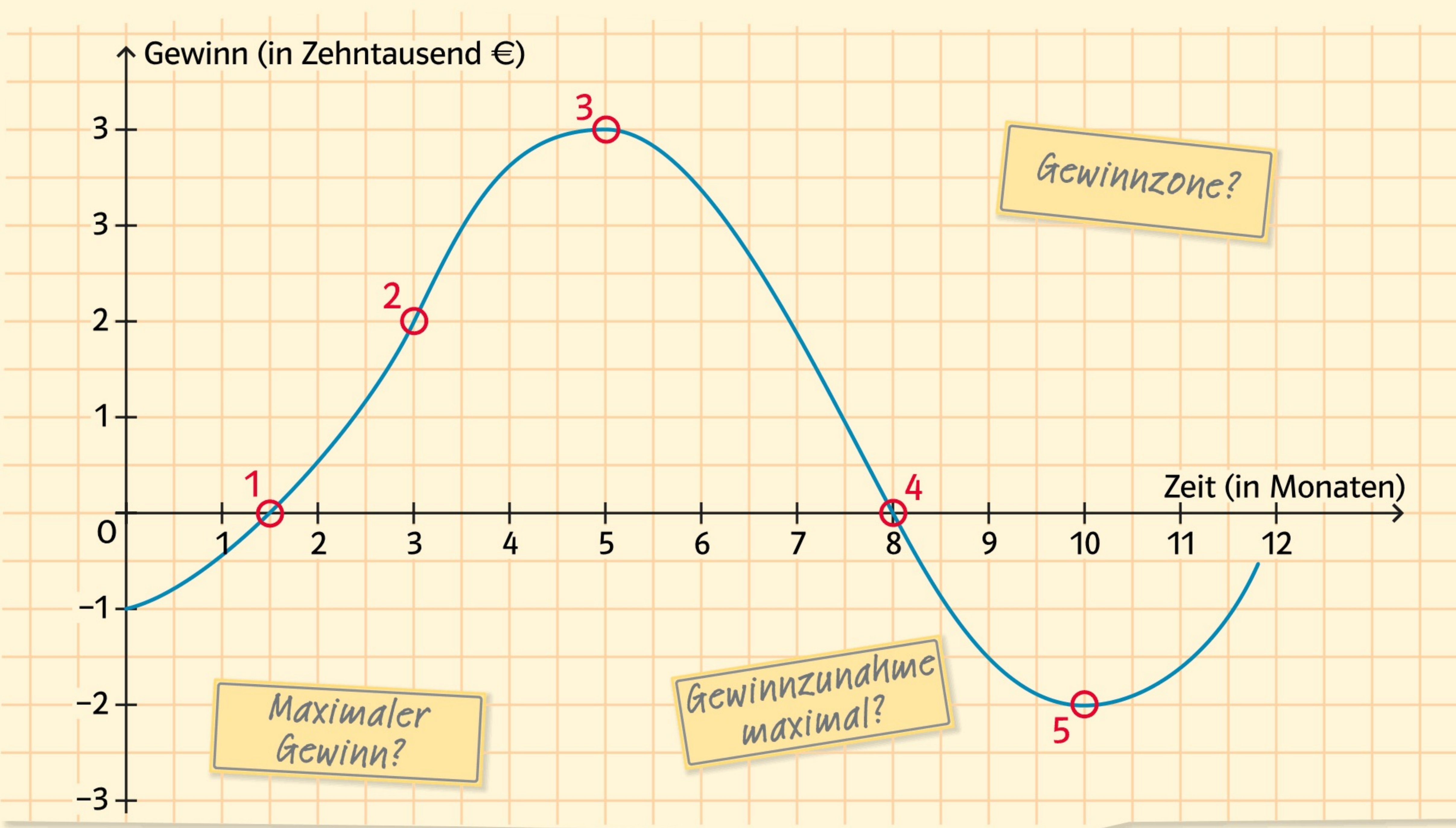
8 Der abgebildete Graph zeigt das Zeit-Weg-Diagramm einer Autofahrt durch eine geschlossene Ortschaft. Beschreiben Sie den Verlauf der Fahrt, bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit und beurteilen Sie, ob drei Minuten nach Fahrtbeginn die zulässige Höchstgeschwindigkeit von $50\frac{km}{h}$ überschritten wird.



V Anwendungen der Differentialrechnung



Ein Hochpunkt ist der höchste Punkt einer Umgebung – also ein Ort, an dem das Gefälle sich von positiv (steigend) auf negativ (fallend) ändert.



Das können Sie schon

- Nullstellen von Funktionen bestimmen
- Ableitungsregeln anwenden
- Ableitungsfunktionen grafisch bestimmen
- Graphen von Funktionen und ihrer Ableitungen zuordnen
- Gleichungen von Tangenten an den Graphen einer Funktion ermitteln

Test

Check-in zu Kapitel V Seite 194

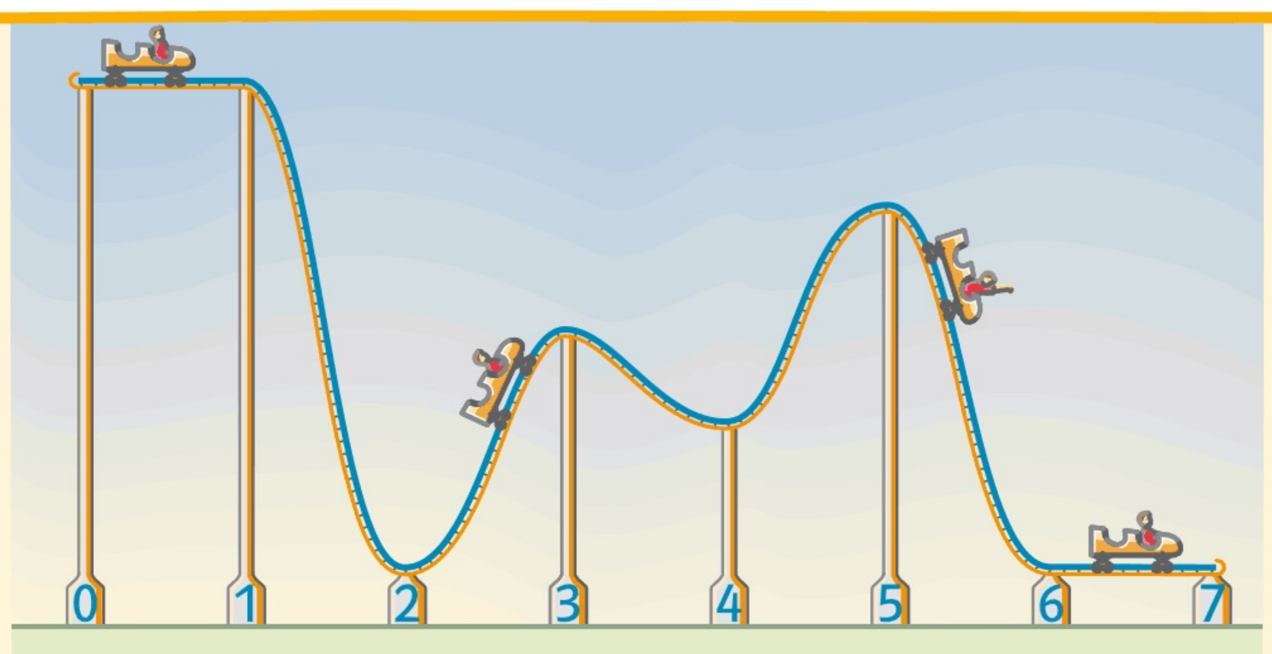


Das können Sie bald

- Funktionen auf Monotonie und Funktionsgraphen auf Krümmung untersuchen
- Die zweite Ableitung einer Funktion anwenden
- Lokale und globale Extremstellen sowie Wendestellen einer Funktion ermitteln
- Hoch- und Tiefpunkte sowie Wende- und Terrassenpunkte bestimmen und im Sachzusammenhang deuten
- Das Newton-Verfahren anwenden

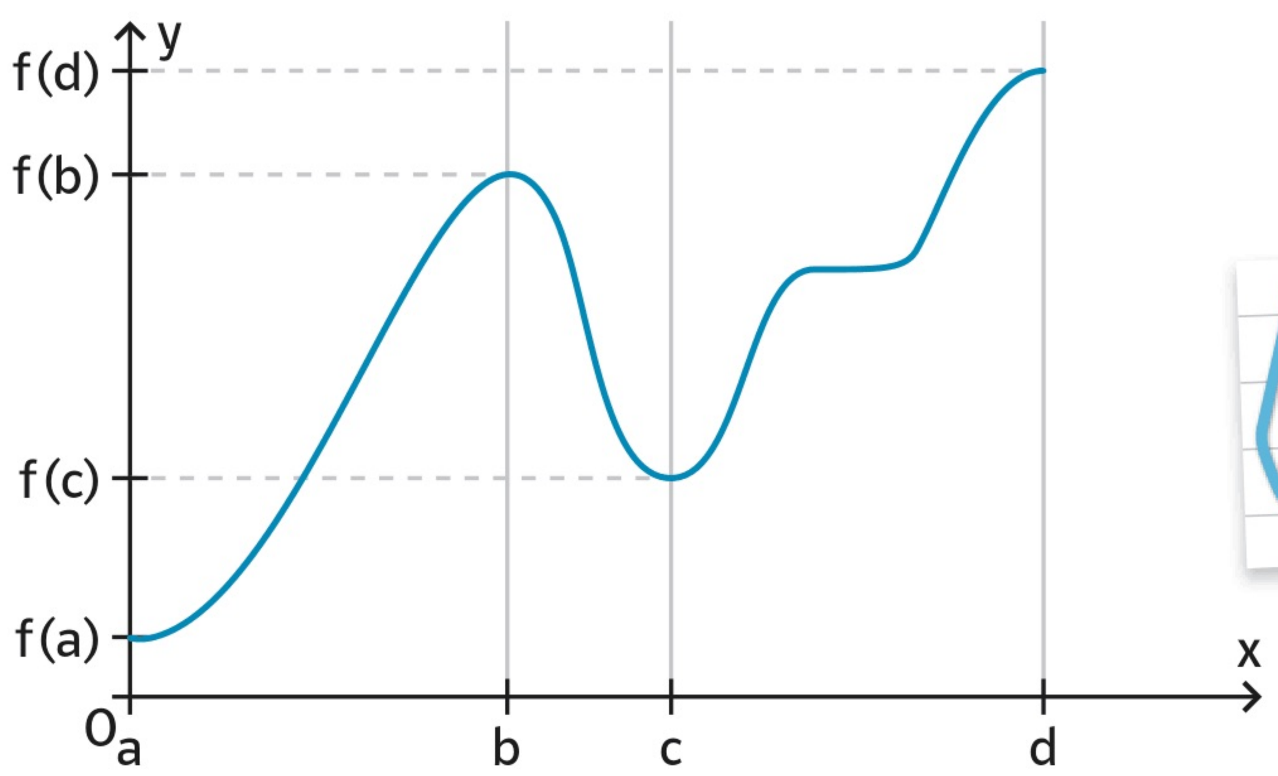
1 Erste Ableitung und Monotonie

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Achterbahn.
Beschreiben Sie für eine Fahrt mit dieser Bahn, in welchen Abschnitten man schneller bzw. langsamer wird.



Zeichnet man den Graphen einer Funktion mit einem Funktionenplotter, so findet man meist Intervalle, in denen mit größer werdenden x-Werten die zugehörigen Funktionswerte f(x) entweder zunehmen oder abnehmen.

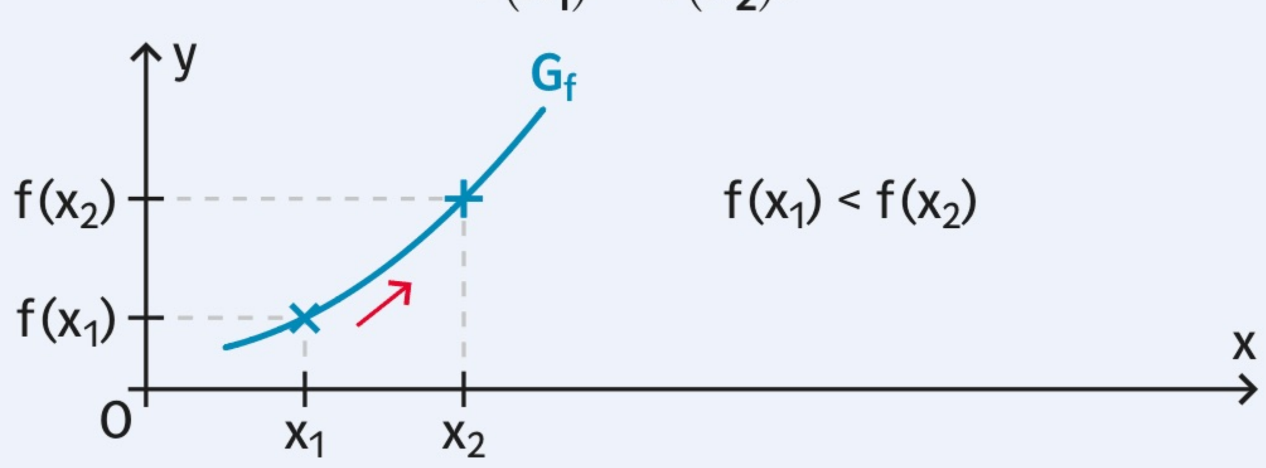
Im rechts abgebildeten Graphen erkennt man:
- Im Intervall $[a; b]$ nehmen die Funktionswerte zu.
- Im Intervall $[b; c]$ nehmen die Funktionswerte ab.
- Im Intervall $[c; d]$ nehmen die Funktionswerte zu oder sie bleiben gleich.



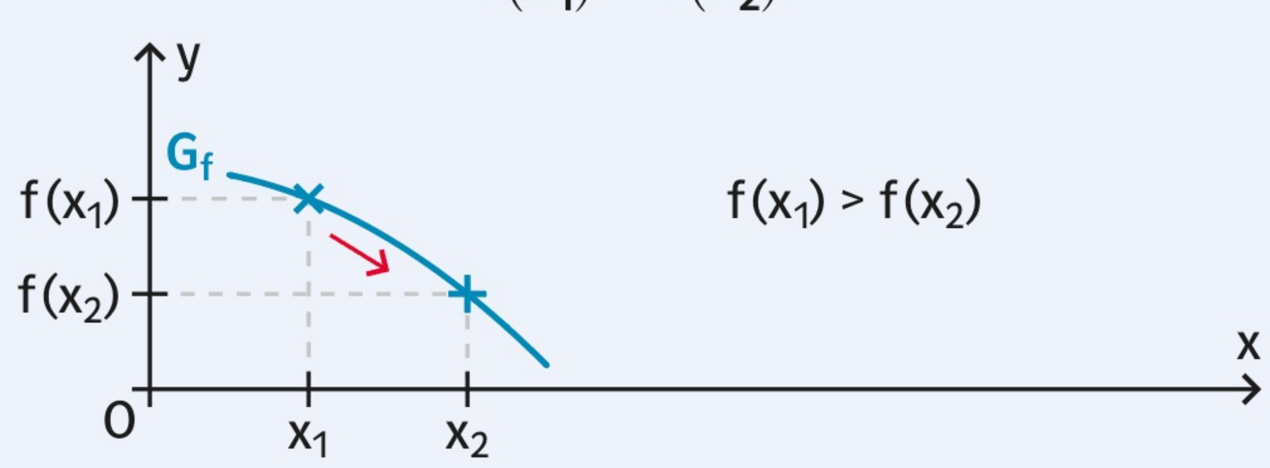
Man betrachtet einen Graphen „von links nach rechts".

Definition: Gegeben sei eine Funktion f mit der Definitionsmenge D. Betrachtet wird eine Teilmenge M der Definitionsmenge, $M \subseteq D$.
Die Funktion f heißt

streng monoton zunehmend in M,
wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$$\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}.$$



streng monoton abnehmend in M,
wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$$\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}.$$

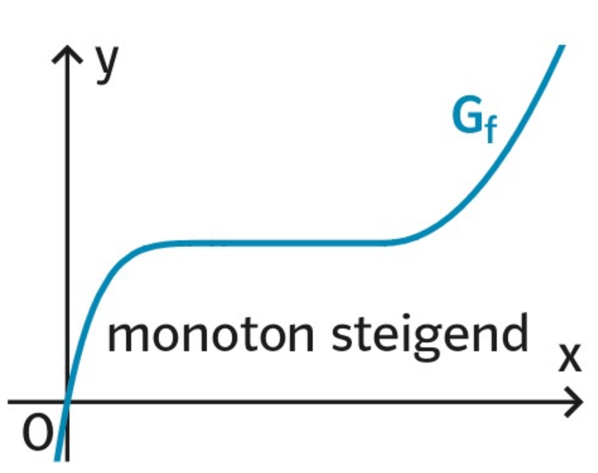


Gilt die schwächere Bedingung
$$f(x_1) \le f(x_2)$$
so heißt f **monoton zunehmend in M.**

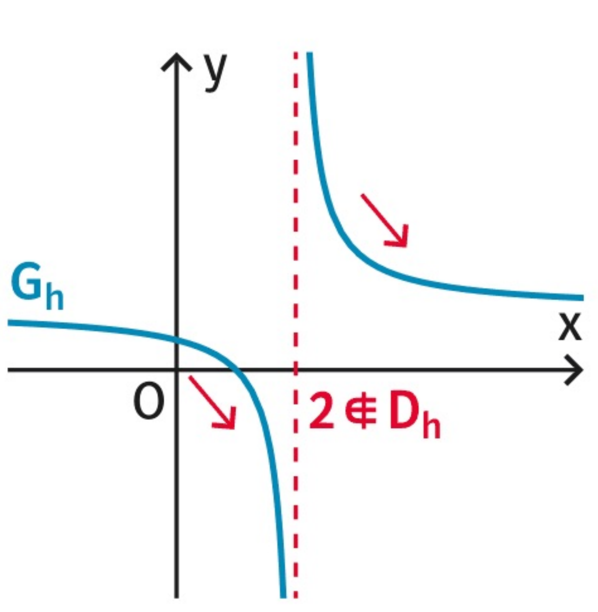
$$f(x_1) \ge f(x_2),$$
so heißt f **monoton abnehmend in M.**

Bei Graphen spricht man von
(streng) monoton steigend in M.

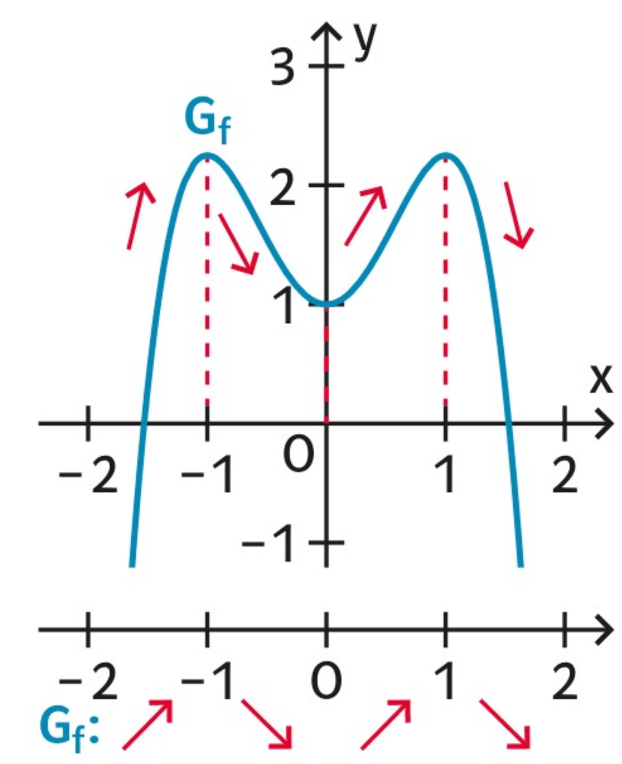
(streng) monoton fallend in M.



Bemerkungen:
Die größtmöglichen Intervalle, in denen eine Funktion streng monoton ist, nennt man **Monotonieintervalle** oder **Monotoniebereiche**.
Besitzt eine Funktion Definitionslücken, so muss die Monotonie folglich getrennt für Werte links und rechts der Definitionslücken untersucht werden. Die abgebildete Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ beispielsweise ist jeweils streng monoton abnehmend in den Teilintervallen $]-\infty; 2[$ und $]2; +\infty[$ ihrer Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, nicht jedoch als Ganzes betrachtet.
Für die ganze Funktion gilt z.B. $x_1 = 1 < x_2 = 3$, aber $f(1) < f(3)$.

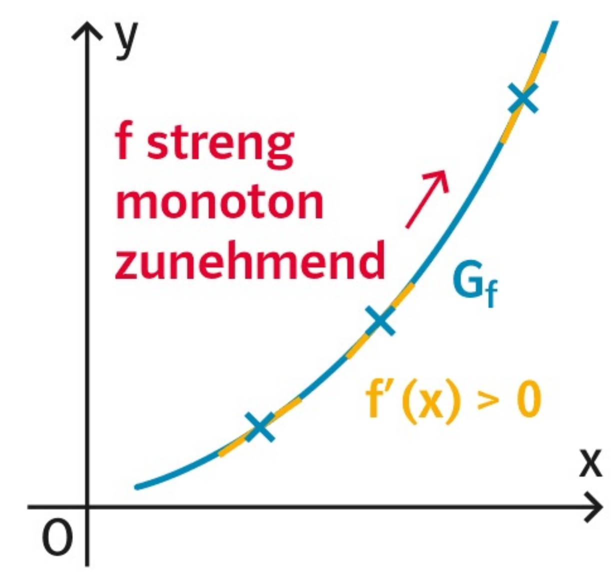


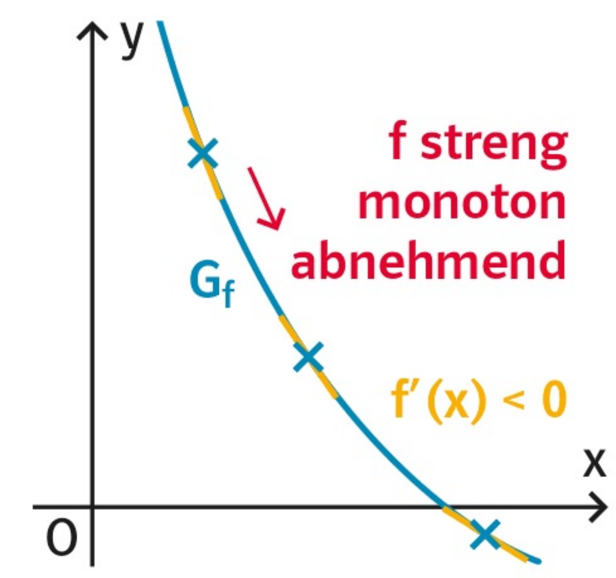
Die Monotonieintervalle lassen sich bei gegebenen Graphen näherungsweise ablesen.
Für den auf dem Rand abgebildeten Graphen einer Funktion f vierten Grades ergibt sich beispielsweise:



G_f steigt streng monoton für $x \in]-\infty; -1]$.	G_f fällt streng monoton für $x \in [-1; 0]$.	G_f steigt streng monoton für $x \in [0; 1]$.	G_f fällt streng monoton für $x \in [1; \infty[$.

Monotonie und erste Ableitung
Ist der Term einer differenzierbaren Funktion gegeben, so kann mithilfe der Ableitung dieser Funktion (auch **erste Ableitung** genannt) auf ihr Monotonieverhalten geschlossen werden.



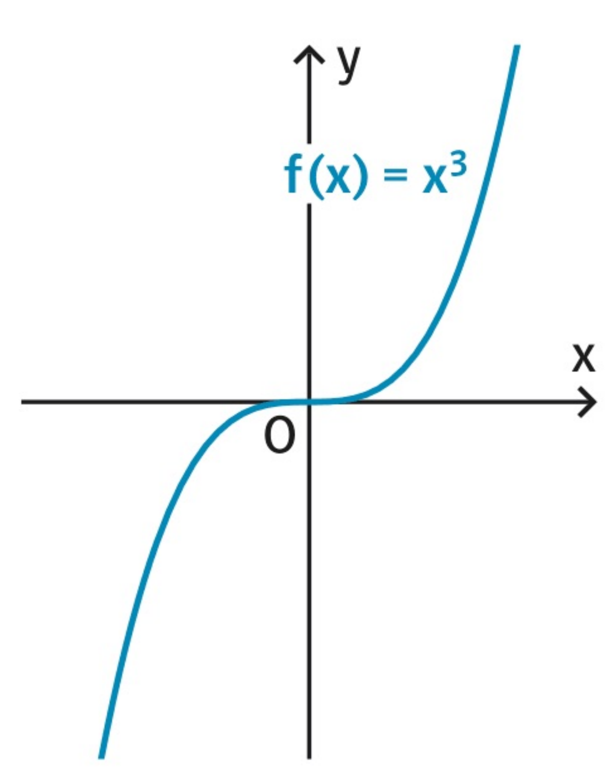


Den anschaulichen Zusammenhang zwischen der Monotonie einer Funktion f und ihrer Ableitung f′ macht das folgende Kriterium für strenge Monotonie plausibel:

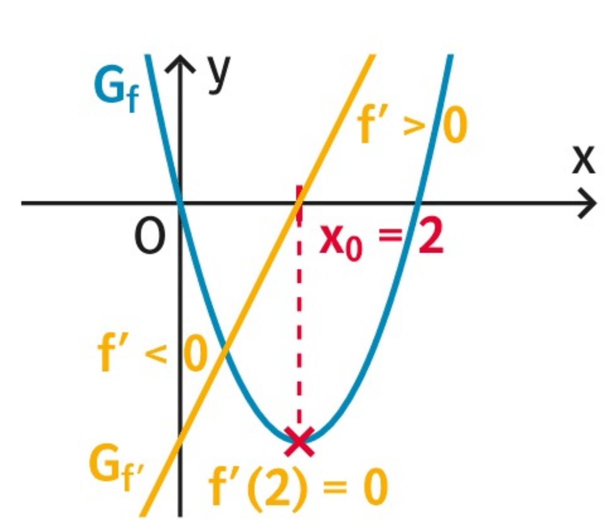
Satz (Monotoniekriterium): Die Funktion f sei in einem Intervall I differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

$\mathbf{f'(x) > 0}$,	$\mathbf{f'(x) < 0}$,
dann ist f streng monoton zunehmend in I.	dann ist f streng monoton abnehmend in I.

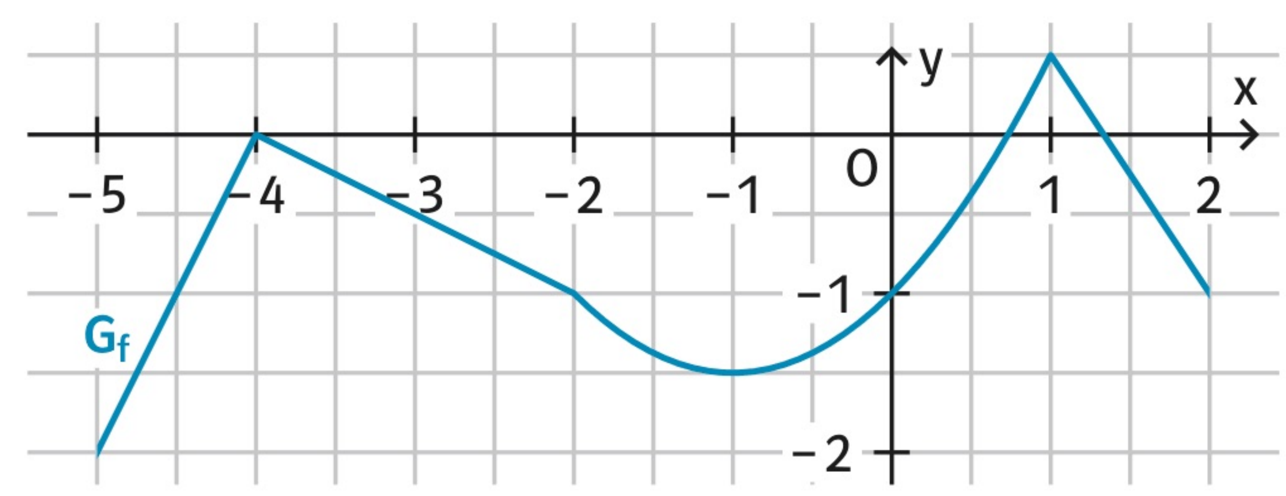
Bemerkungen:
Die Intervalle, in denen eine Funktion streng monoton zunehmend bzw. abnehmend ist, sind unter Umständen nicht identisch mit den Intervallen, in denen ihre Ableitung positive bzw. negative Werte annimmt.
Betrachtet man z. B. die Funktion $f\colon x \mapsto x^3$, deren Funktionswerte in $\mathbb{R}$ mit größer werdenden x-Werten zunehmen, so gilt nach der Definition der Monotonie, dass die Funktion f in $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend ist. Für die Stelle $x = 0$ ist aber mit $f'(0) = 0$ das Monotoniekriterium nicht erfüllt. Offenbar sind isolierte Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ auch bei strenger Monotonie von f möglich.



Betrachtet man beispielsweise die Funktion f mit
$f(x) = x^2 - 4x$ und $f'(x) = 2x - 4$,
so gilt $f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty; 2[$ und $f'(x) > 0$ für $x \in]2; \infty[$.
Aufgrund der Stetigkeit von f wird die Intervallgrenze $x_0 = 2$, an der f definiert ist, eingeschlossen. Somit ist f streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 2]$ bzw. streng monoton zunehmend für $x \in [2; \infty[$.



Beispiel 1
Der Graph einer Funktion f ist für $-5 \leq x \leq 2$ abgebildet. Entnehmen Sie dem Graphen die größtmöglichen Intervalle, in denen die Funktion streng monoton zunehmend bzw. abnehmend ist.



Lösung

In $I_1 = [-5; -4]$ ist f streng monoton zunehmend.	In $I_2 = [-4; -1]$ ist f streng monoton abnehmend.	In $I_3 = [-1; 1]$ ist f streng monoton zunehmend.	In $I_4 = [1; 2]$ ist f streng monoton abnehmend.

Beispiel 2

Ermitteln Sie rechnerisch die Monotonieintervalle der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$.

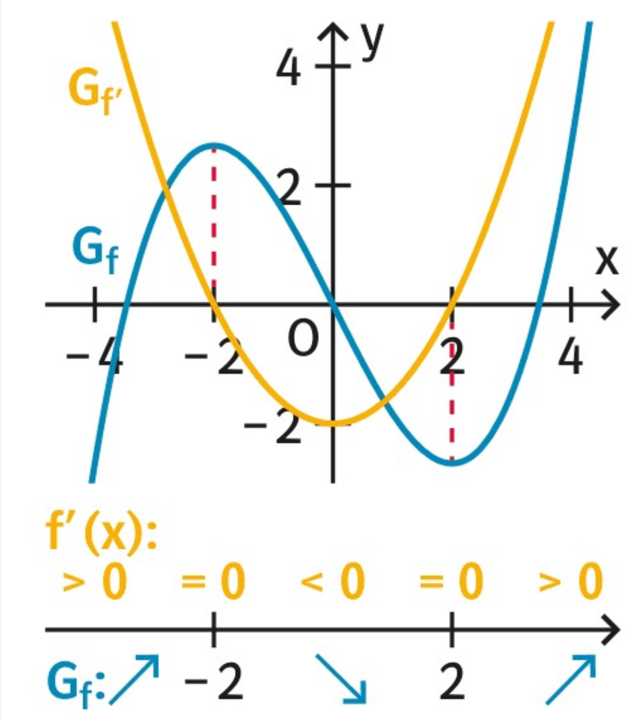
Lösung

Es ist $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 2) \Rightarrow f'(-2) = 0$ und $f'(2) = 0$.

Da $f'(x) > 0$ für $x < -2$ ist, ist f streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty; -2]$.

Da $f'(x) < 0$ für $-2 < x < 2$ ist, ist f streng monoton abnehmend für $x \in [-2; 2]$.

Da $f'(x) > 0$ für $x > 2$ ist, ist f streng monoton zunehmend für $x \in [2; \infty[$.



Aufgaben

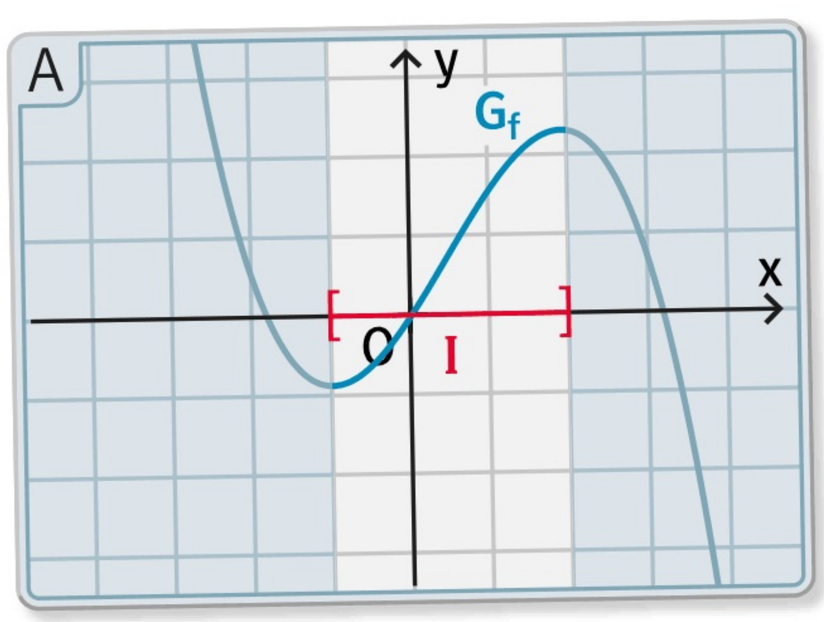
1 Ordnen Sie zu, welche Art von Monotonie im jeweiligen Intervall vorliegt.

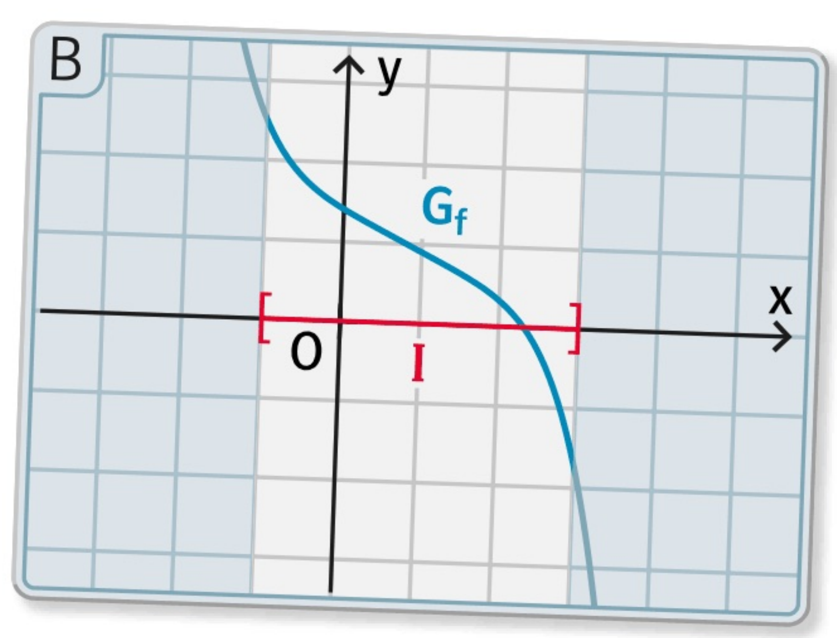
(1) f ist in I streng monoton zunehmend.

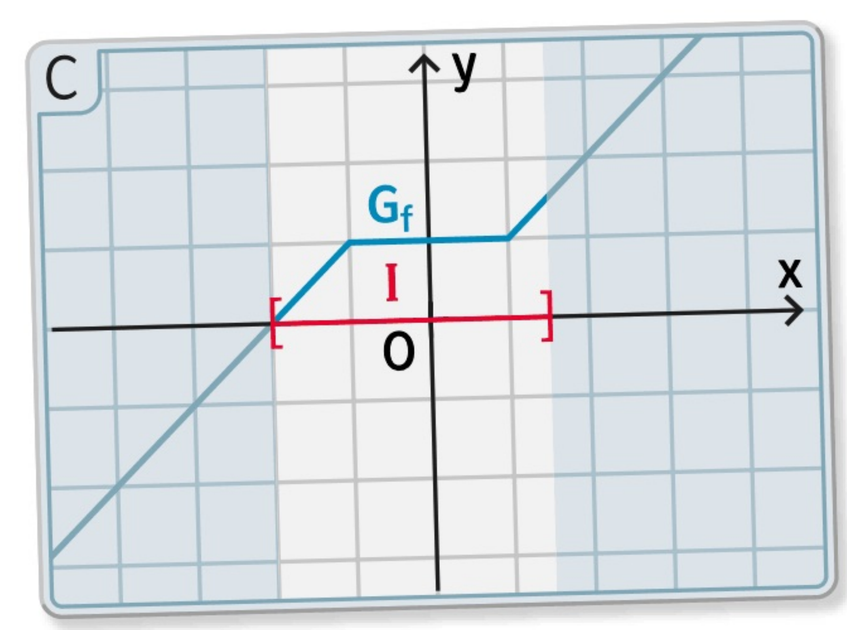
(2) f ist in I monoton abnehmend.

(3) f ist in I monoton zunehmend.

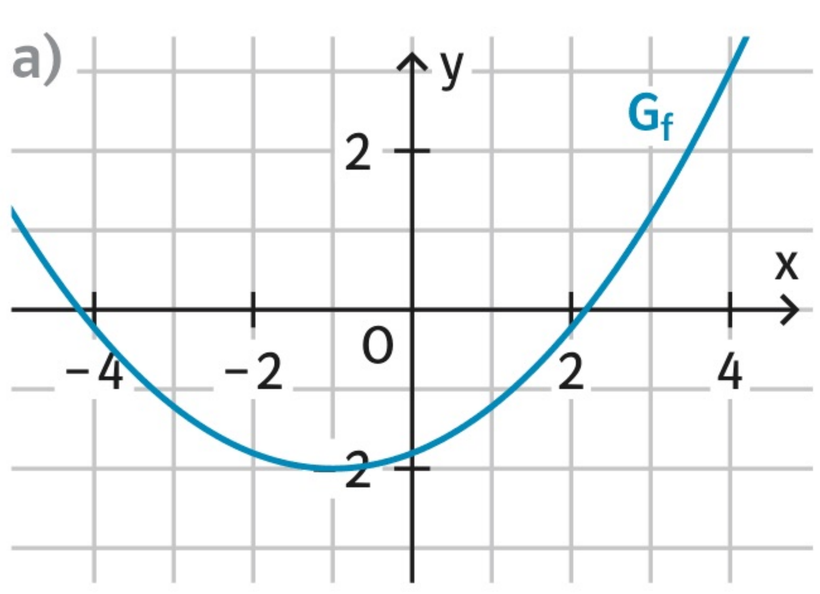
(4) f ist in I streng monoton abnehmend.

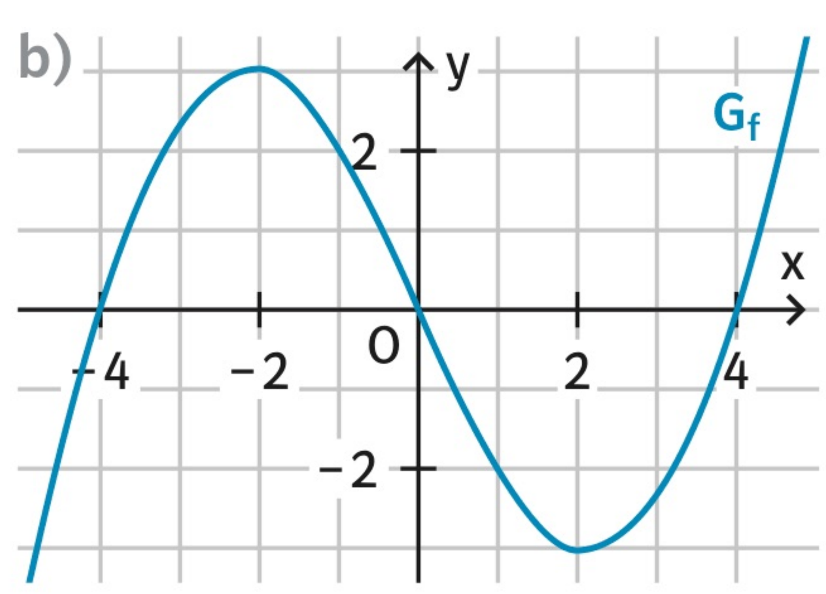


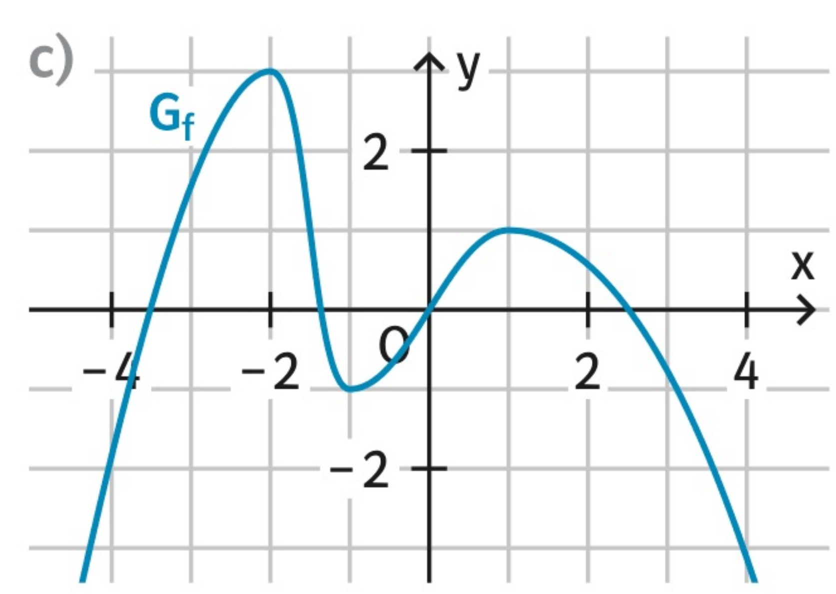




2 Geben Sie mithilfe des abgebildeten Funktionsgraphen für den Bereich $-4 \leq x \leq 4$ die Monotonieintervalle von f an.

a)


b)


c)


3 Ermitteln Sie, welche Funktion auf ℝ
a) streng monoton zunehmend ist,
b) streng monoton abnehmend ist,
c) monoton zunehmend ist,
d) monoton abnehmend ist.

$f(x) = -x^3$ $\quad g(x) = x^2 + 3$ $\quad h(x) = 3x - 2$ $\quad i(x) = 5$

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

4 Bestimmen Sie mithilfe der Ableitung das größtmögliche Intervall, in dem die Funktion f streng monoton zunehmend ist.
a) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3$ **b)** $f: x \mapsto -x^2 + 5$ **c)** $f: x \mapsto 0{,}25x - 0{,}5$ **d)** $f: x \mapsto -x^3 + 3x$

5 Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit $D = \mathbb{R}$, für die gilt:
a) f ist auf ℝ streng monoton zunehmend und die Funktionswerte von f sind negativ.
b) f ist nur für $x < -1$ und für $x > 3$ streng monoton abnehmend.
c) f ist auf ℝ streng monoton zunehmend und es gibt eine Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$.
d) Nur für $x \in]2; 4[$ ist $f'(x) < 0$.
e) f ist auf $\mathbb{R}^-$ streng monoton zunehmend und auf $\mathbb{R}^+$ nur monoton zunehmend.
f) f ist auf ℝ monoton abnehmend und im Intervall $[-2; 1]$ streng monoton abnehmend.

6 Ermitteln Sie rechnerisch die Monotonieintervalle der Funktion f und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einem Funktionenplotter.

a) $f: x \mapsto 4x + x^2$

b) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 9x + 1$

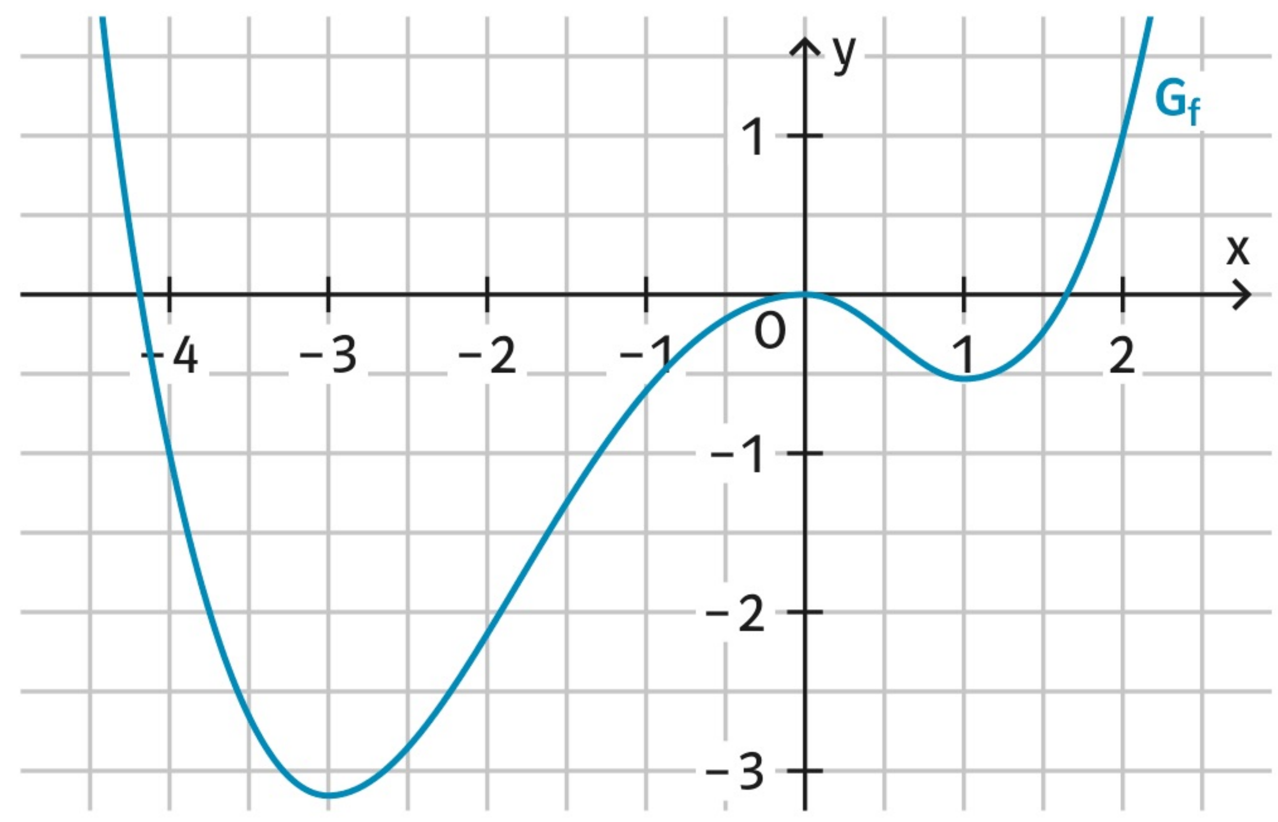
c) $f: x \mapsto \frac{1}{8}x^4 + 4x$

d) $f: x \mapsto 0{,}2x^5 - 0{,}25x^4$

Test 1

Lösungen | Seite 215

7 Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Ermitteln Sie die Monotonieintervalle von f.

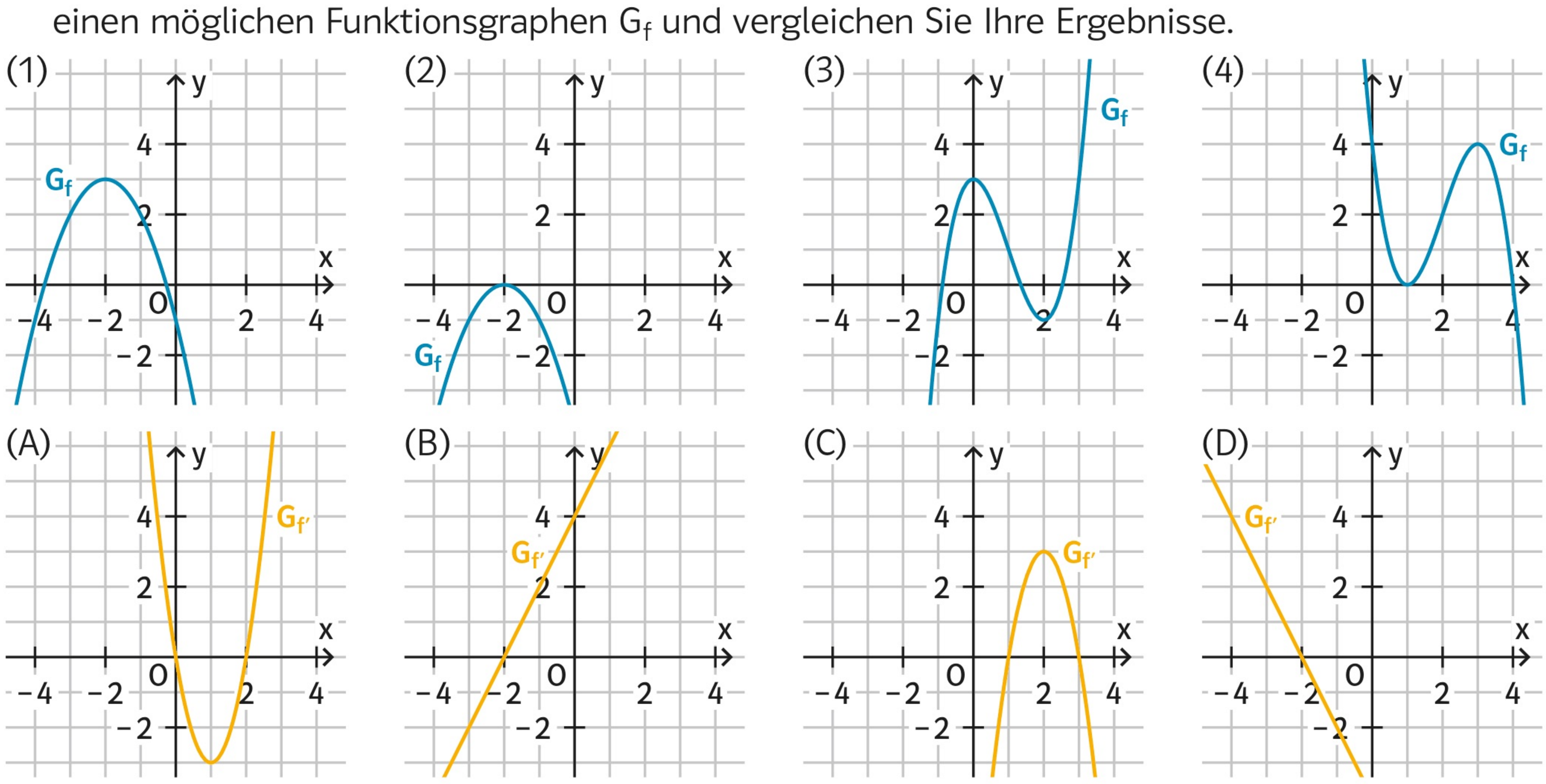


8 Bestimmen Sie rechnerisch die Monotonieintervalle der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2$.
Überprüfen Sie die Ergebnisse mit einem Funktionenplotter.

9 Gegeben sind vier Graphen ganzrationaler Funktionen.

a) Ordnen Sie jedem Funktionsgraphen G_f den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion $G_{f'}$ zu. Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Überlegungen.

b) Der Graph einer Ableitungsfunktion kann nicht zugeordnet werden. Skizzieren Sie zu diesem einen möglichen Funktionsgraphen G_f und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.



10 Gegeben ist die Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D. Skizzieren Sie den Graphen von f und bestimmen Sie damit die Monotonieintervalle.

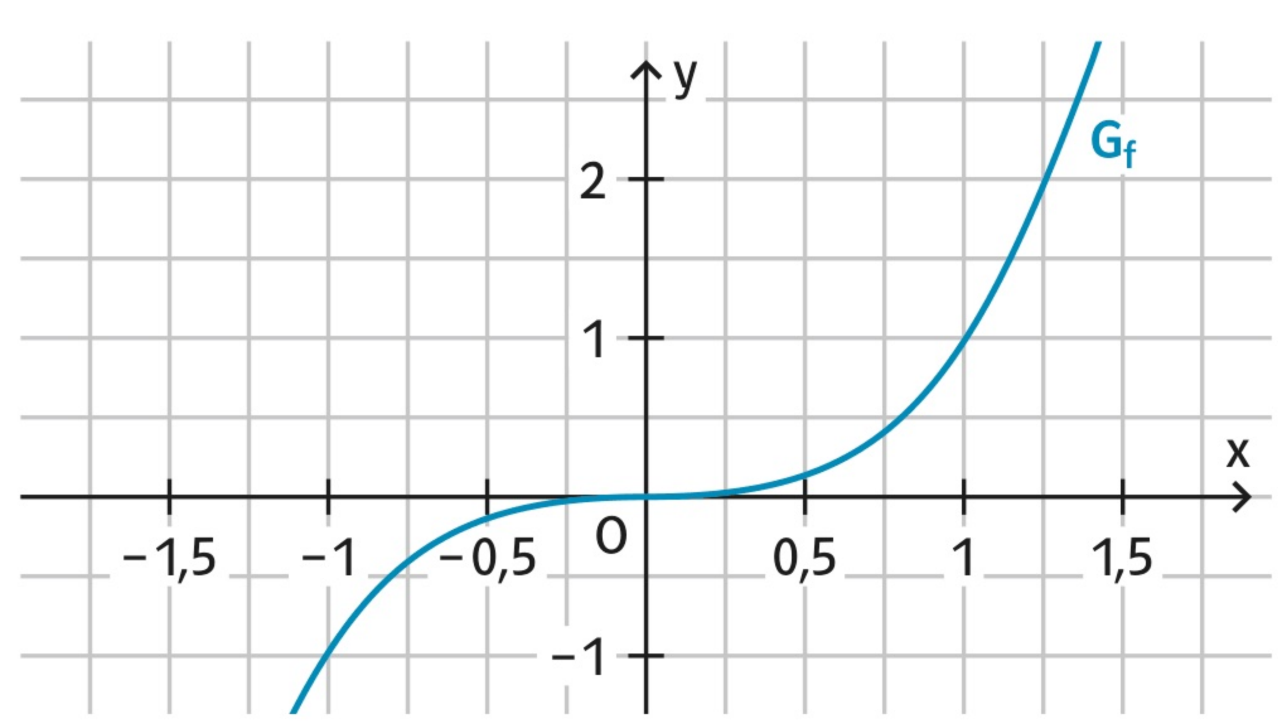
a) $f: x \mapsto \frac{1}{x} + 1$

b) $f: x \mapsto 2 - \frac{1}{x}$

c) $f: x \mapsto \frac{1}{x+2} - 1$

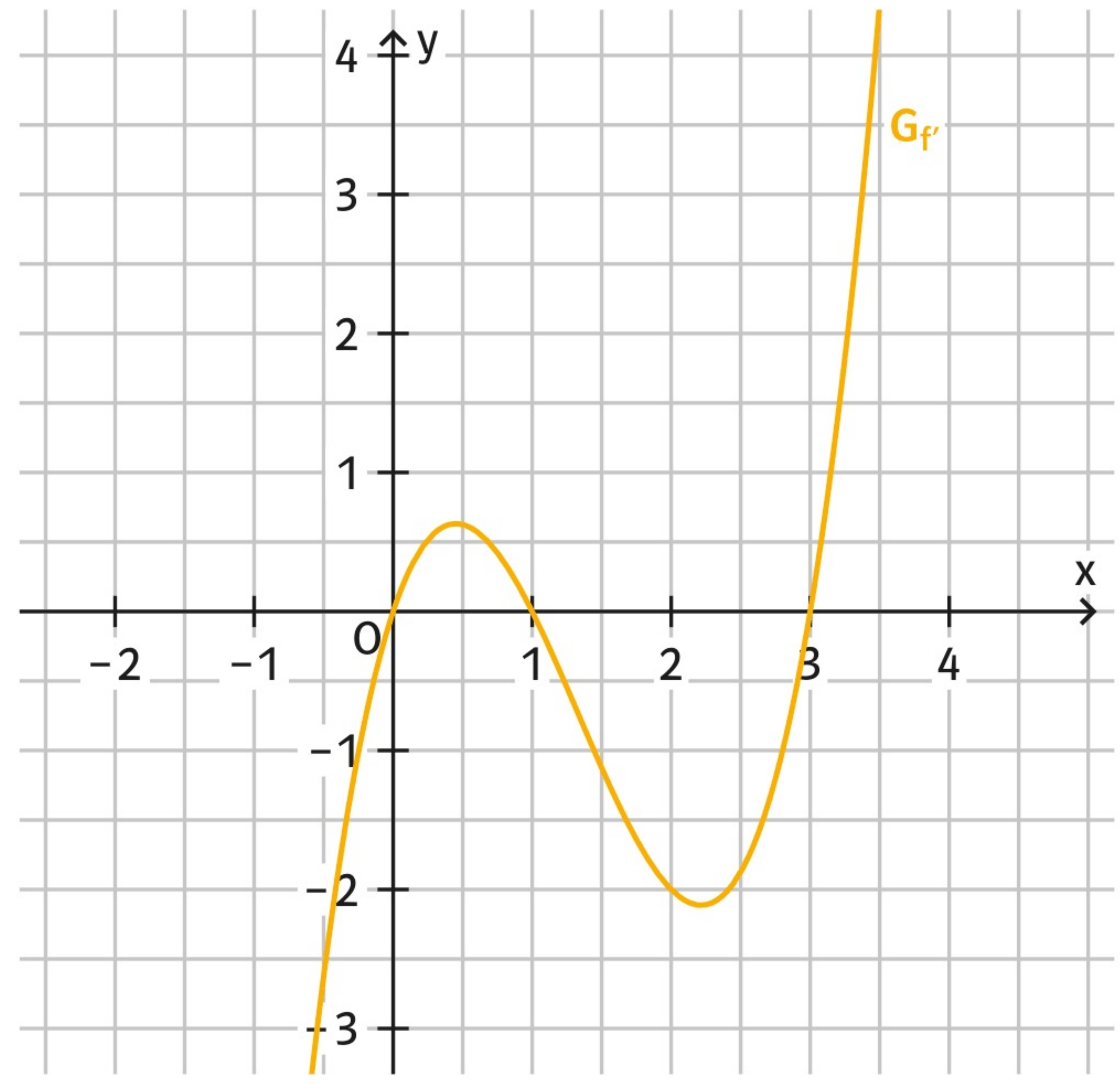
d) $f: x \mapsto \frac{1}{x^2} - 3$

11 Luisa behauptet: „Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend.“ Max entgegnet: „Nein, der abgebildete Graph verläuft doch ein ganzes Stück auf der x-Achse, also ist er nicht streng monoton.“
Beurteilen Sie die Aussagen.



12 Abgebildet ist der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Der Graph der Funktion f ist G_f. Beurteilen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

(1) G_f ist im Intervall $[0{,}5;\ 2]$ streng monoton fallend.
(2) Im Intervall $]0;\ 1[$ gilt $f(x) > 0$.
(3) Im Intervall $[0;\ 1]$ ist f streng monoton zunehmend.
(4) f ist im Intervall $[1;\ 3]$ streng monoton abnehmend.
(5) G_f ist in den Intervallen $[-0{,}5;\ 0]$ und $[3;\ 3{,}5]$ streng monoton steigend.
(6) G_f ändert im gezeigten Bereich dreimal das Monotonieverhalten.



13 Gegeben sind eine in ℝ differenzierbare Funktion f und ihre Ableitung f′. Ihre Graphen sind G_f und $G_{f'}$. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

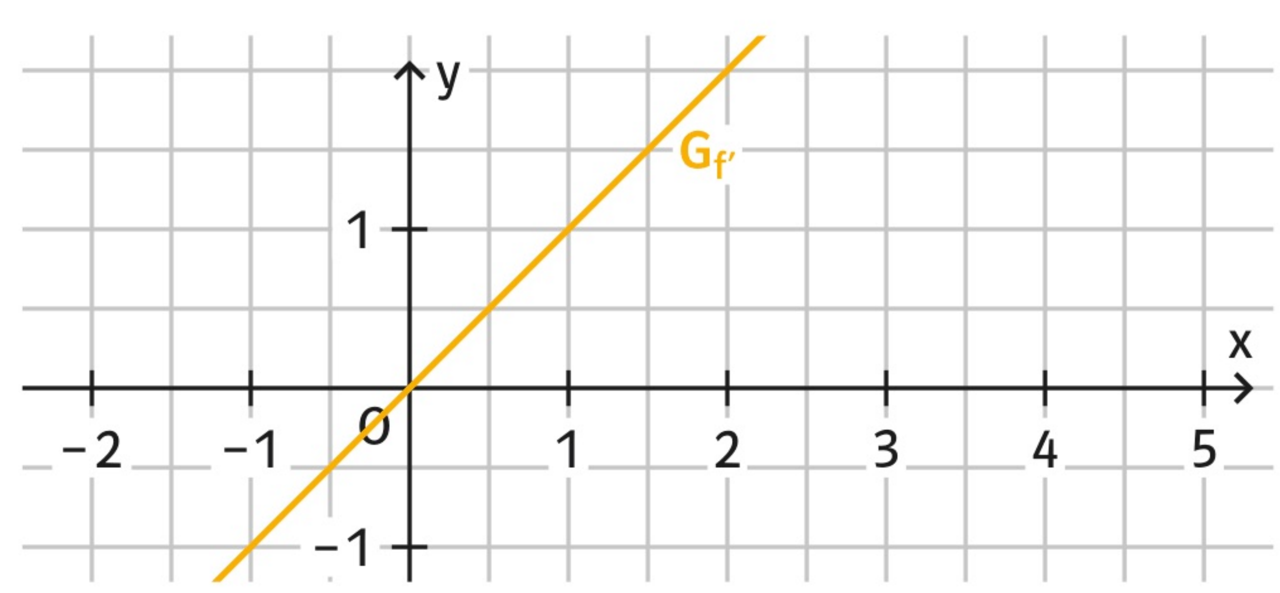
Strategie | Seite 188
Betrachten von etwas Gegenteiligem

a) Wenn $G_{f'}$ in einem Intervall I oberhalb der x-Achse verläuft, dann ist G_f in I streng monoton steigend.
b) Gilt für die Ableitungsfunktion f′ der Funktion f: $f'(x_0) = 0$ an einer Stelle $x_0 \in [-2;\ 5]$, so kann die Funktion f in diesem Intervall nicht streng monoton sein.
c) Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades besitzt höchstens drei Monotonieintervalle.
d) Wenn f′ in einem Intervall I streng monoton zunehmend ist, dann ist auch f in I streng monoton zunehmend.

Test 2

Lösungen | Seite 215

14 Gegeben ist der Graph $G_{f'}$ der ersten Ableitung f′ einer Funktion f. Der Graph der Funktion f ist G_f. Beurteilen Sie die Aussage.
a) f ist streng monoton zunehmend.
b) Wenn $f(0) = 1$ ist, so ist $f(1) > 1$.
c) Für $x \in [-1;\ 0]$ fällt G_f streng monoton.
d) f(x) kann keine negativen Werte annehmen.



15 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an, ermitteln Sie rechnerisch die Monotonieintervalle von f und skizzieren Sie grob den Verlauf des Graphen von f unter Verwendung der Ergebnisse.
a) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$　　**b)** $f(x) = 4x^2(1 - x)^2$

16 Für jedes $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ist eine Funktion f_a gegeben. Untersuchen Sie die Funktion f_a auf Monotonie. Skizzieren Sie grob den Verlauf der Graphen für $a = 1$ und $a = -1$.
a) $f_a(x) = ax^5$　　b) $f_a(x) = ax - x^2$　　c) $f_a(x) = x^3 - ax$　　d) $f_a(x) = ax^3 - ax^2$

Grundwissen Test

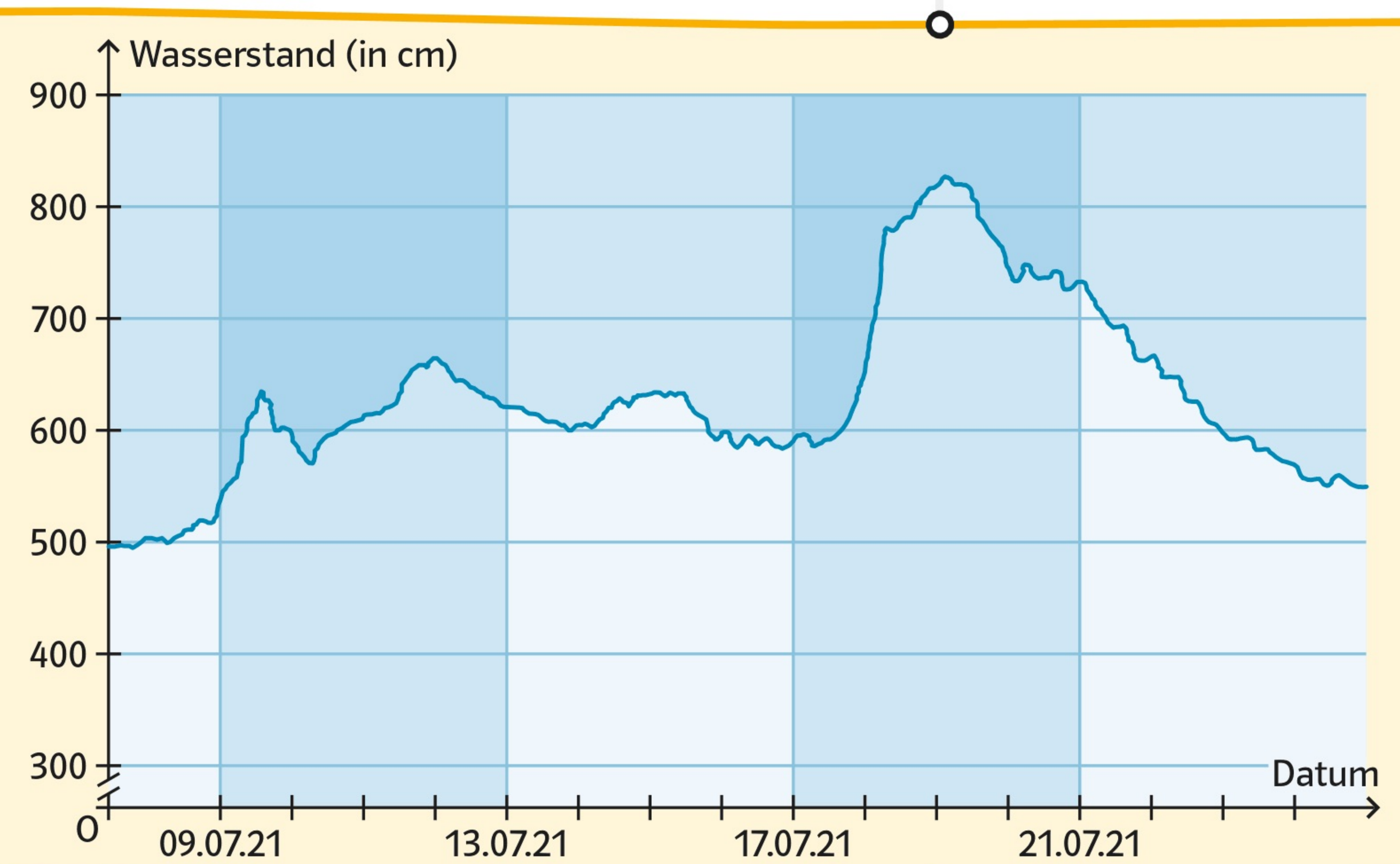
Lösungen | Seite 215

G 17 Geben Sie alle Gleichungen an, bei denen es für das Lösen sinnvoll ist, eine Potenz von x auszuklammern, und berechnen Sie deren Lösung. Bestimmen Sie anschließend die Lösung der übrigen Gleichungen.

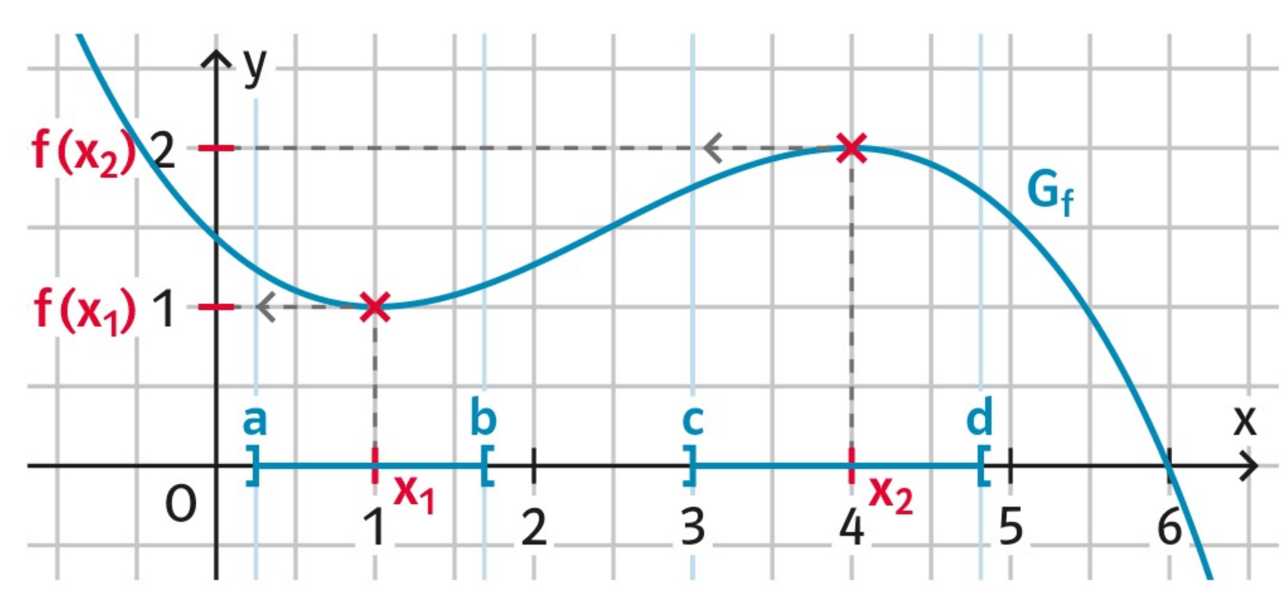
1 $-2x^2 + 8 = 0$
2 $x^3 - 2x^2 + x = 0$
3 $4x^2 - 4x = 8$
4 $5x^4 = 25x^2$
5 $3x^4 + 30x^3 = 0$
6 $x - 4x^{-1} = 0$
7 $2(3x^2 - x + 2) = 4 + x$

2 Extremstellen, Extremwerte und Extrempunkte

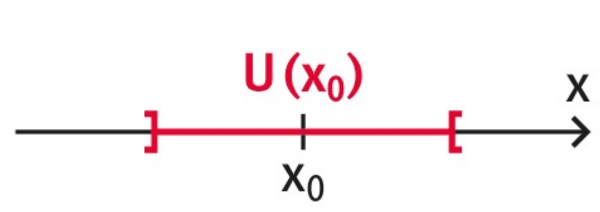
Das nebenstehende Diagramm zeigt den Wasserstand der Donau (in cm) in Passau im Juli 2021.
Wann etwa wurde der höchste Wasserstand erreicht, wann der niedrigste?
Am 9. Juli um 15 Uhr stand das Wasser kurzzeitig 634 cm hoch, 16 Stunden später waren es nur noch 566 cm, dann stieg der Pegel wieder. Wie könnte man diese beiden Wasserstände charakterisieren?



In Anwendungssituationen sind oft die Stellen einer Funktion f besonders interessant, an denen sich ihr Monotonieverhalten ändert. Abgebildet ist der Graph einer in ℝ definierten Funktion f mit $W =]-\infty; +\infty[$. Betrachtet man die ganze Definitionsmenge, so gibt es weder einen größten noch einen kleinsten Funktionswert. In einer Umgebung von x_1, beispielsweise dem Intervall $]a; b[$, hat f jedoch an der Stelle x_1 den kleinsten Funktionswert $f(x_1) = 1$, im Intervall $]c; d[$ um x_2 den größten Funktionswert $f(x_2) = 2$. Man sagt, f hat an der Stelle $x_1 = 1$ ein **lokales Minimum** und an der Stelle $x_2 = 4$ ein **lokales Maximum**.



Offene, teilweise sehr kleine Intervalle, die eine Stelle x_0 enthalten, nennt man eine **Umgebung** von x_0 und schreibt kurz $U(x_0)$.



Definition: Gegeben sei eine Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D und $x_0 \in D$.
Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt

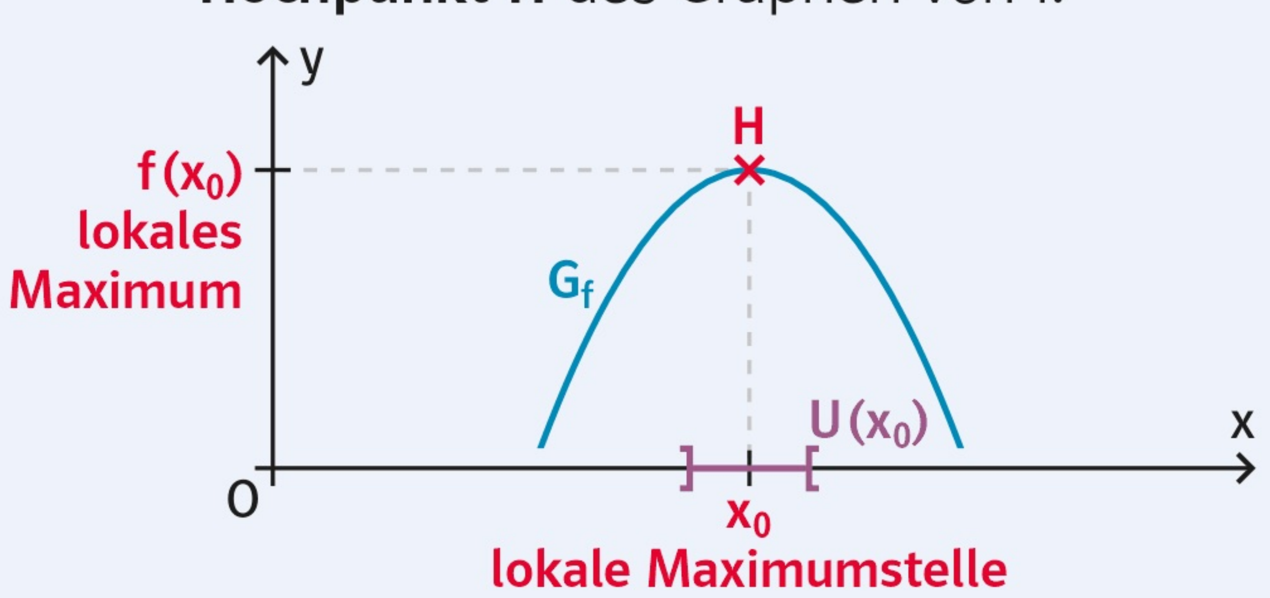
lokales Maximum von f,	**lokales Minimum** von f,

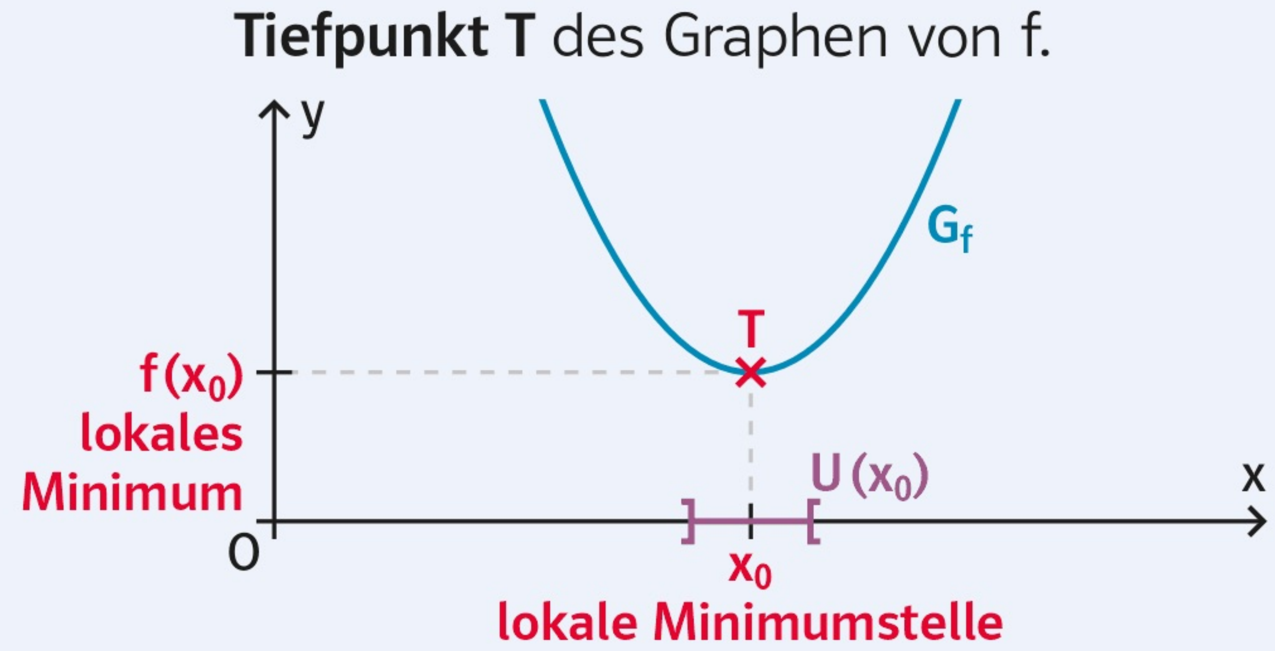
wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, sodass für alle Werte $x \in D$ mit $x \in U(x_0)$ gilt:

$\mathbf{f(x) \leq f(x_0)}$.	$\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$.

Den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ bezeichnet man in diesem Fall als

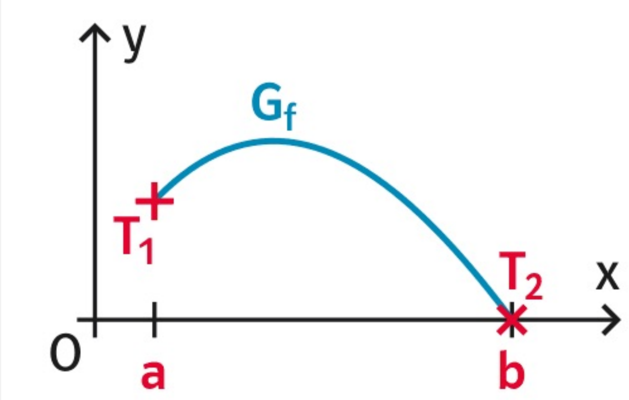
Hochpunkt H des Graphen von f.	**Tiefpunkt T** des Graphen von f.





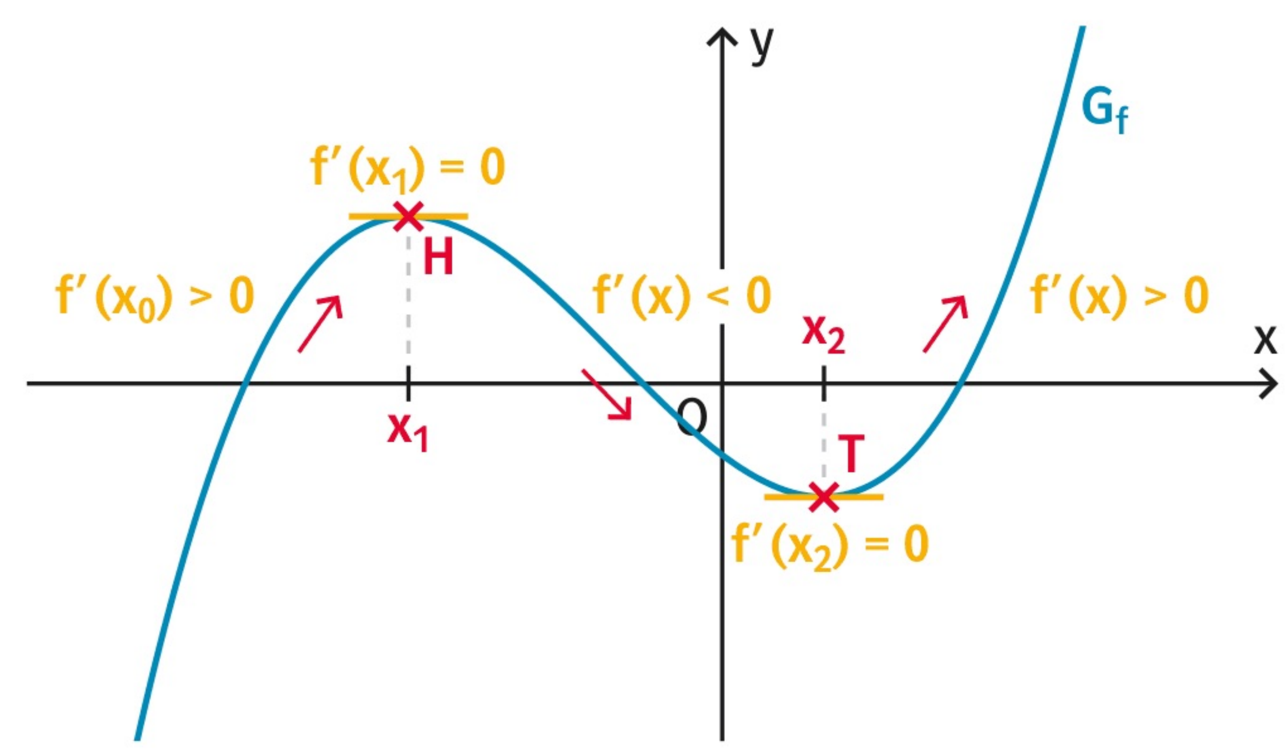
Hoch- und Tiefpunkte heißen auch **Extrempunkte**.
Eine Stelle x_0, an der eine Funktion ein Maximum oder Minimum hat, nennt man **Extremstelle**, den Funktionswert $f(x_0)$ einen **Extremwert** oder ein **Extremum**.

Gilt die Bedingung $f(x) \le f(x_0)$ bzw. $f(x) \ge f(x_0)$ für alle Werte $x \in D$, dann heißt $f(x_0)$ auch **globales Maximum** bzw. **Minimum** von f in D.



Ist die Funktion f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert, tritt auch an den Randstellen a und b der Definitionsmenge ein kleinster oder größter Funktionswert auf. Solche Extrema nennt man **Randextrema**.

Betrachtet man den Graphen einer differenzierbaren Funktion mit den Extrempunkten $H(x_1|f(x_1))$ und $T(x_2|f(x_2))$, so erkennt man, dass die Tangente an den Graphen in diesen Extrempunkten parallel zur x-Achse verläuft. Dort gilt folglich
$f'(x_1) = 0$
bzw.
$f'(x_2) = 0$.



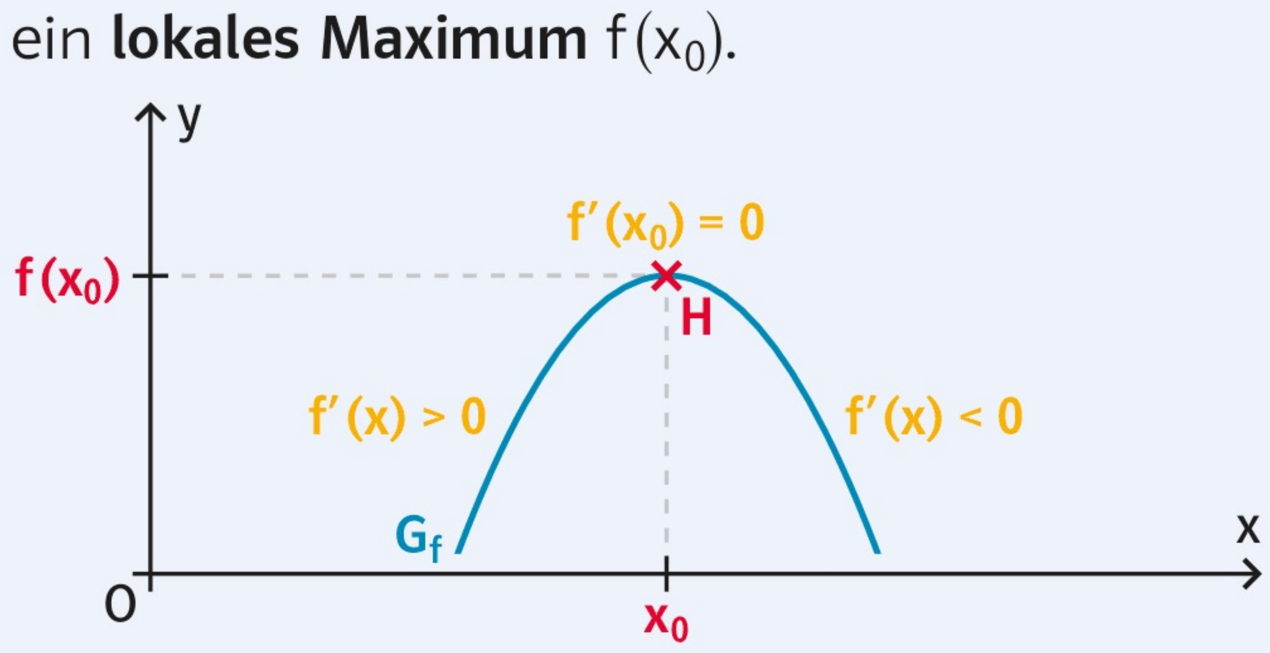
Satz: Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ differenzierbar und x_0 eine **innere Stelle** von I.
Wenn f an der Stelle x_0 ein **lokales Extremum** besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Jede Stelle eines Intervalls I, die nicht Randstelle ist, ist eine innere Stelle von I.
Somit ist für $I =]a; b[$ jede Stelle $x_0 \in I$ auch innere Stelle von I.

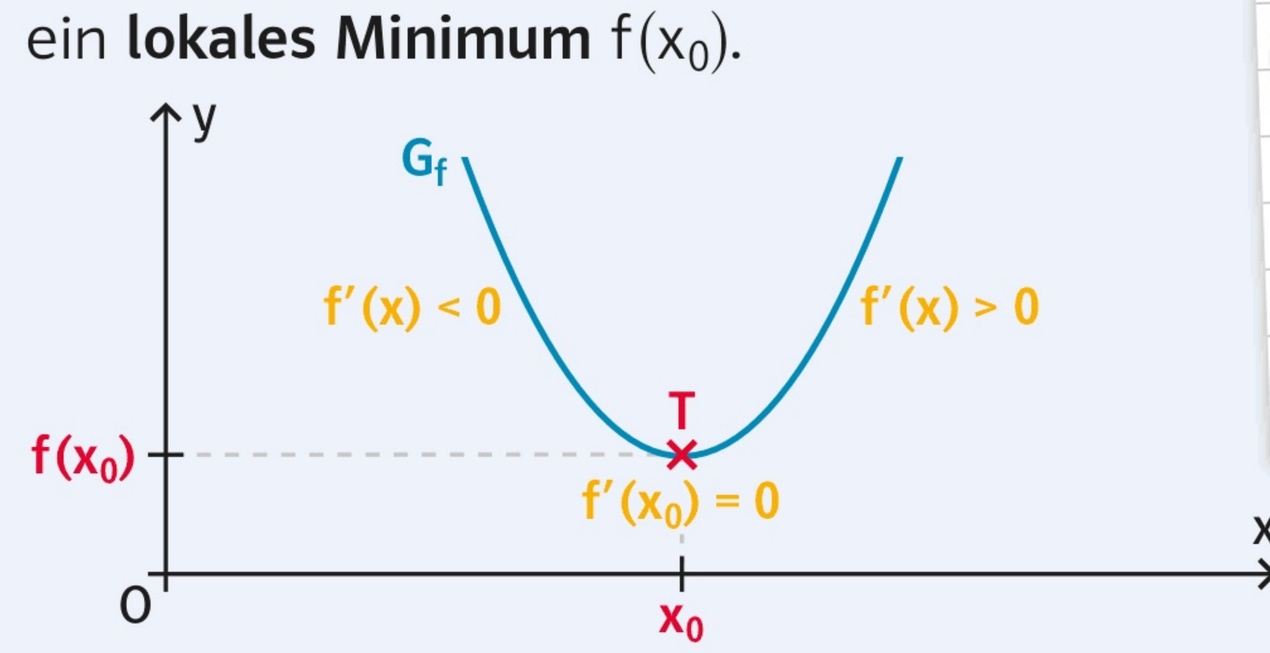
Wie man bei einer differenzierbaren Funktion mithilfe der Ableitung lokale Maxima bzw. Minima bestimmen kann, erkennt man am oben abgebildeten Graphen.
Auf ein lokales Maximum an der Stelle x_1 kann man schließen, wenn $f'(x_1) = 0$ gilt und die Funktion links von x_1 streng monoton zunehmend und rechts von x_1 streng monoton abnehmend ist. Somit ist $f'(x)$ links von x_1 größer als 0 und rechts von x_1 kleiner als 0.
Man sagt, die Ableitung f′ hat an der Stelle x_1 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW) von + nach −.
Analoge Überlegungen gelten an der Stelle x_2 für ein lokales Minimum.

Satz (Kriterium für Extremstellen): Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I.
Wenn $f'(x_0) = 0$ ist **und** f′ bei x_0 einen Vorzeichenwechsel

von + nach − hat,
dann besitzt f an der Stelle x_0
ein **lokales Maximum** $f(x_0)$.



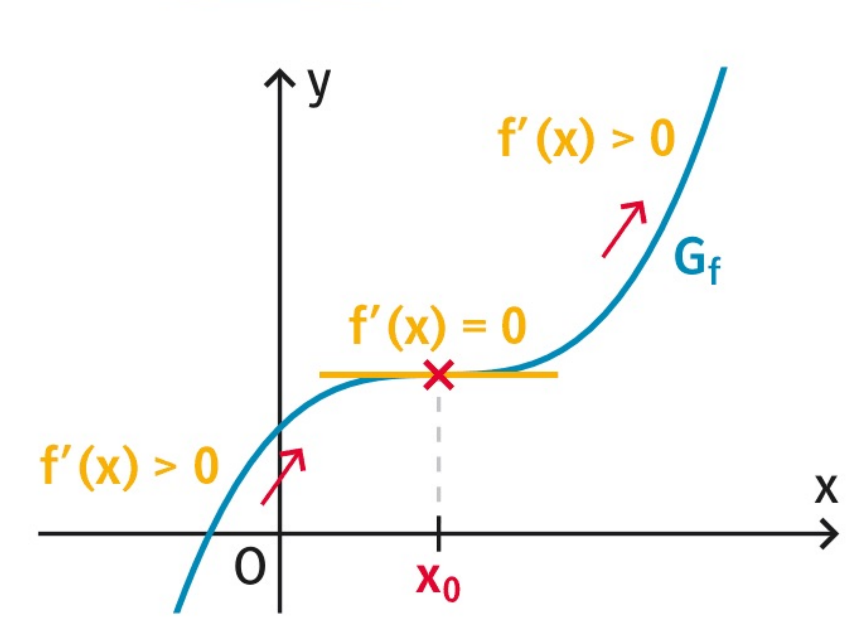
von − nach + hat,
dann besitzt f an der Stelle x_0
ein **lokales Minimum** $f(x_0)$.



$f'(x_0) = 0$ **und**
VZW von + nach −
$\Rightarrow$ lokales Maximum $f(x_0)$

$f'(x_0) = 0$ **und**
VZW von − nach +
$\Rightarrow$ lokales Minimum $f(x_0)$

Notwendige und hinreichende Bedingung
Nicht alle Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ müssen Extremstellen von f sein. Wie gezeigt, kann der Graph von f an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente besitzen, jedoch keinen Hoch- oder Tiefpunkt. Einen solchen Punkt nennt man **Terrassenpunkt** oder auch Sattelpunkt. Das Monotonieverhalten von f ändert sich dabei an der Stelle x_0 nicht.



Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist somit für eine innere lokale Extremstelle notwendig, aber nicht hinreichend. Das bedeutet, dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ beim Vorliegen einer solchen Extremstelle x_0 stets erfüllt ist **(notwendige Bedingung)**, aber nicht ausreicht, um die Extremstelle zu garantieren. Erst $f'(x_0) = 0$ und gleichzeitig der Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x_0 garantiert, dass x_0 auch tatsächlich eine Extremstelle ist **(hinreichende Bedingung)**.

Notwendige Bedingung für eine innere Extremstelle x_0: $f'(x_0) = 0$

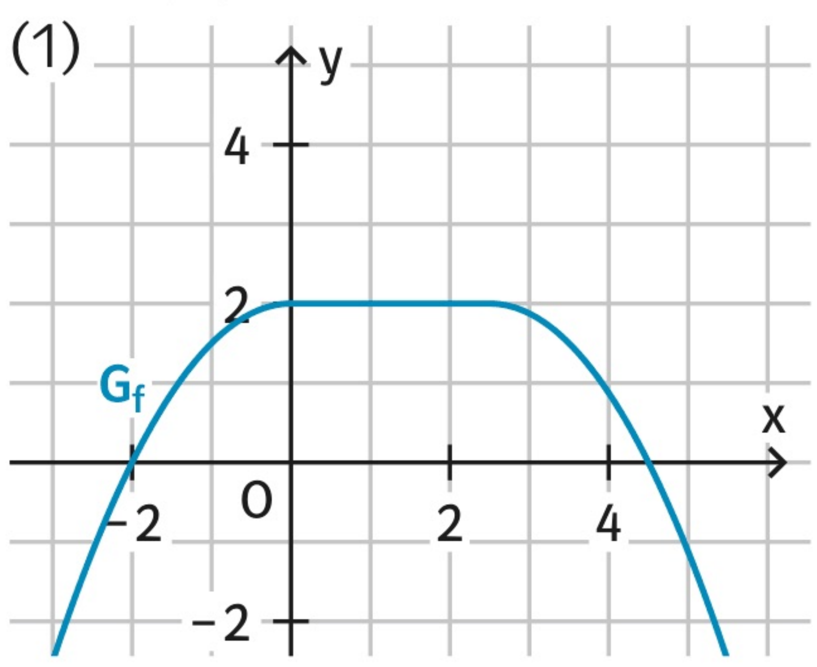
Hinreichende Bedingung für eine innere Extremstelle x_0: $f'(x_0) = 0$ **und** VZW von f' bei x_0

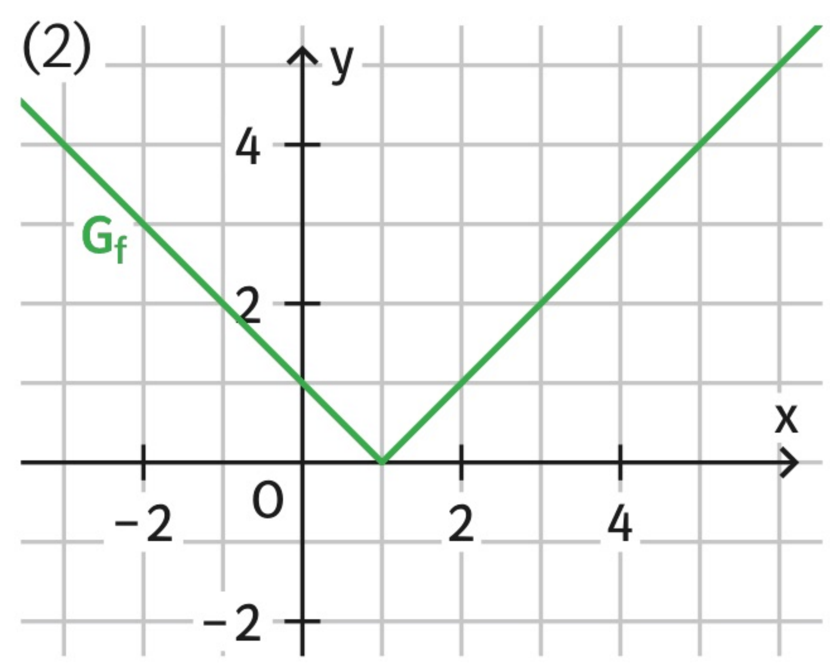
Extremstellen, bei denen die hinreichende Bedingung nicht angewendet werden kann

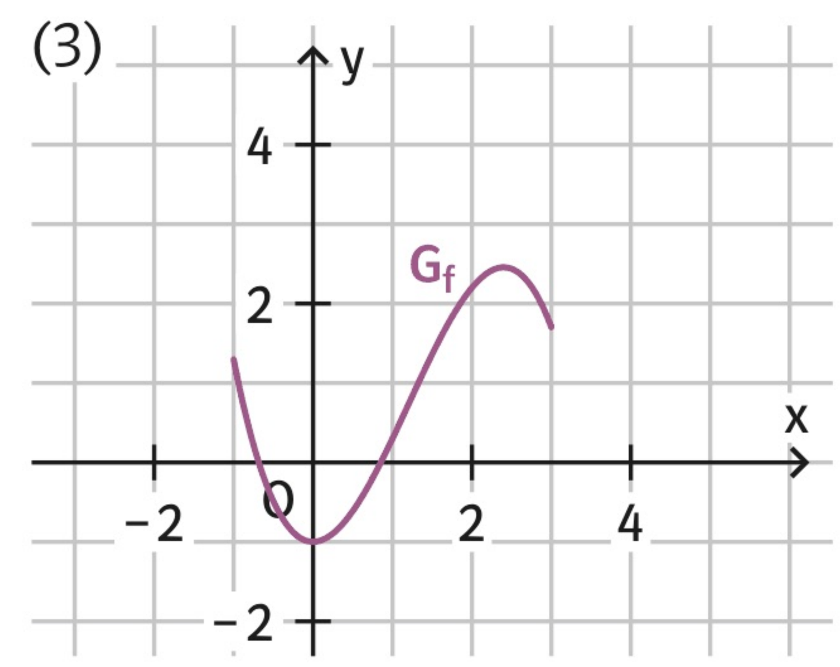
(1) Bei Funktionen, die auf einem Teilintervall konstant sind, können unendlich viele Extremstellen auftreten, bei denen f'(x) keinen Vorzeichenwechsel hat.

(2) Eine Stelle x_0, an der die Funktion f nicht differenzierbar ist, kann dennoch eine Extremstelle sein.

(3) Ist die Funktion nur in einem abgeschlossenen Intervall definiert, so müssen auch die Ränder betrachtet werden. Da es sich dabei nicht um innere Extremstellen x_0 handelt, muss $f'(x_0) = 0$ hier nicht gelten.







Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$. Ihr Graph ist G_f.

a) Ermitteln Sie die Monotonieintervalle und geben Sie die Extremstellen der Funktion f an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sowie der Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte. Skizzieren Sie den Graphen und begründen Sie, dass ein globales Extremum vorliegt.

Lösung

a) Es ist $f'(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 2$$

Untersuchung von f'(x) auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung:

		0		2	
f'(x):	< 0	= 0	< 0	= 0	> 0
G_f:	↘		↘	T	↗

Monotonieintervalle und Extrema:
f ist streng monoton abnehmend in $]-\infty; 2]$ und streng monoton zunehmend in $[2; +\infty[$.
Die Stelle $x_2 = 2$ ist somit eine Extremstelle von f.

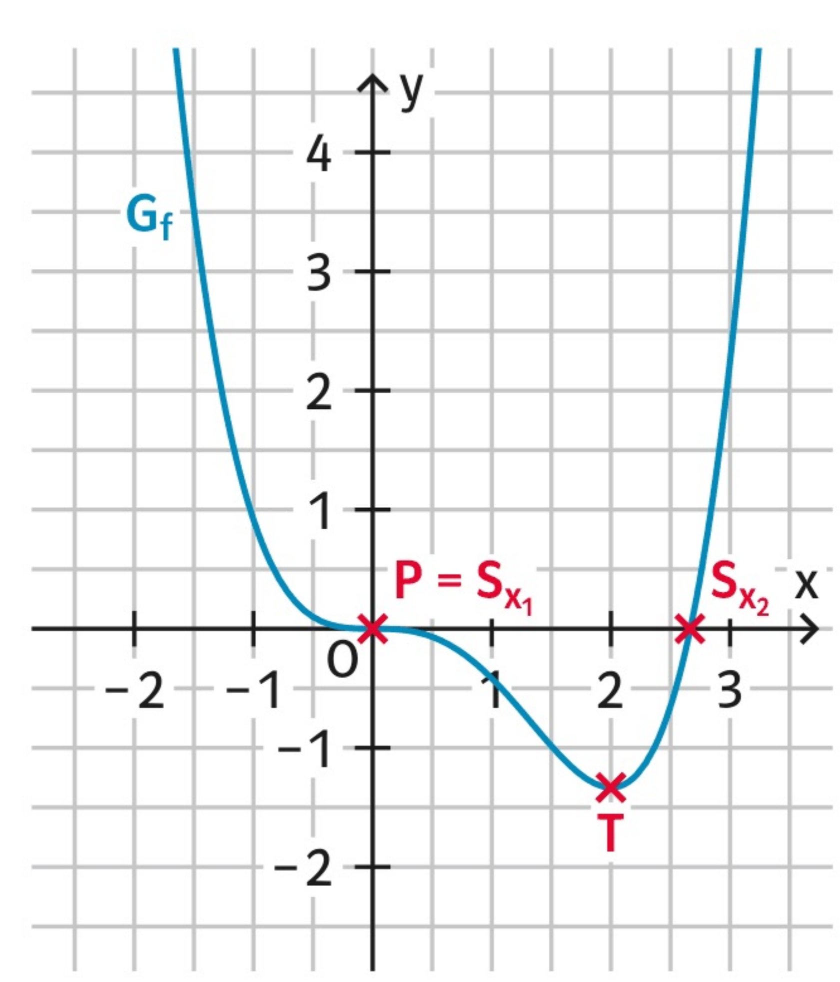
b) Aus $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 = x^3\left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}\right) = 0$ ergeben sich die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_3 = \frac{8}{3}$.

Somit schneidet G_f die x-Achse in den Punkten $S_{x_1}(0|0)$ und $S_{x_2}\left(\frac{8}{3}\middle|0\right)$.

Mit $f(2) = -\frac{4}{3}$ besitzt G_f den Tiefpunkt $T\left(2\middle|-\frac{4}{3}\right)$.

Da f' an der Stelle $x_1 = 0$ eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat, besitzt G_f den Terrassenpunkt $P(0|0) = S_{x_1}$.

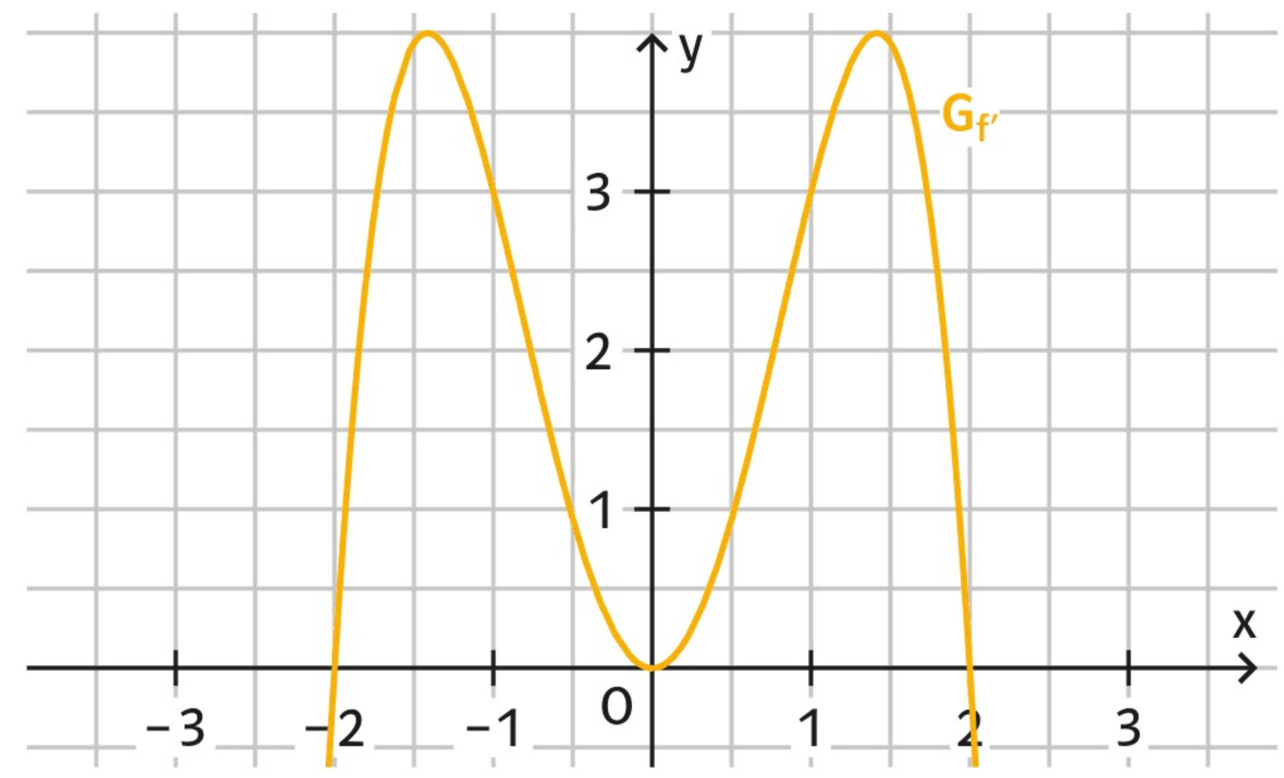
Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ gilt, ist $f(2) = -\frac{4}{3}$ ein globales Minimum.



Beispiel 2

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Der Graph von f ist G_f. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) G_f hat den Hochpunkt $H(2|f(2))$.
b) Im abgebildeten Bereich hat f drei Extremstellen.
c) $f(-0{,}5) > f(-1)$
d) G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

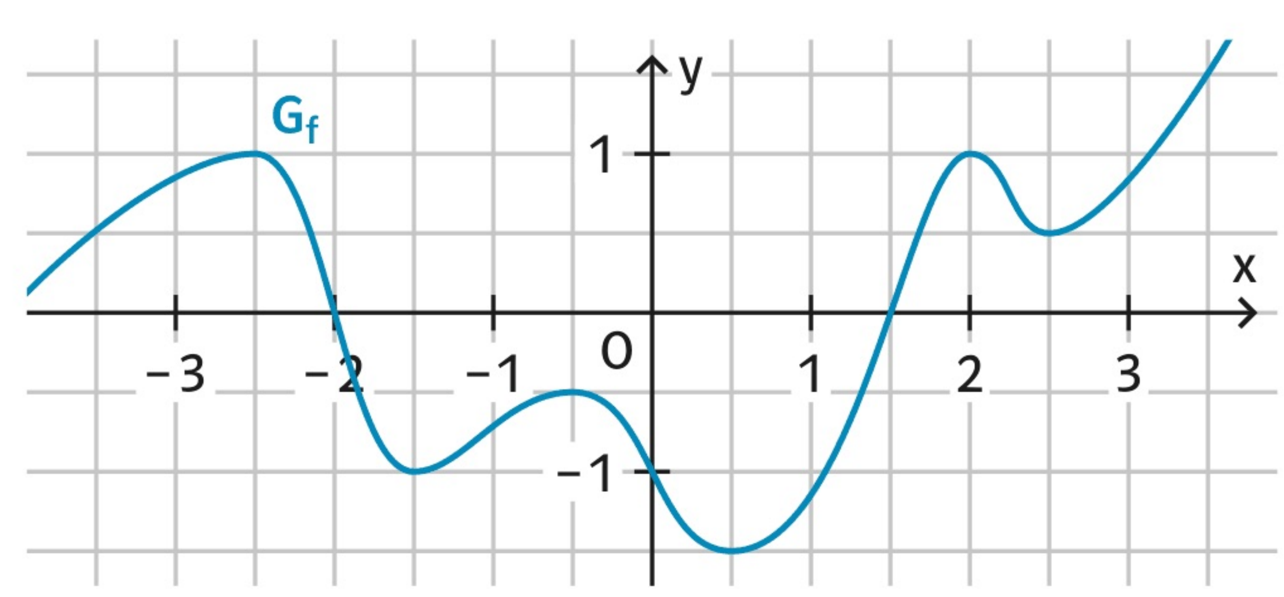


Lösung

a) Wahr, denn für $x = 2$ gilt $f'(2) = 0$ und $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von + nach −.
b) Falsch, denn nur an den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_3 = 2$ von f′ liegt auch ein Vorzeichenwechsel vor. An der Nullstelle $x_2 = 0$ wechselt $f'(x)$ das Vorzeichen nicht. Es liegt somit keine Extremstelle vor und G_f hat bei $x_2 = 0$ einen Terrassenpunkt.
c) Wahr, denn für $x \in [-1; -0{,}5]$ ist $f'(x) > 0$ und G_f somit streng monoton steigend.
d) Falsch, denn an der Nullstelle $x_1 = -2$ wechselt $f'(x)$ das Vorzeichen von − nach +. Somit hat G_f bei $x_1 = -2$ einen Tiefpunkt und keinen Hochpunkt wie bei $x = 2$. Daher kann G_f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

Aufgaben

1 Lesen Sie am Graphen der Funktion f die Koordinaten der Hochpunkte sowie der Tiefpunkte ab.
Geben Sie jeweils an, ob im Intervall $[-3; 3]$ ein lokales oder ein globales Extremum vorliegt.



2 Bestimmen Sie die Stellen der Funktion f, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente hat.

a) $f: x \mapsto -x^2 + 4x + 5$
b) $f: x \mapsto x^3 + 6x^2 - 1$
c) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x$
d) $f: x \mapsto 2x^3 - 2x^2 + 4x - 1$
e) $f: x \mapsto -\frac{1}{5}x \cdot \left(\frac{x^4}{2} - 40\right)$
f) $f: x \mapsto x^5 - 5x^3 + 10x$

3 Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f, der

a) den Hochpunkt $H(-1|2)$ und den Tiefpunkt $T(2|-1)$ besitzt,
b) den Tiefpunkt $T(-2|-3)$, den Terrassenpunkt $P(1|0)$ und den Hochpunkt $H(3|4)$ besitzt,
c) weder Hoch- noch Tiefpunkte, aber genau zwei Terrassenpunkte besitzt,
d) zwei Hochpunkte und einen Tiefpunkt besitzt, wobei f nur zwei verschiedene Extrema hat.

4 Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte der Funktion f. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4$
b) $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$
c) $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 2$
d) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x$
e) $f: x \mapsto x \cdot (1 - x^2)$
f) $f: x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2$

5 Gegeben ist die Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente besitzt. Erläutern Sie, ob dort ein Hochpunkt, ein Tiefpunkt oder ein Terrassenpunkt vorliegt.

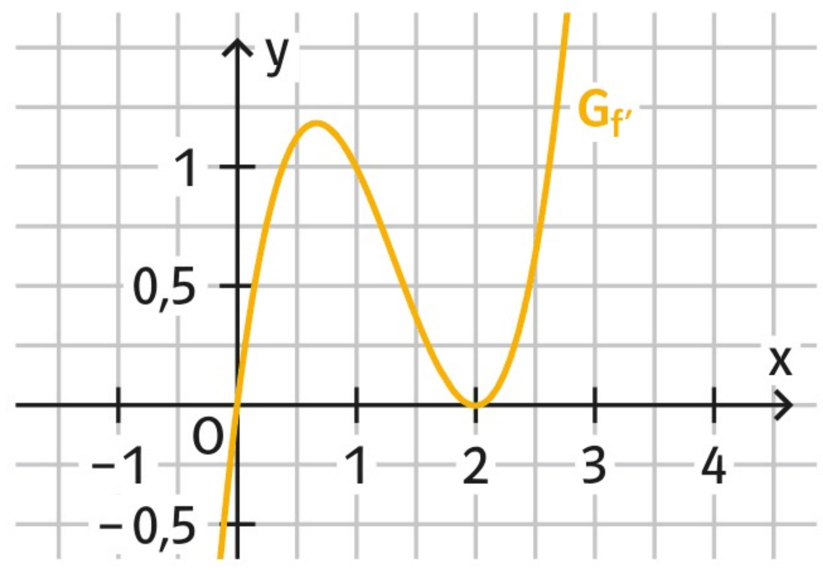
a) $f': x \mapsto 3x + 2$
b) $f': x \mapsto -x^2 - x + 6$
c) $f': x \mapsto x^3 - 3x^2$

6 Bestimmen Sie Lage und Art der Extrema der Funktion f im Intervall $[-2;\,6]$.

a) $f: x \mapsto -2 - 0{,}5x$ b) $f: x \mapsto -\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{5}$ c) $f: x \mapsto 0{,}1x^3 - 1{,}05x^2 - 2{,}4x$

7 Abgebildet ist der Graph der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Beurteilen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

(1) f hat im abgebildeten Bereich zwei Extremstellen.
(2) Der Graph von f hat den Hochpunkt $H(0\,|\,f(0))$.
(3) f ist im Intervall $]0;\,2[$ streng monoton zunehmend.
(4) Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt.



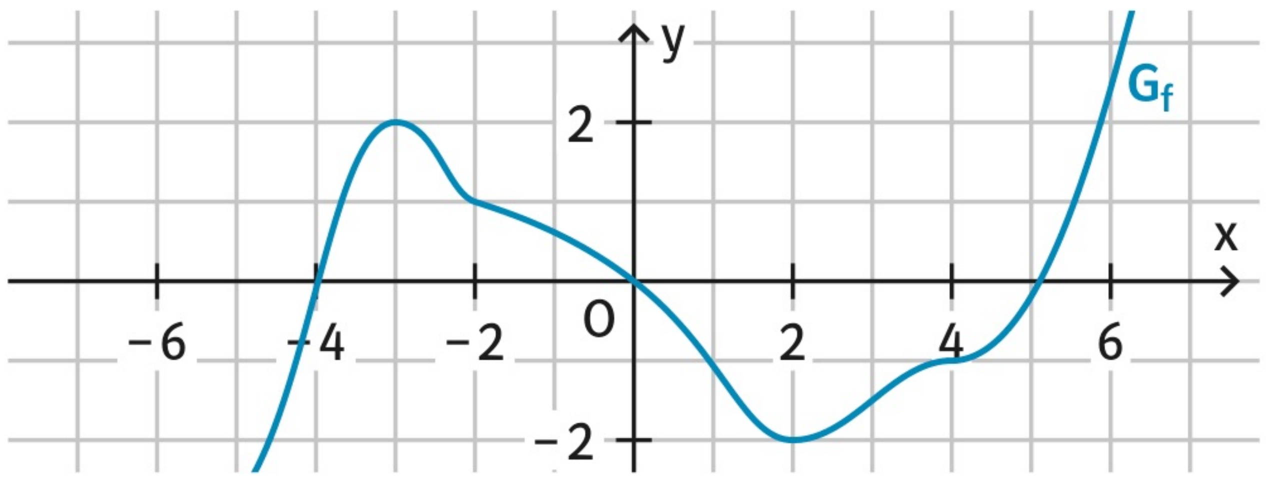
8 Nach einem starken Regenfall im Gebirge steigt der Wasserspiegel in einem Stausee an. Die Zuflussgeschwindigkeit kann in den ersten 24 Stunden näherungsweise durch die Funktion v mit $v(t) = 0{,}25t^3 - 12t^2 + 144t$ beschrieben werden $\left(t \text{ in Stunden, } v(t) \text{ in } \frac{m^3}{h}\right)$. Berechnen Sie die Nullstellen von v sowie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von v und erläutern Sie die Bedeutung der Ergebnisse im Sachzusammenhang.



Test 1

Lösungen | Seite 216

9 Lesen Sie am Graphen der differenzierbaren Funktion f die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte ab. Beschreiben Sie, wie sich das Vorzeichen von $f'(x)$ in der Umgebung der jeweiligen Stellen ändert.



10 Bestimmen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f und skizzieren Sie G_f. Geben Sie gegebenenfalls globale Extrema an.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ **c)** $f(x) = -(x^2 - 2x)^2 + 3$

11 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3$ besitzt an der Stelle $x = 0$ den Terrassenpunkt $P(0\,|\,0)$. Erklären Sie, wie man damit auf die Koordinaten des Terrassenpunktes des Graphen von g schließen kann.

a) $g(x) = x^3 - 5$ b) $g(x) = -5x^3$ c) $g(x) = (x + 5)^3$ d) $g(x) = 2(x - 5)^3 + 5$

12 Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nicht. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes des Graphen, der den kleinsten Abstand zur x-Achse hat.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 12x^2 + \frac{3}{4}$

13 a) Begründen Sie, dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz einer inneren Extremstelle einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 ist.

b) Beurteilen Sie, ob die Bedingung „Alle Seiten eines Vierecks sind gleich lang“ eine hinreichende Bedingung für „Das Viereck ist ein Quadrat“ ist.

c) Beurteilen Sie, ob die Bedingung „Alle Seiten eines Vierecks sind gleich lang und die Größe eines Innenwinkels beträgt 90°“ eine hinreichende Bedingung für „Das Viereck ist ein Quadrat“ ist.

14 Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{21}{6}x^6 + 21x^4 - 32x^2$ hat im Intervall $]-\infty; 0]$ die Extremstellen $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$ und $x_4 = 0$.

a) Benennen Sie ohne Rechnung die Extremstellen im Intervall $]0; \infty[$.

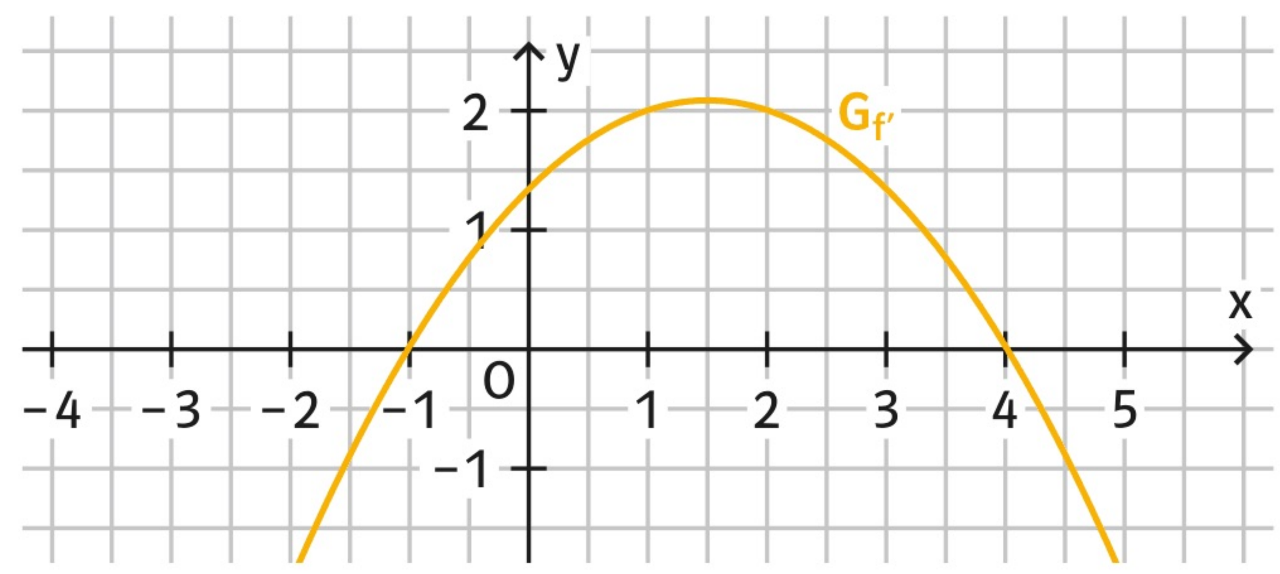
b) Geben Sie für jede Extremstelle an, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt, und begründen Sie dies.

15 Untersuchen Sie den Graphen von f mit $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2$ auf Extrempunkte. Erklären Sie, welche Aussage über die Anzahl der Nullstellen von f aus dem Ergebnis gefolgert werden kann.

16 Gegeben ist der Graph der quadratischen Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f.

a) Erklären Sie sich gegenseitig, welche Aussagen Sie damit über die Extremstellen des Graphen von f machen können.

b) Skizzieren Sie zwei verschiedene mögliche Graphen von f.



17 Geben Sie einen Term einer ganzrationalen Funktion f an, die die angegebenen Bedingungen erfüllt. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

a) f ist vom Grad 2 und besitzt ein lokales Maximum.

b) f ist vom Grad 3, besitzt kein lokales Extremum und ist streng monoton abnehmend.

c) f ist vom Grad 2 und der Graph von f besitzt den Tiefpunkt $T(2|-1)$.

d) f ist vom Grad 3 und der Graph von f besitzt den Terrassenpunkt $P(-3|4)$.

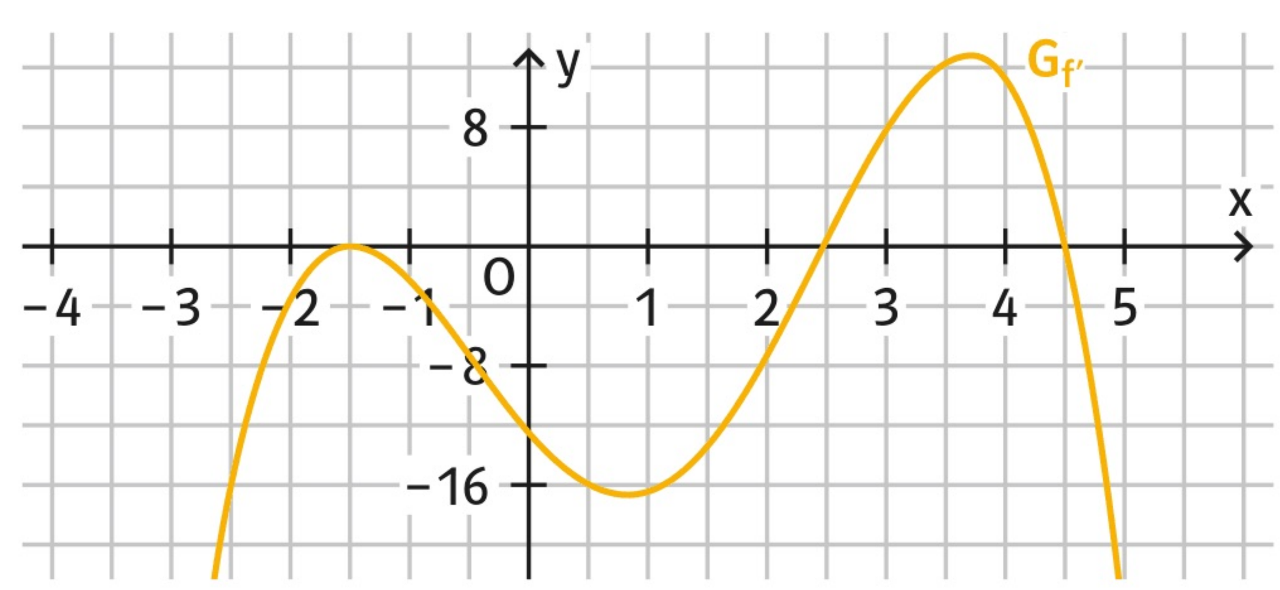
Test 2

Lösungen | Seite 216

18 Abgebildet ist der Graph der Ableitung einer Funktion f.

a) Geben Sie die lokalen Extremstellen der Funktion f an. Geben Sie jeweils die Art des Extremums an und begründen Sie dies.

b) Geben Sie die Stelle an, an der der Graph von f einen Terrassenpunkt hat. Begründen Sie, dass dessen y-Koordinate nicht eindeutig angegeben werden kann.



19 Begründen Sie, dass für jede ganzrationale Funktion f mit $D = \mathbb{R}$ die Aussage gilt.

a) Ist f vom Grad 3, dann hat f höchstens zwei Extremstellen.

b) Wenn f drei verschiedene Extremstellen hat, dann ist der Grad von f mindestens vier.

20 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ mit $b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie, welche Beziehung zwischen den Koeffizienten b und c bestehen muss, damit der Graph von f einen Terrassenpunkt besitzt, und geben Sie zwei mögliche Funktionsterme an.

b) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f nicht sowohl einen Terrassenpunkt als auch Extrempunkte besitzen kann.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Funktionenplotters.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 217

G 21 Bestimmen Sie für die gegebene Funktion f die Nullstellen und deren Vielfachheit.

a) $f: t \mapsto (t+2)^2(3-6t)$

b) $f: x \mapsto x^4 + x^3 - 6x^2$

c) $f: x \mapsto \frac{1}{3}(x^2+1)\cdot(x^2-2)$

d) $f: t \mapsto (t-1)\cdot(t-3) - 2$

e) $f: x \mapsto 3x^5 - 6x^4 + x^3$

f) $f: x \mapsto 0{,}5x^4 - 4{,}5x^2 + 10$

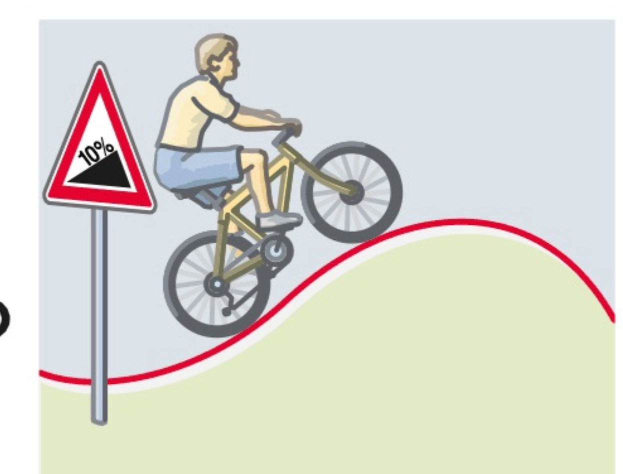
3 Zweite Ableitung und Krümmung

Auf der abgebildeten Passstraße wechseln sich Linkskurven und Rechtskurven ab. Beschreiben Sie, in welchen Abschnitten ein Motorrad beim Hinauffahren nach links bzw. nach rechts geneigt ist.
Gibt es Straßenabschnitte, die man ganz aufrecht fahren kann?



Den Verlauf einer kurvigen Straße kann man mit Links- und Rechtskurven beschreiben. Diese Begriffe kann man auf Funktionsgraphen übertragen, wenn man sich den Graphen in positiver x-Richtung „durchfahren“ denkt. Mit der Unterteilung in Links- und Rechtskurven und geradlinige Stücke beschreibt man das **Krümmungsverhalten** eines Graphen.

Perspektivwechsel:

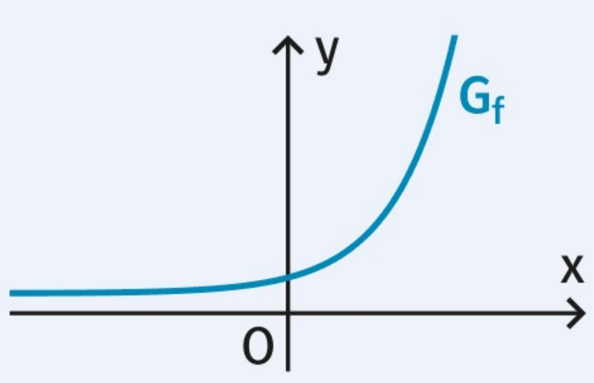


Sicht von der Seite bei der Monotonie

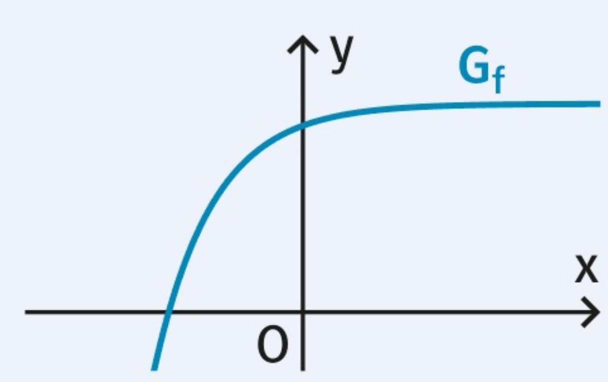


Sicht von oben bei der Krümmung

Definition: Bewegt man sich auf dem Graphen einer Funktion f in positiver x-Richtung und beschreibt man dabei



eine Linkskurve, so heißt der Graph von f in diesem Bereich **linksgekrümmt**.

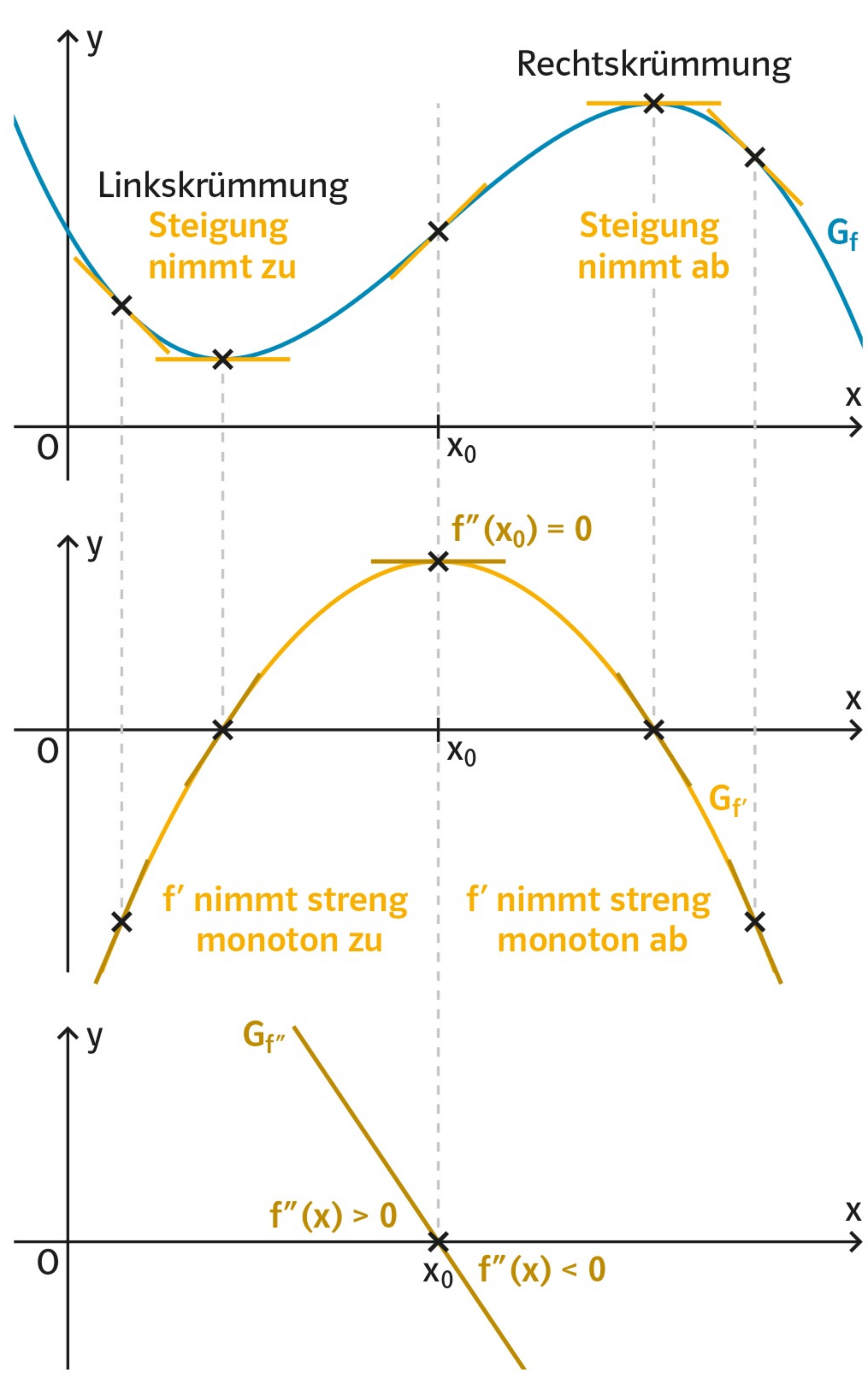


eine Rechtskurve, so heißt der Graph von f in diesem Bereich **rechtsgekrümmt**.

Der dargestellte Graph einer differenzierbaren Funktion f ist für $x < x_0$ linksgekrümmt und für $x > x_0$ rechtsgekrümmt.

Da die Steigungen der Tangenten im linksgekrümmten Teil des Graphen von f größer werden, ist die erste Ableitung f′ im entsprechenden Intervall streng monoton zunehmend. Im rechtsgekrümmten Teil des Graphen werden die Steigungen kleiner. Somit ist f′ streng monoton abnehmend. Umgekehrt kann aus dem Monotonieverhalten der ersten Ableitung auf das Krümmungsverhalten geschlossen werden.
Das Monotonieverhalten der ersten Ableitung f′ lässt sich mit deren Ableitungsfunktion untersuchen, also mit der **zweiten Ableitung f″**.
Ist f″(x) positiv, dann ist f′ streng monoton zunehmend und somit ist der Graph von f linksgekrümmt. Ist f″(x) negativ, dann ist der Graph von f rechtsgekrümmt.

Damit kann man mithilfe der zweiten Ableitung f″ Rückschlüsse auf das Krümmungsverhalten des Graphen von f ziehen.



$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
↓	↓
f′ nimmt streng monoton zu	f′ nimmt streng monoton ab
↓	↓
Graph von f ist linksgekrümmt	Graph von f ist rechtsgekrümmt

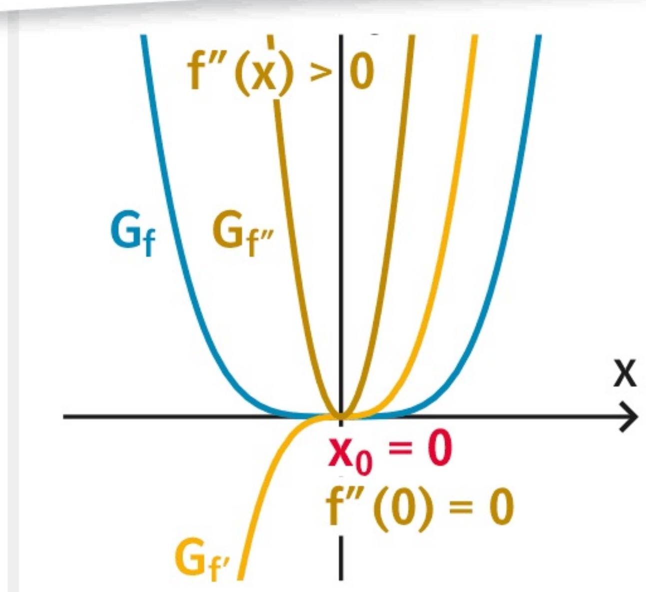
Satz (Kriterien für das Krümmungsverhalten): Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ zweimal differenzierbar.

Wenn $\mathbf{f''(x) > 0}$ für alle $x \in I$ ist, so ist $f'(x)$ streng monoton zunehmend in I und der Graph von f ist **linksgekrümmt** in I.

Wenn $\mathbf{f''(x) < 0}$ für alle $x \in I$ ist, so ist $f'(x)$ streng monoton abnehmend in I und der Graph von f ist **rechtsgekrümmt** in I.

$f''(x) > 0$ (positiv)
linksgekrümmt
$f''(x) < 0$ (negativ)
rechtsgekrümmt

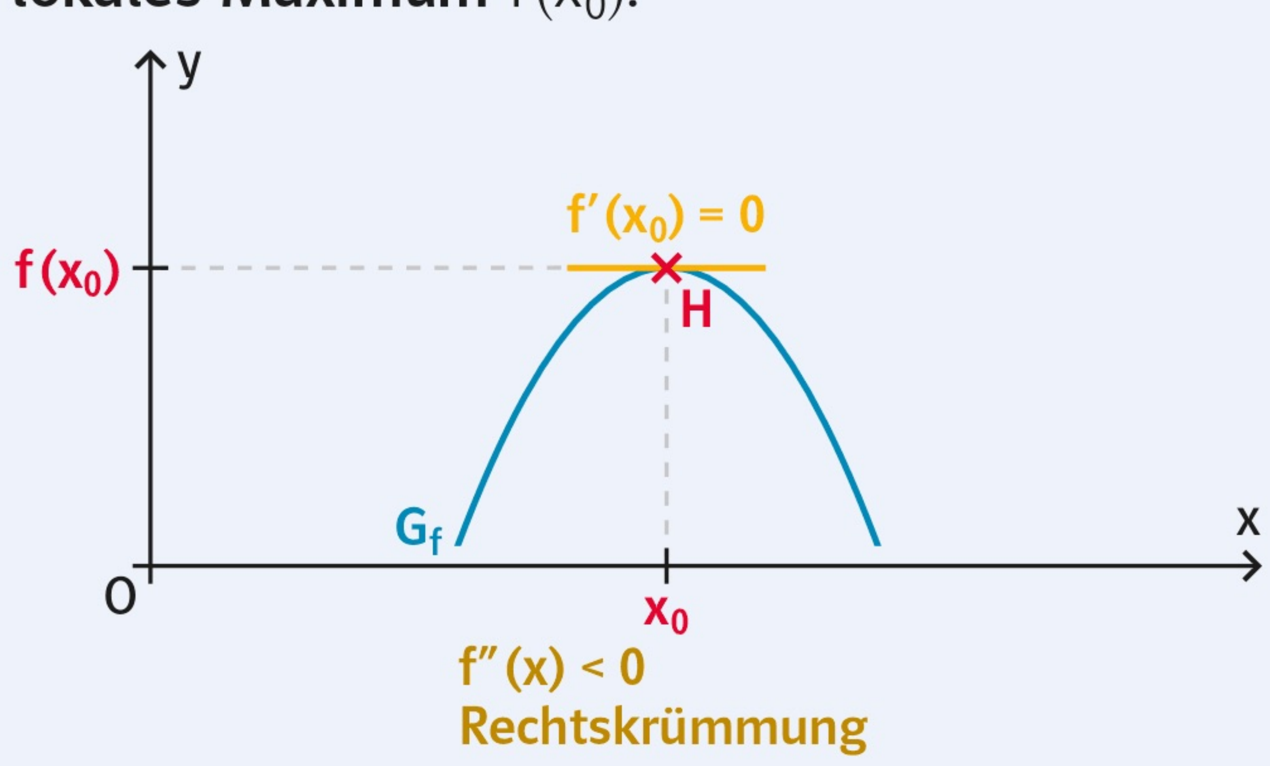
Bemerkung:
Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt.
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4$ ist für alle reellen Zahlen linksgekrümmt und die Ableitung f′ mit $f'(x) = 4x^3$ ist in ℝ streng monoton zunehmend.
Die zweite Ableitung f″ mit $f''(x) = 12x^2$ ist aber nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ größer null, denn es gilt $f''(0) = 0$.
Analog zur Erweiterung von Monotonieintervallen können die Intervalle, in denen der Graph einer Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist, somit teilweise um eine isolierte Stelle x_0 mit $f''(x_0) = 0$ erweitert werden.



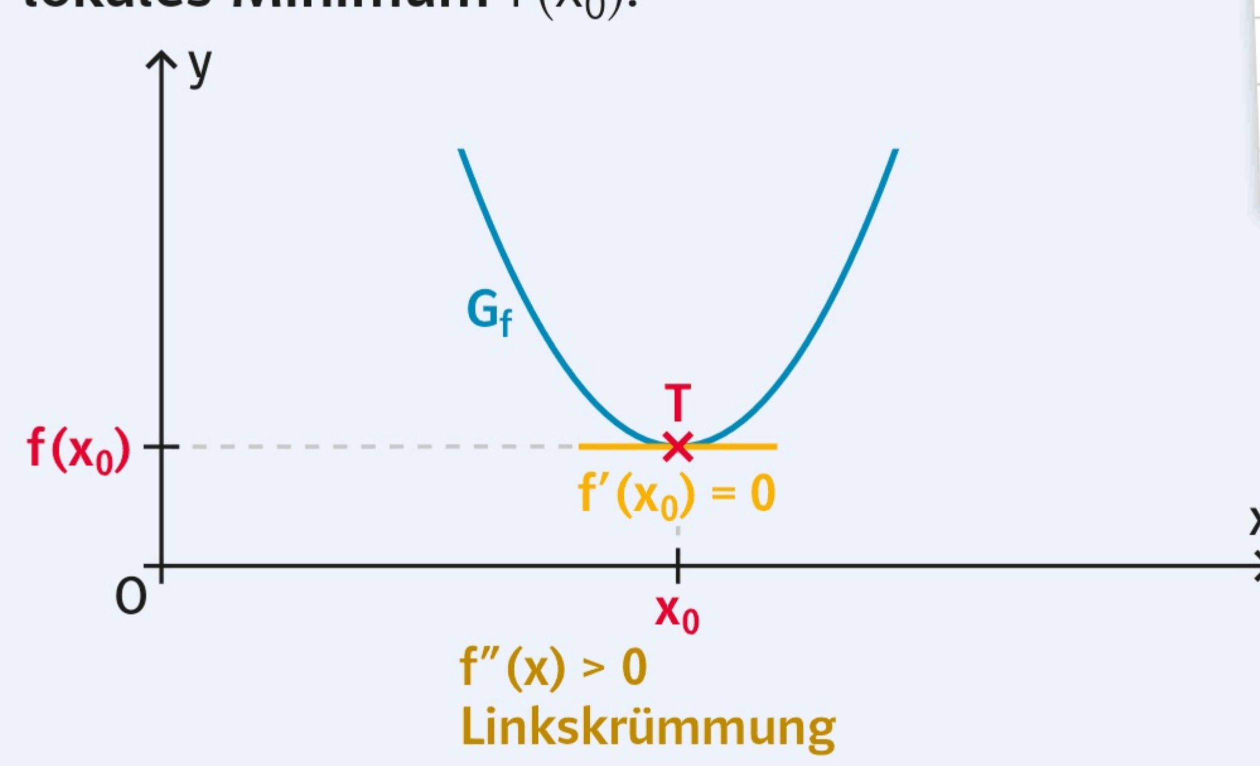
Extremstellen und zweite Ableitung
Da sich die Hochpunkte eines Graphen immer im Bereich von Rechtskurven befinden und die Tiefpunkte immer im Bereich von Linkskurven liegen, kann man für die Untersuchung von Extremstellen einer Funktion anstelle des Vorzeichenwechselkriteriums ein Ableitungskriterium verwenden.

Satz (Weiteres Kriterium für Extremstellen): Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in I$ eine innere Stelle von I.

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum** $f(x_0)$.

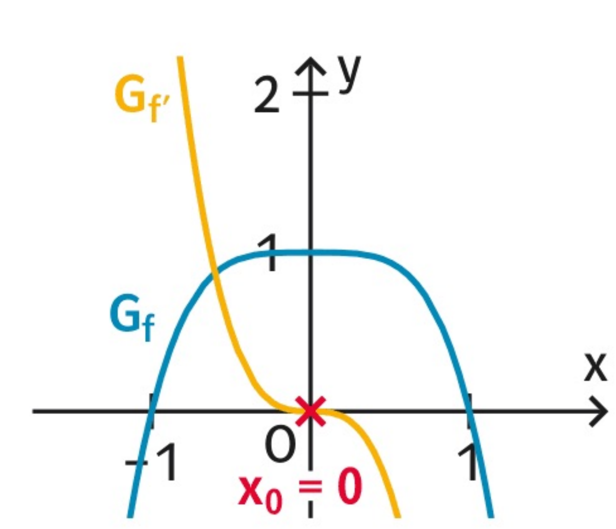


Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum** $f(x_0)$.



Zweite hinreichende Bedingung für eine Extremstelle x_0:
$f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

Bemerkung:
Gilt für eine Stelle $x_0 \in I$: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, dann folgt daraus nicht, dass an der Stelle x_0 kein Extremum von f vorliegt.
Für die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 1$ gilt beispielsweise $f'(0) = f''(0) = 0$, aber $f'(x)$ hat bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel.
Somit hat f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Extremum.

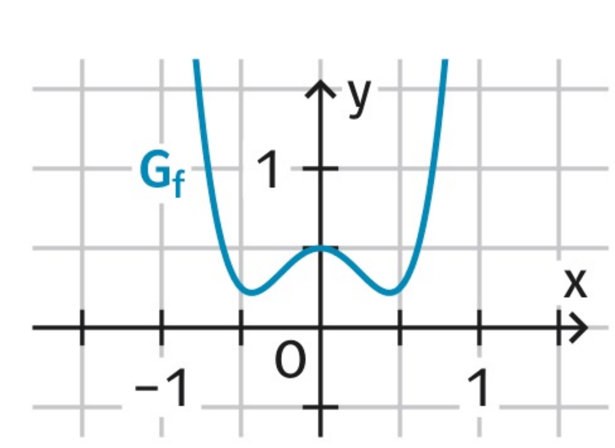


Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 8x^4 - 3x^2 + 0{,}5$.

a) Geben Sie mithilfe der Grafik die Intervalle an, in denen der Graph von f links- bzw. rechtsgekrümmt ist.

b) Untersuchen Sie mithilfe der zweiten Ableitung das Krümmungsverhalten des Graphen von f.



Lösung

a) Der Graph von f ist linksgekrümmt in $]-\infty; -0{,}25]$ und in $[0{,}25; \infty[$ und rechtsgekrümmt in $[-0{,}25; 0{,}25]$.

b) $f'(x) = 32x^3 - 6x$ und $f''(x) = 96x^2 - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 96x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x_1 = -0{,}25$ und $x_2 = 0{,}25$

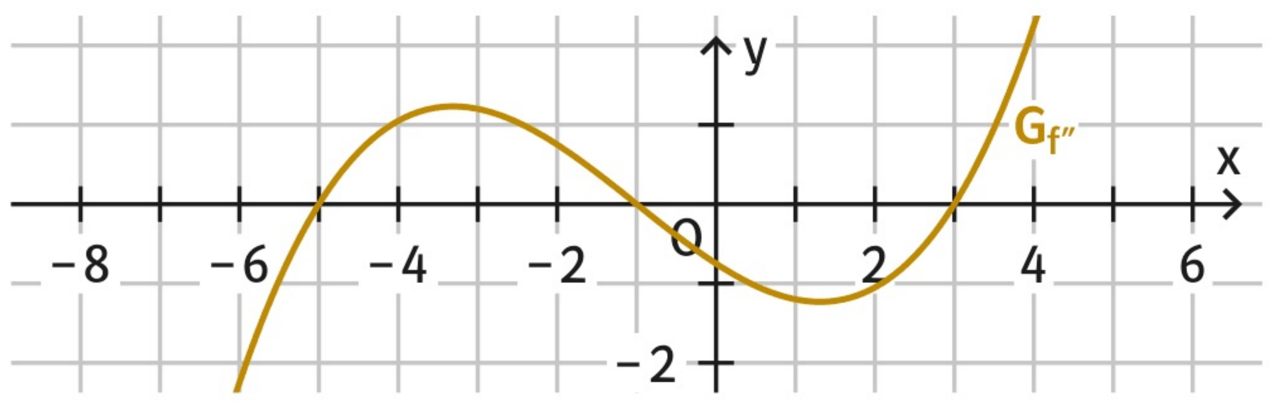
G_f ist rechtsgekrümmt in $[-0{,}25; 0{,}25]$, da $f''(x) < 0$ ist für $-0{,}25 < x < 0{,}25$.

G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty; -0{,}25]$ und $[0{,}25; \infty[$, da $f''(x) > 0$ ist für $x < -0{,}25$ und $x > 0{,}25$.

Beispiel 2

Abgebildet ist der Graph der zweiten Ableitungsfunktion f″ einer ganzrationalen Funktion f fünften Grades.

Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f mithilfe der Grafik.



Lösung

Die zweite Ableitung ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades und besitzt daher keine weiteren Nullstellen.

Für $x < -5$ und für $-1 < x < 3$ ist $f''(x) < 0$. Somit ist der Graph von f rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; -5]$ und für $x \in [-1; 3]$.

Für $-5 < x < -1$ und für $x > 3$ ist $f''(x) > 0$. Somit ist der Graph von f linksgekrümmt für $x \in [-5; -1]$ und für $x \in [3; \infty[$.

Beispiel 3

Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 0{,}5x^2 - x + 1{,}5$ und die Lage und Art der Extrempunkte von G_f mithilfe der zweiten Ableitung f″.

Lösung

$f'(x) = 6x^2 - x - 1$ und $f''(x) = 12x - 1$

Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 5}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{3}$$

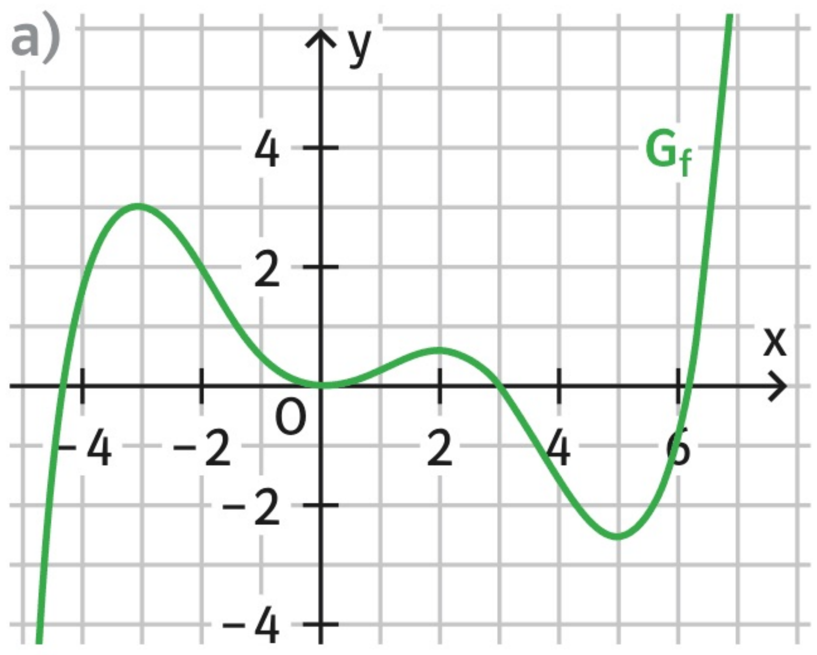
Da $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 5 > 0$ ist, hat f an der Stelle $x_1 = \frac{1}{2}$ ein lokales Minimum und mit $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$ ergibt sich der Tiefpunkt $T\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{9}{8}\right)$.

Da $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -5 < 0$ ist, hat f an der Stelle $x_2 = -\frac{1}{3}$ ein lokales Maximum und mit $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{46}{27}$ ergibt sich der Hochpunkt $H\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{46}{27}\right)$.

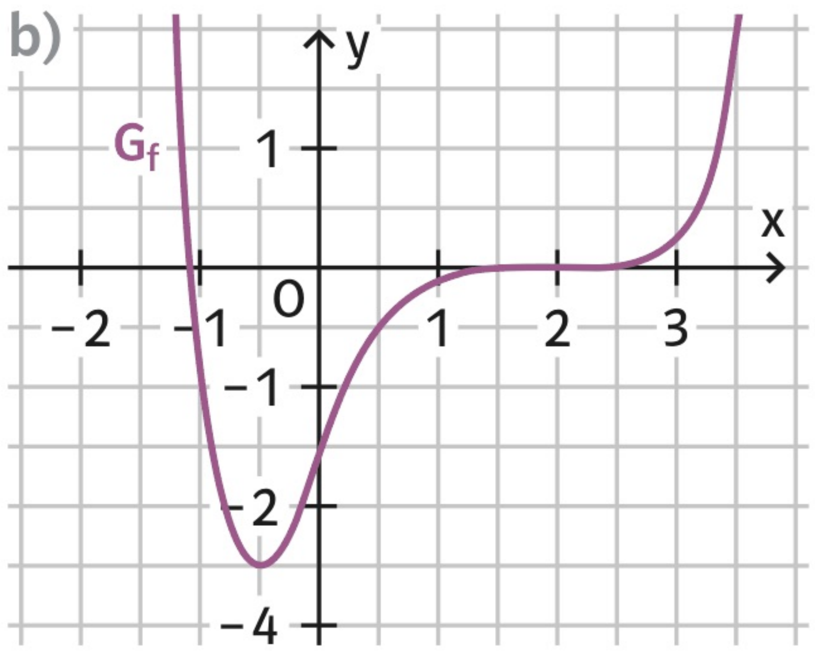
Aufgaben

1 Geben Sie mithilfe des Graphen der Funktion f die Intervalle an, in denen der Graph von f linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt ist.

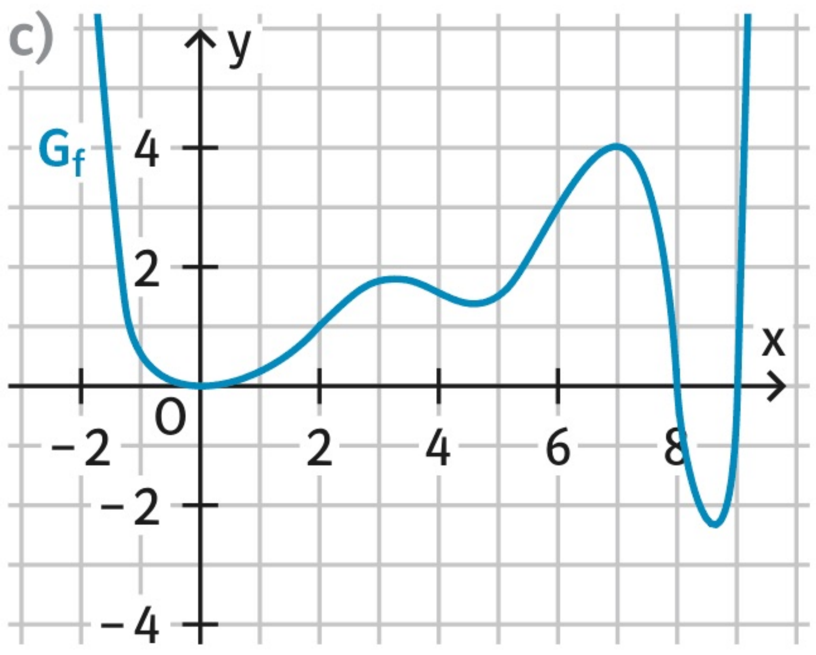
a)



b)



c)



2 Ermitteln Sie mithilfe der zweiten Ableitung die Extremstellen von f und die Art der Extrema.

a) $f(x) = 0{,}25x^4 + x^2 - 7$ b) $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 1$ c) $f(x) = 0{,}4x^5 - 6x^3$

3 Zeigen Sie mithilfe der zweiten Ableitung, dass der Graph der Funktion f mit

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ linksgekrümmt ist und einen Tiefpunkt besitzt,

b) $f(x) = -4x^2 + 3x + 2$ rechtsgekrümmt ist und einen Hochpunkt besitzt,

c) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x$ linksgekrümmt ist,

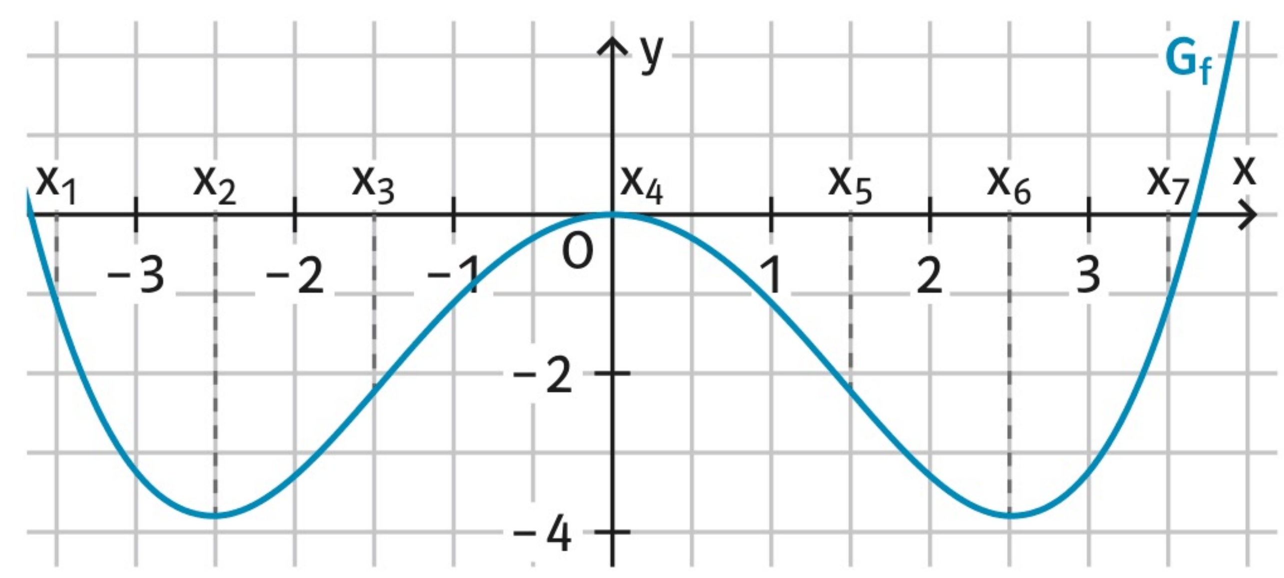
d) $f(x) = -25x^4 + 3x + 2$ rechtsgekrümmt ist,

e) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ für $x > -1$ linksgekrümmt ist.

4 Gegeben ist der Graph einer Funktion f.

a) Geben Sie mithilfe der Stellen x_1 bis x_7 die Intervalle an, in denen der Graph links- bzw. rechtsgekrümmt ist.

b) Der Funktionsterm der Funktion f ist $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{9}{8}x^2$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a) rechnerisch.



5 Skizzieren Sie den Graphen einer in ℝ definierten Funktion f mit den gegebenen Eigenschaften für den Graphen und die Funktion. Überprüfen Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

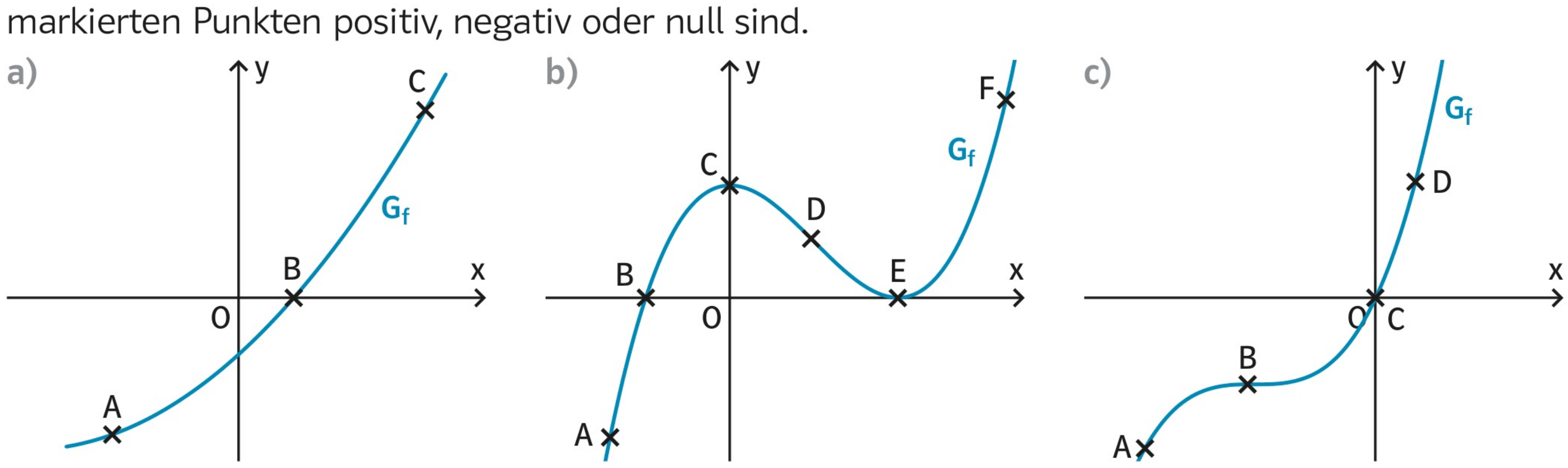
a) Der Graph von f ist rechtsgekrümmt und f ist streng monoton abnehmend.

b) Der Graph von f ist rechtsgekrümmt und f ist streng monoton zunehmend.

c) Der Graph von f ändert sein Krümmungsverhalten einmal und es gilt $f''(1) = 0$.

d) Der Graph von f ist nur für $-1 < x < 2$ linksgekrümmt.

6 Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Geben Sie jeweils an, ob f(x), f′(x) und f″(x) in den markierten Punkten positiv, negativ oder null sind.



7 Bestimmen Sie mithilfe der zweiten Ableitung größtmögliche Intervalle, in denen der Graph der Funktion f links- bzw. rechtsgekrümmt ist. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einem Funktionenplotter.

a) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2$

b) $f: x \mapsto -2x^3 + 3x^2 + 1$

c) $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

d) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

e) $f: x \mapsto -0{,}5x^2(x^2 - 24)$

f) $f: x \mapsto (4 - x)(x^2 - 9)$

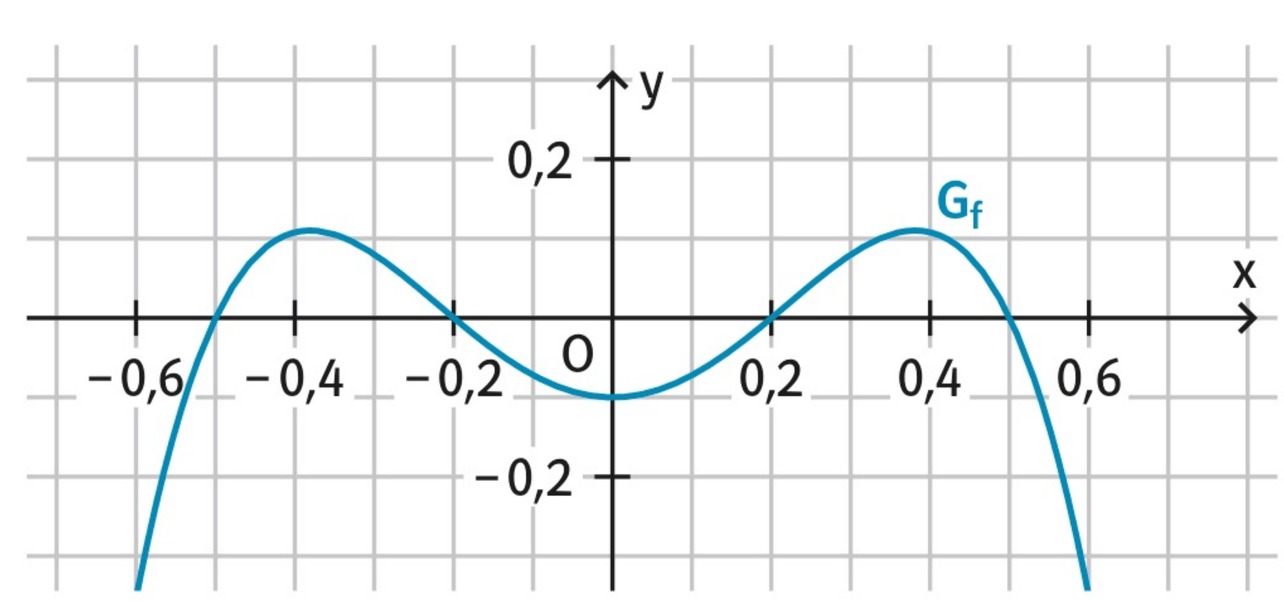
8 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = (x + 1)^3 + 2$ und $g(x) = (x - 1)^4 - 2$. Geben Sie das Krümmungsverhalten der Graphen von f und g an.

Test 1

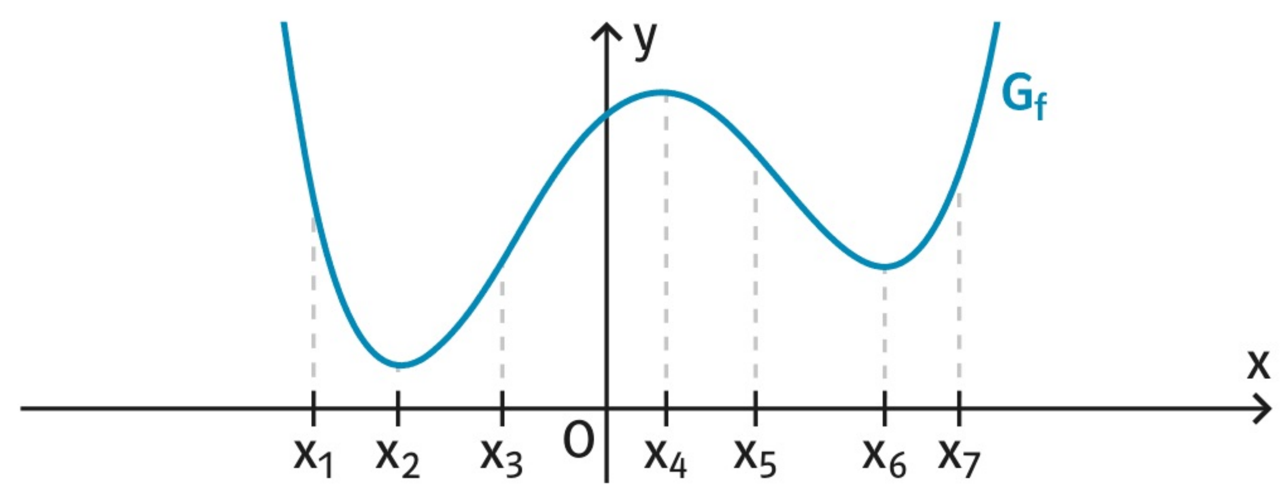
Lösungen | Seite 217

9 a) Geben Sie mithilfe des Graphen der Funktion f die Intervalle an, in denen der Graph linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt ist.

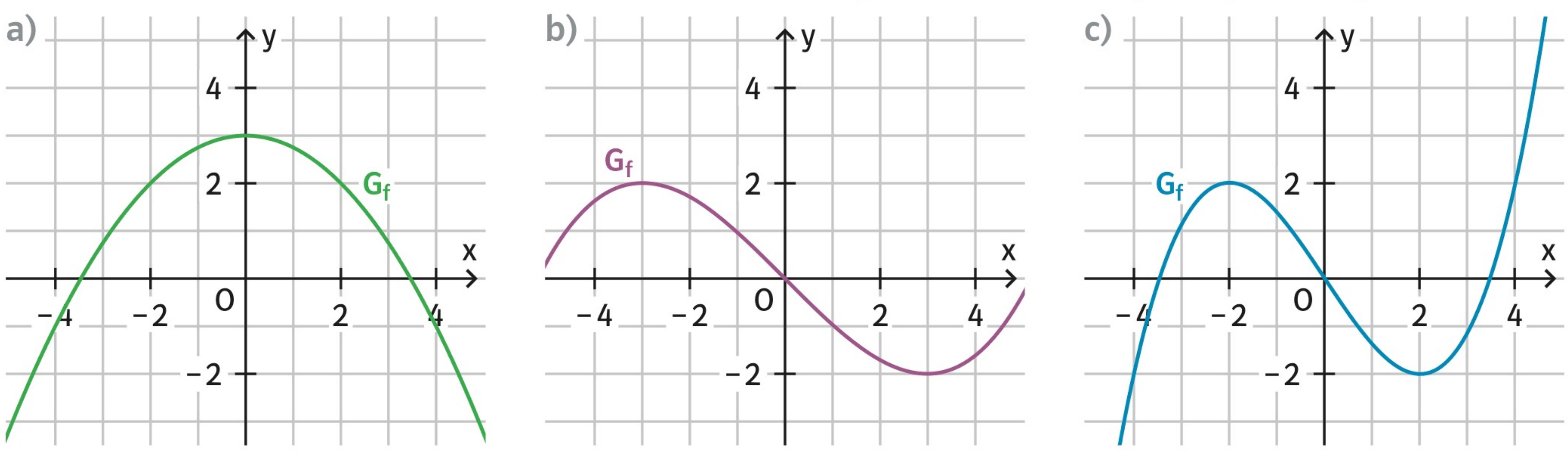
b) Der Funktionsterm von f lautet $f(x) = (0{,}25 - x^2)(10x^2 - 0{,}4)$. Überprüfen Sie rechnerisch Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a).



10 Abgebildet ist der Graph einer Funktion f. Geben Sie an, an welchen der markierten Stellen
a) f(x) am größten bzw. am kleinsten ist,
b) f′(x) am größten bzw. am kleinsten ist,
c) f″(x) positiv bzw. negativ ist.

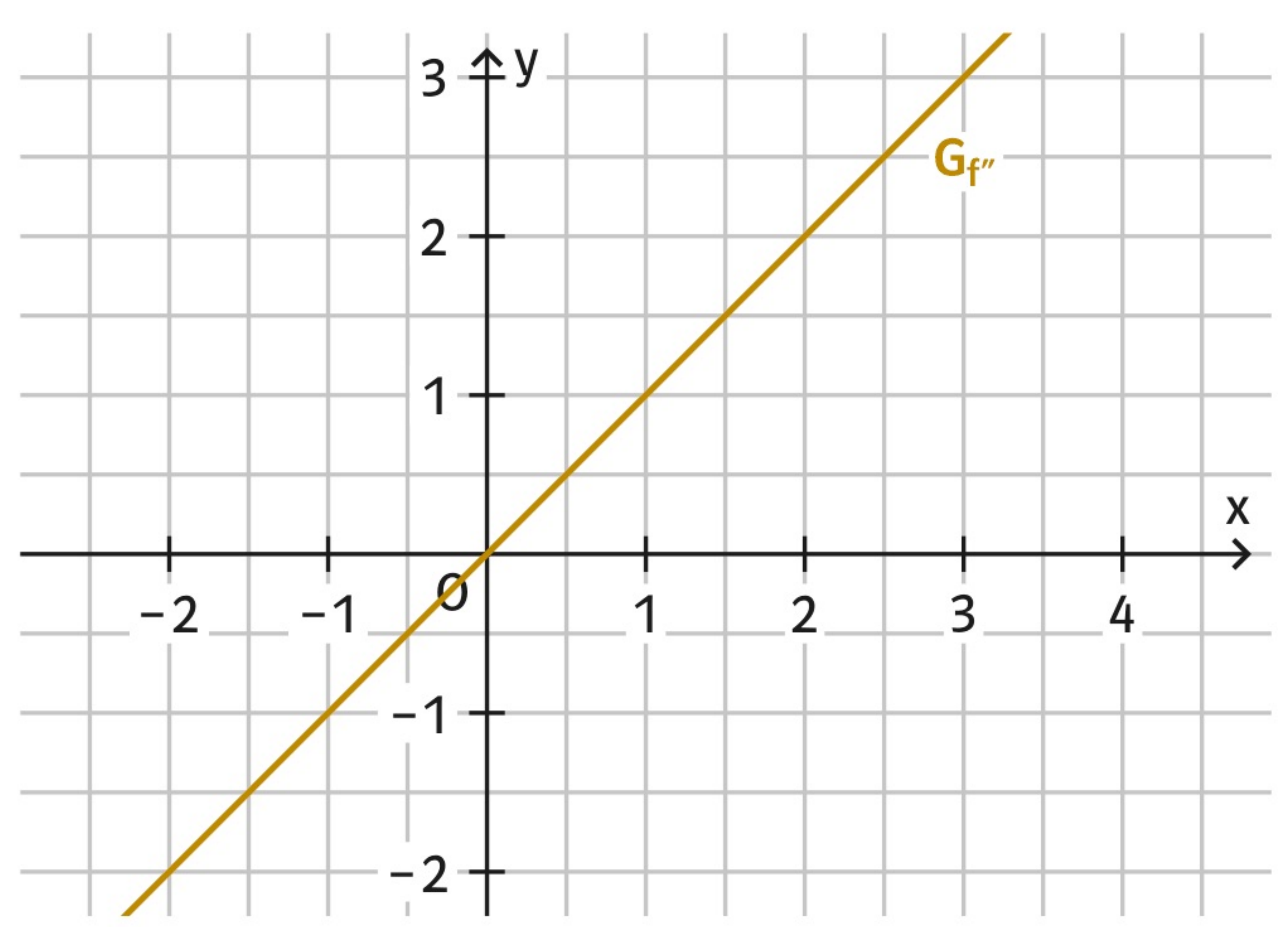


11 Erklären Sie sich gegenseitig, was sich mithilfe des abgebildeten Graphen einer Funktion f über das Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitung im Intervall $I = [-3; 3]$ aussagen lässt.



12 Gegeben ist die zweite Ableitung f″ einer Funktion f mit $f''(x) = -2x(x-3)(x+1)$.
a) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f.
b) Geben Sie die Extremstellen der ersten Ableitung f′ an.
c) Die Funktion f besitzt zwei Extremstellen x_1 und x_2 mit $x_1 < -1$ und $x_2 > 4$. Beurteilen Sie jeweils, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f vorliegt.

13 Abgebildet ist der Graph der zweiten Ableitung f″ einer ganzrationalen Funktion f. Beurteilen Sie die Aussage.
a) f′ ist streng monoton zunehmend.
b) Der Graph von f ist für $x < 0$ rechtsgekrümmt.
c) Es gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
d) Der Graph von f ändert sein Krümmungsverhalten an der Stelle $x = 0$.
e) Das Extremum von f bei $x = 2{,}5$ kann nur ein Minimum sein.



14 Beurteilen Sie, ob die Aussage über eine Funktion f und ihre Ableitungen f′ und f″ wahr oder falsch ist, und erklären Sie sich gegenseitig Ihre Überlegungen.
a) Wenn der Graph von f in einem Intervall I rechtsgekrümmt ist, dann gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$.
b) Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann ist f″ an der Stelle x_0 positiv oder negativ.
c) Die Graphen von f und f′ haben dasselbe Krümmungsverhalten.
d) Wenn f′ im Intervall $I =]a; b[$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ streng monoton zunehmend ist, dann hat f in I kein Maximum.

Strategie | Seite 188
Betrachten von etwas Gegenteiligem
Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

15 Begründen Sie, dass die Bedingung $f''(x_0) \neq 0$ keine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Extremstelle einer differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 ist.

16 a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ für $a > 0$ linksgekrümmt und für $a < 0$ rechtsgekrümmt ist.
b) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Untersuchen Sie mithilfe eines Funktionenplotters, für welche Werte von n der Graph von f für $x \in \mathbb{R}^-$ und für $x \in \mathbb{R}^+$ linksgekrümmt ist.

17 Skizzieren Sie im Intervall $I = [0; 8]$ einen möglichen Graphen zu einer Funktion f mit den angegebenen Eigenschaften.

a) Die Ableitungen f′ und f″ haben im Intervall I nur positive Werte.

b) Im Intervall I hat f″ nur positive, f nur negative Werte.

c) Im Intervall I hat f′ nur positive Werte und f″ wechselt bei $x = 4$ von positiven zu negativen Werten.

18 Gegeben ist der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n. Zeigen Sie:

a) Für $n = 2$ ändert G_f sein Krümmungsverhalten nicht und f hat genau eine Extremstelle.

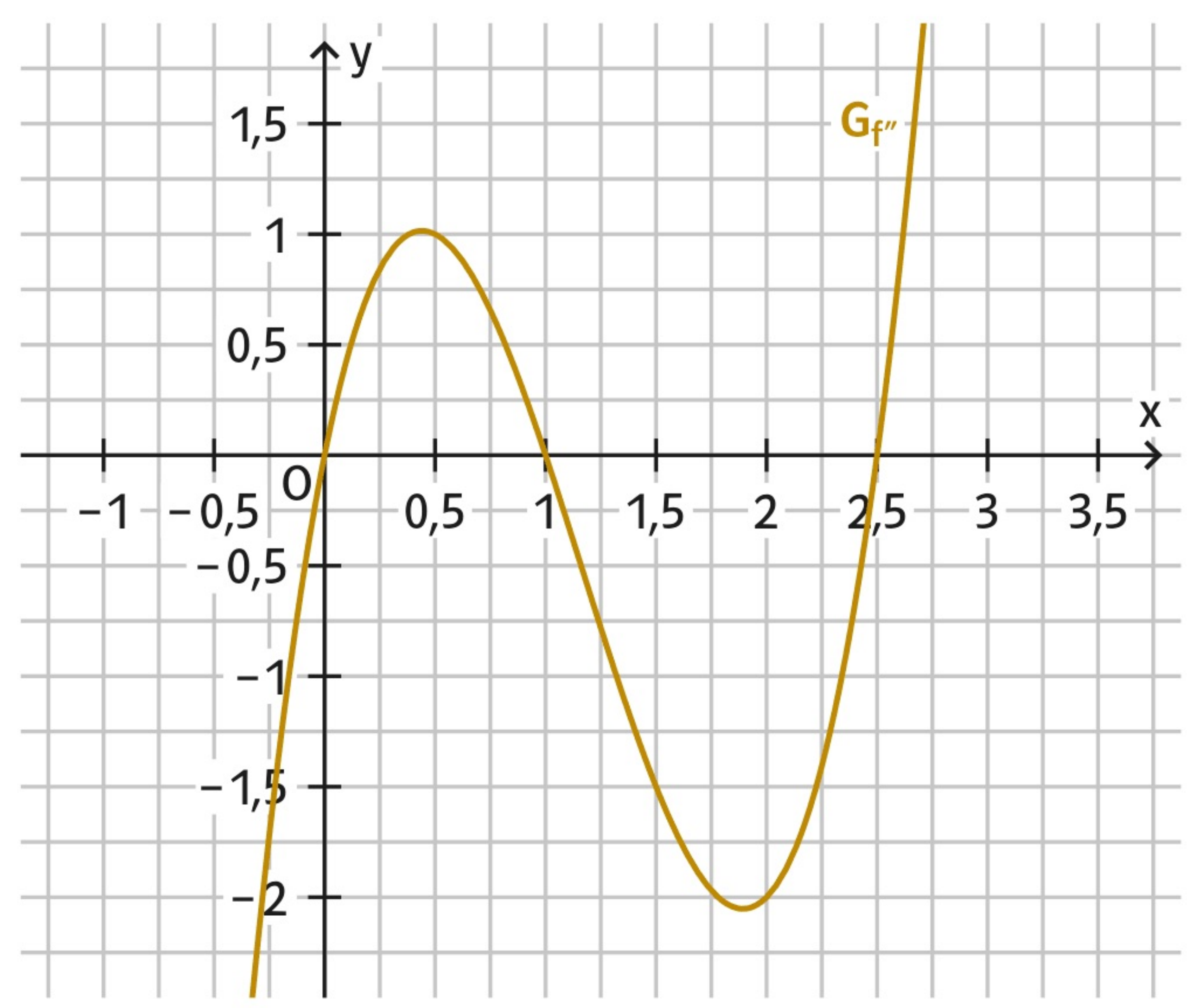
b) Für $n = 3$ ändert G_f sein Krümmungsverhalten genau einmal.

c) Für $n = 4$ ändert G_f sein Krümmungsverhalten höchstens zweimal.

Test 2

Lösungen | Seite 217

19 Abgebildet ist der Graph der zweiten Ableitung f″ einer ganzrationalen Funktion f. Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.



a) Der Graph von f ist für $0 < x < 1$ rechtsgekrümmt.

b) f′ hat bei $x = 1$ ein Maximum.

c) Der Graph von f ändert im dargestellten Bereich genau zweimal seine Krümmung.

d) Für $x \in [1{,}2; 2{,}2]$ nimmt f′ streng monoton ab.

e) Das Extremum von f bei $x = 3$ ist ein Minimum.

20 Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ die Funktion f_a mit $f_a(x) = x^3 - ax^2 + a$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_a sein Krümmungsverhalten genau einmal ändert, und geben Sie die Stelle in Abhängigkeit von a an.

b) Begründen Sie, dass der Graph unabhängig von a von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung übergeht.

c) Begründen Sie, dass die Funktion f_a an der Stelle $x_1 = 0$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_2 = \frac{2}{3}a$ ein lokales Minimum besitzt.

d) Überprüfen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) bis c) mit einer dynamischen Mathematiksoftware.

21 Die Funktion f ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und ihr Graph ist in $\mathbb{R}$ rechtsgekrümmt. Es gilt für ein $a \in \mathbb{R}^+$: $f(0) = -a$ und $f'(0) = 1$. Untersuchen Sie, ob die Funktion f im Intervall $[0; a[$ eine Nullstelle besitzt.

Grundwissen Test

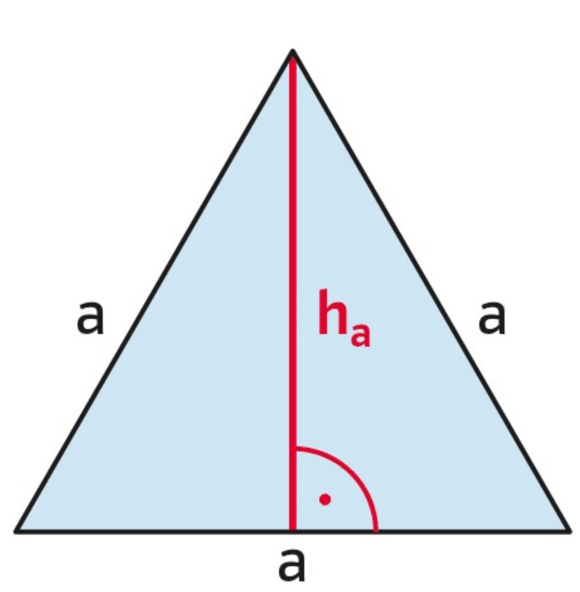
Lösungen | Seite 217

G 22 Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a.

a) Bestimmen Sie die Länge der Höhe h_a in Abhängigkeit von der Seitenlänge a.

b) Geben Sie an, welcher Rotationskörper bei der Drehung des Dreiecks um eine Seite a entsteht, und skizzieren Sie den Querschnitt des Körpers längs der Drehachse.

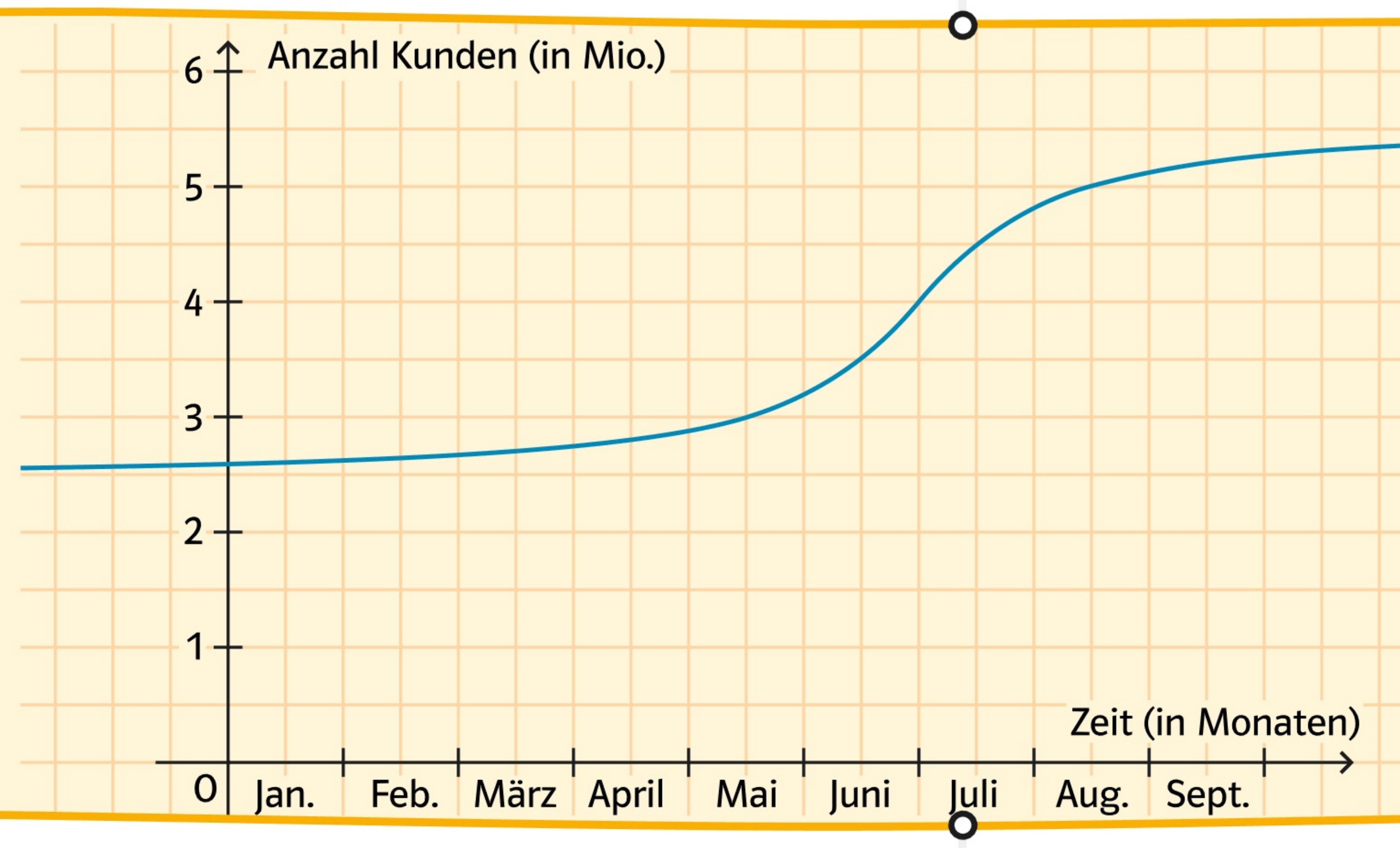
c) Bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens des Rotationskörpers aus Teilaufgabe b) in Abhängigkeit von a.



4 Wendestellen und Wendepunkte

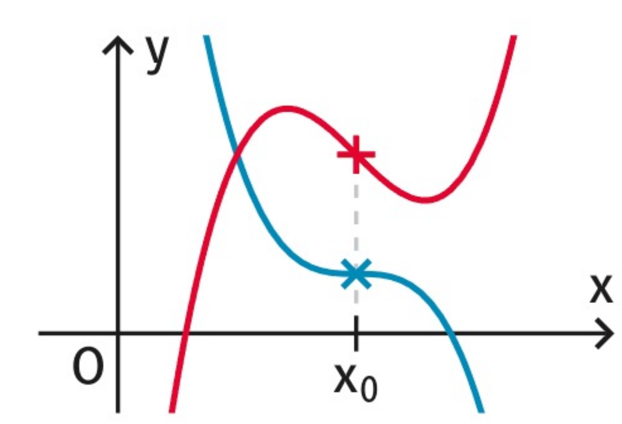
Aus dem Wirtschaftsteil einer Tageszeitung:

Trendumkehr bei G-Call
Berlin. Nachdem es bei der Telefongesellschaft G-Call im ersten Halbjahr mit der Kundenzahl laufend bergauf ging, ist das Wachstum nach einigen Monaten zurückgegangen.

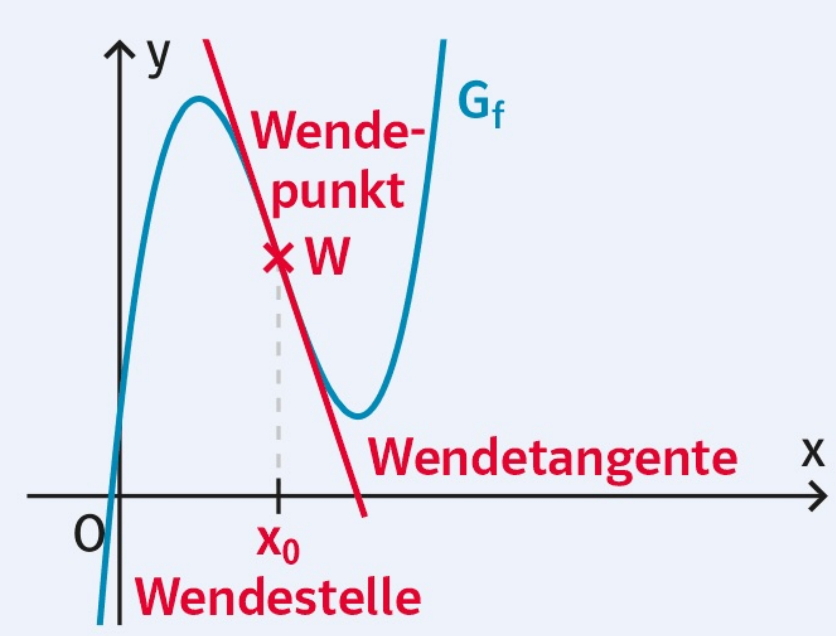


Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Kundenzahl den stärksten Zuwachs erfuhr, und beschreiben Sie, wie man im Graphen erkennen kann, ab wann das Wachstum zurückgegangen ist.

Den Verlauf eines Funktionsgraphen kann man mithilfe charakteristischer Stellen beschreiben. Neben den Nullstellen und Extremstellen einer Funktion sind dabei auch die Stellen von Interesse, an denen der Graph seine Krümmung ändert.
So geht beispielsweise der blaue Graph an der Stelle x_0 von einer Links- in eine Rechtskrümmung über, der rote Graph umgekehrt von einer Rechts- in eine Linkskrümmung.



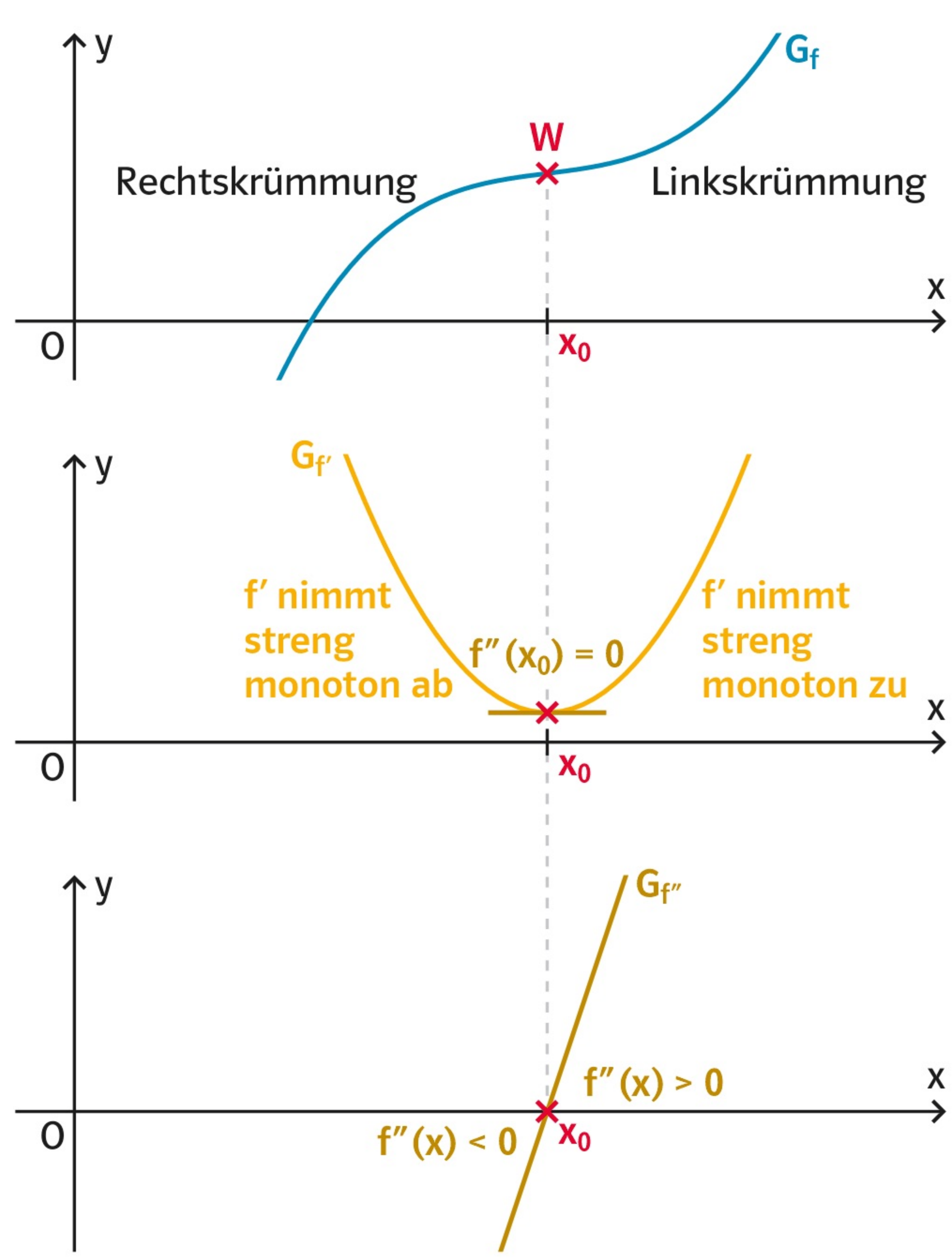
Definition: Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ differenzierbar. Eine Stelle $x_0 \in I$, bei der der Graph von f sein Krümmungsverhalten ändert, heißt **Wendestelle** von f.
Der zugehörige Punkt $W(x_0 | f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** von G_f.
Die Tangente an den Graphen im Wendepunkt heißt **Wendetangente**.



Die Wendetangente durchsetzt den Graphen im Wendepunkt.

Um eine Wendestelle einer Funktion f zu finden, sucht man eine Stelle x_0, an der ihr Graph G_f sein Krümmungsverhalten ändert.

Mit dem Krümmungsverhalten von G_f ändert sich an der Wendestelle x_0 auch das Monotonieverhalten der Ableitung f′.
Im Bereich der Rechtskrümmung des abgebildeten Graphen G_f nimmt f′ streng monoton ab, im Bereich der Linkskrümmung von G_f nimmt f′ streng monoton zu und damit hat die erste Ableitung ein Extremum an der Stelle x_0.



Wendestellen können folglich mithilfe der zweiten Ableitung ermittelt werden, denn Extremstellen von f′ kann man bestimmen, indem man die Nullstellen der zweiten Ableitung f″ ermittelt und zeigt, dass f″ an diesen Stellen einen Vorzeichenwechsel hat.
Für das Minimum von f′ an der Stelle x_0 hat f″ einen Vorzeichenwechsel von − nach +.

Satz: Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in I$.
Die Stelle x_0 ist genau dann eine **Wendestelle** von f, wenn gilt:
$f''(x_0) = 0$ und f″ wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen.

Wechselt f″ bei x_0 das Vorzeichen nicht, dann ändert der Graph von f an dieser Stelle sein Krümmungsverhalten nicht und es liegt kein Wendepunkt vor.
Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ garantiert folglich nicht, dass die Stelle x_0 eine Wendestelle ist; sie ist notwendig, aber nicht hinreichend. Erst $f''(x_0) = 0$ und gleichzeitig der Vorzeichenwechsel von f″ an der Stelle x_0 sind hinreichend für die Existenz einer Wendestelle.

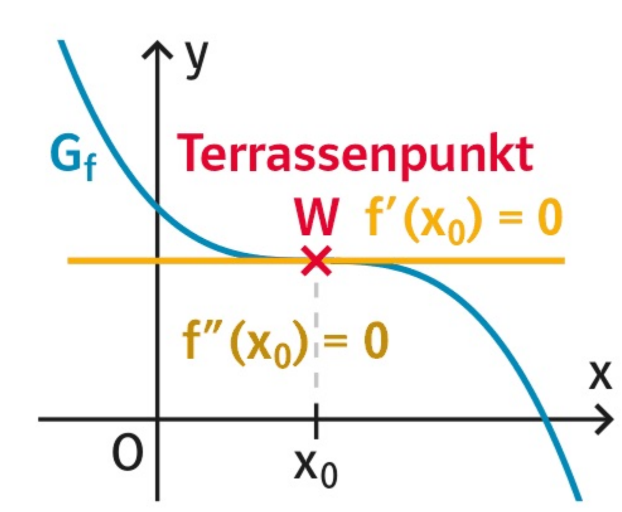
Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle x_0:
$f''(x_0) = 0$ **und** VZW von f″ bei x_0

Wendestellen und dritte Ableitung
Da die Wendestellen einer Funktion f die Extremstellen ihrer ersten Ableitung f′ sind, kann man auch für die Untersuchung von Wendestellen anstelle des Vorzeichenwechselkriteriums ein Ableitungskriterium verwenden.
Für eine Funktion f, die in einem Intervall I dreimal differenzierbar ist, und $x_0 \in I$ gilt dann:
Wenn $f''(x_0) = 0$ ist und $f'''(x_0) \neq 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 eine Wendestelle.

Zweite hinreichende Bedingung für eine Wendestelle x_0:
$f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

Wie für Extremstellen gezeigt, folgt jedoch aus $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$ nicht, dass an der Stelle x_0 kein Wendepunkt vorliegt.
Für die Funktion f mit $f(x) = x^5$ gilt beispielsweise $f''(0) = f'''(0) = 0$, aber $f''(x)$ hat bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel. Somit hat f an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.

Bemerkung:
Gilt an einer Wendestelle x_0 zusätzlich noch $f'(x_0) = 0$, so liegt in $W(x_0 | f(x_0))$ ein Terrassenpunkt vor. Terrassenpunkte sind folglich Wendepunkte, deren Wendetangente parallel zur x-Achse verläuft.

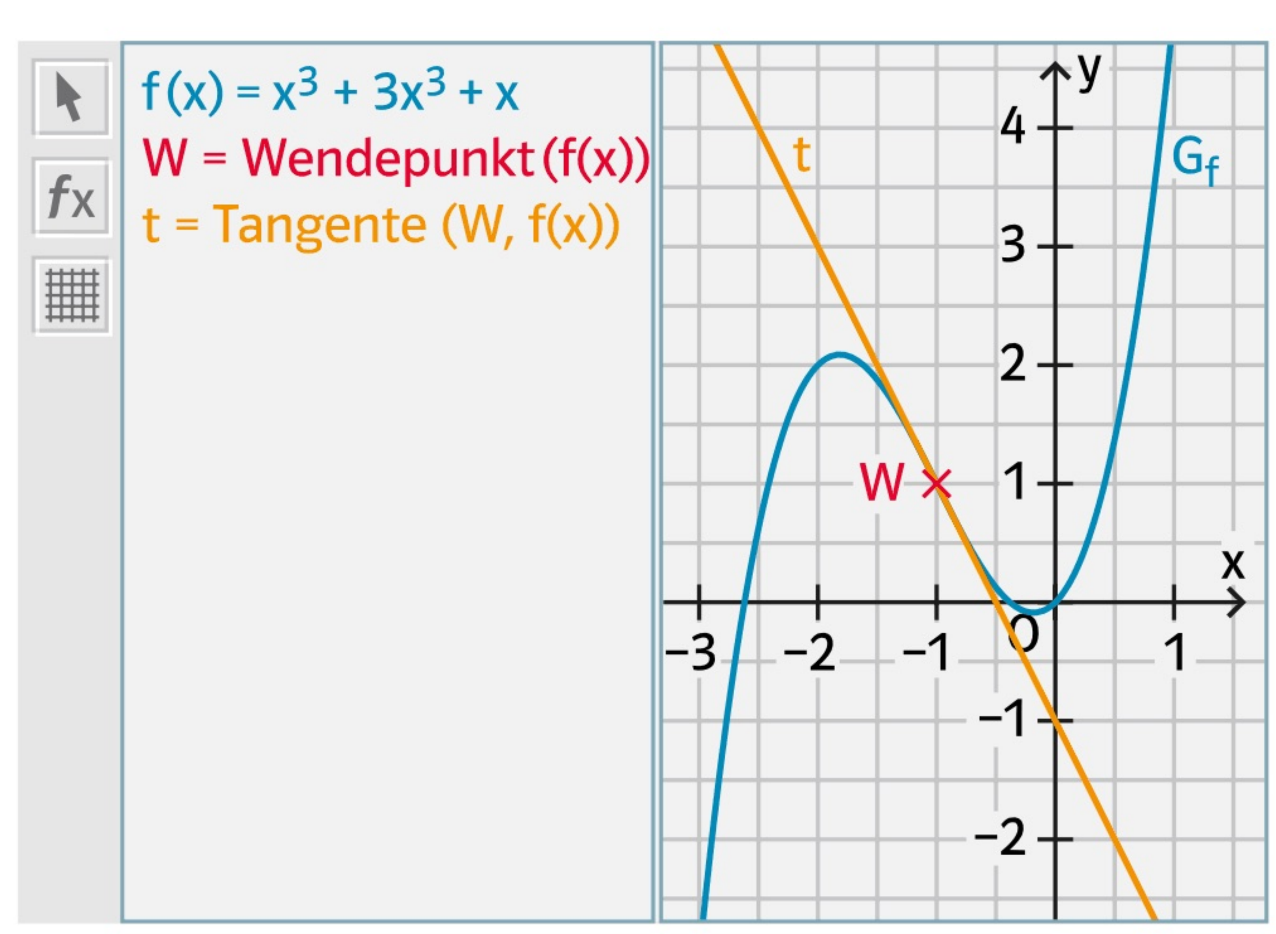


Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_f und die Gleichung der Wendetangente in W. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

Lösung

Es ist $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$, $f''(x) = 6x + 6$
und $f'''(x) = 6$.
Wendepunkt: $f''(x) = 0$
$\Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$.
Es gilt $f'''(-1) = 6 \neq 0$.
Somit ist $x = -1$ eine Wendestelle und mit
$f(-1) = 1$ ergibt sich $W(-1|1)$.
Wendetangente: $y = m \cdot x + t$.
Mit $m = f'(-1) = -2$ und $W(-1|1)$ folgt
$1 = -2 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = -1$.
Gleichung der Wendetangente: $y = -2x - 1$.



Beispiel 2

Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{3}{8}x^4$ und geben Sie das Krümmungsverhalten von G_f an.

Lösung

$f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3$ und $f''(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2$

Wendestellen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x - 4{,}5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 4{,}5$.

Da $f''(x) < 0$ ist für $x < 4{,}5$ und $f''(x) > 0$ für $x > 4{,}5$, hat f″ nur an der Stelle $x = 4{,}5$ einen Vorzeichenwechsel. Somit ist $x_2 = 4{,}5$ eine Wendestelle von f.
Krümmungsverhalten: Da $f''(x) < 0$ für $x < 4{,}5$ gilt, ist G_f in $]-\infty; 4{,}5]$ rechtsgekrümmt und da $f''(x) > 0$ für $x > 4{,}5$ gilt, ist G_f in $[4{,}5; +\infty[$ linksgekrümmt.

Beispiel 3

Eine S-Bahn fährt auf einem Streckenabschnitt. Die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit t wird näherungsweise durch die Funktion f beschrieben mit $f(t) = -\frac{1}{3000}t^3 + \frac{3}{20}t^2$, $0 \leq t \leq 300$ (t in s, f(t) in m).



a) Beschreiben Sie die Bedeutung der Ableitungsfunktion im Anwendungskontext.
b) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit der S-Bahn und begründen Sie ihre Vorgehensweise.

Lösung

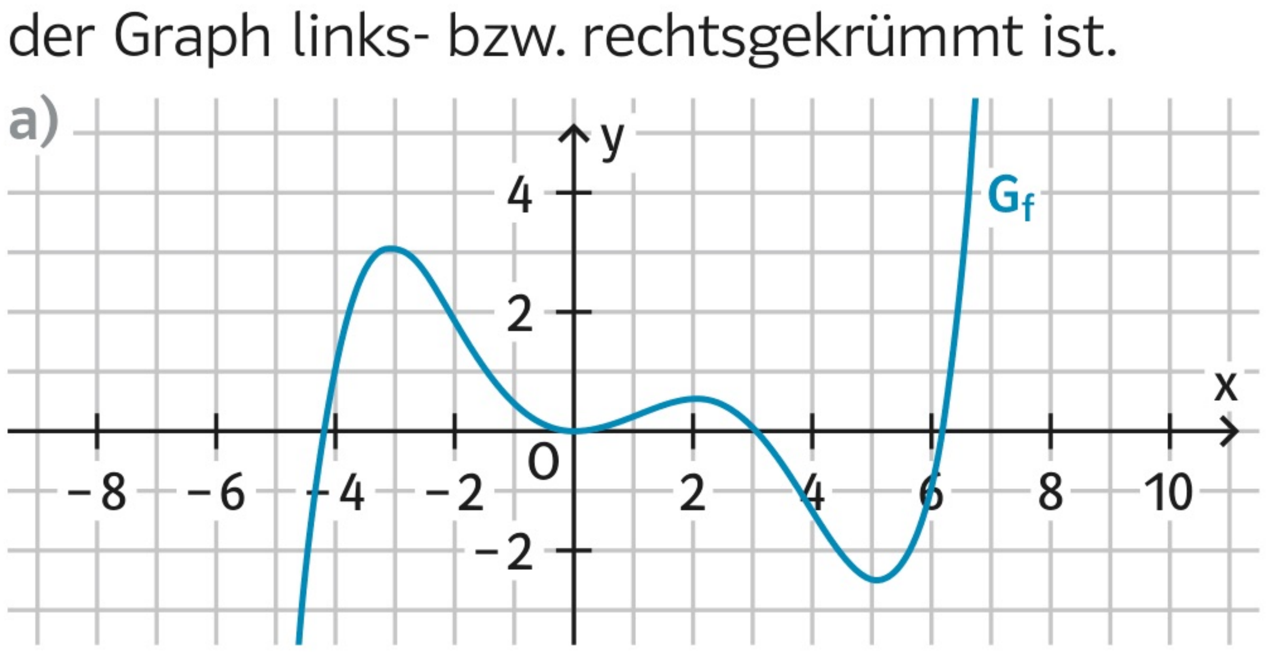
a) Die Ableitungsfunktion f′ mit dem Funktionsterm f′(t) gibt die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in $\frac{m}{s}$ an.
b) Gesucht ist das Maximum der Ableitungsfunktion f′.
f′ hat ein lokales Maximum an der Stelle t_0, wenn für die zweite Ableitung f″ gilt:
$f''(t_0) = 0$ mit VZW von + nach −.
$f'(t) = -\frac{1}{1000}t^2 + \frac{3}{10}t$ und $f''(t) = -\frac{1}{500}t + \frac{3}{10}$
$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{500}t = \frac{3}{10} \Rightarrow t = 150$
Es ist $f''(t) > 0$ für $t < 150$ und $f''(t) < 0$ für $t > 150$.
Also hat f′(t) an der Stelle $t = 150$ ein lokales Maximum $f'(150) = 22{,}5$.
Die Funktion f ist in einem abgeschlossenen Intervall definiert; daher müssen auch die Ränder der Definitionsmenge betrachtet werden. Da $f'(0) = f'(300) = 0$ gilt, wird die maximale Geschwindigkeit nach 150 Sekunden erreicht. Sie beträgt $22{,}5\,\frac{m}{s}$.

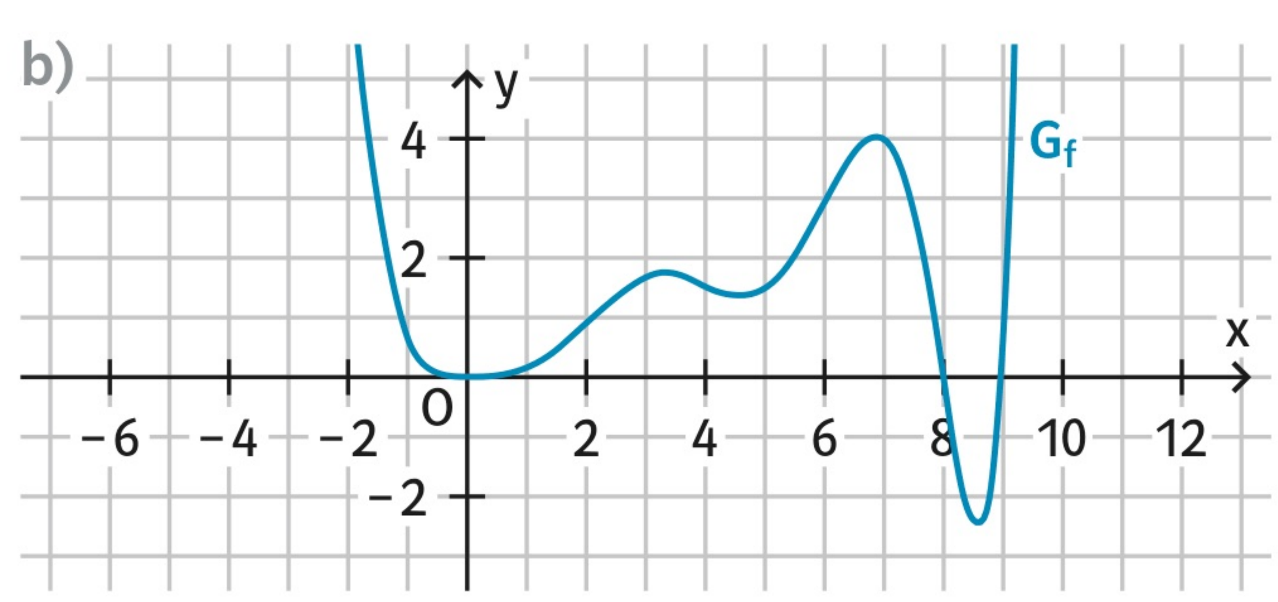
Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktion f.

a) $f: x \mapsto 3x^4 - 2x^2$
b) $f: x \mapsto 2x^5 - 3x^4 + x$
c) $f: x \mapsto 7x^3 + 3x^2$
d) $f: x \mapsto 0{,}5x^2(x^2 - 30)$
e) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x - 12)$
f) $f: x \mapsto -x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$

2 Geben Sie für den Graphen die Koordinaten der Wendepunkte an sowie die Intervalle, in denen der Graph links- bzw. rechtsgekrümmt ist.

a)


b)


3 Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f. Bestimmen Sie jeweils die Steigung der Tangente an G_f im Wendepunkt und entscheiden Sie, ob ein Terrassenpunkt vorliegt.

a) $f(x) = x^3 + x$
b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$
c) $f(x) = x^4 + 4x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 2$

4 Ordnen Sie jedem gelben Kärtchen ein graues Kärtchen so zu, dass sich auf dem grauen Kärtchen eine Folgerung aus dem gelben Kärtchen befindet.



5 Ermitteln Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte sowie der Wendepunkte des Graphen von f. Geben Sie die größtmöglichen Intervalle an, in denen G_f links- bzw. rechtsgekrümmt ist, und skizzieren Sie den Verlauf von G_f.

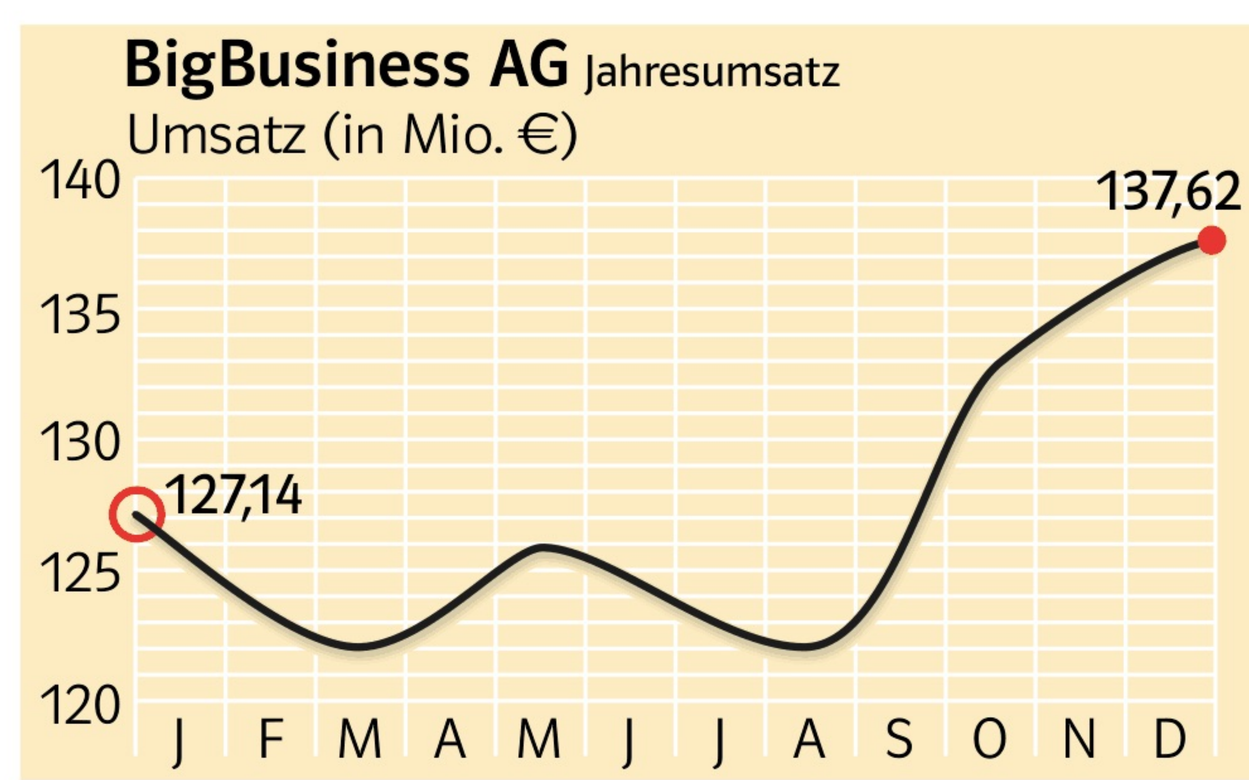
a) $f(x) = 2x^3 - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2$ c) $f(x) = (x^2 - 3)^2 - 1$

d) $f(x) = 125x^5 + x$ e) $f(x) = (x^2 - x)^2$ f) $f(x) = (x - 2)^3 + 4$

6 Auf der Hauptversammlung einer Aktiengesellschaft zeigt der Vorstand die Entwicklung des Firmenumsatzes des vergangenen Geschäftsjahres.

a) Geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt etwa die größte Umsatzsteigerung war bzw. der stärkste Umsatzrückgang.

b) Stellen Sie eine Prognose für die zukünftige Entwicklung des Umsatzes auf, wenn der Graph in den folgenden Monaten sein Krümmungsverhalten nicht ändert.

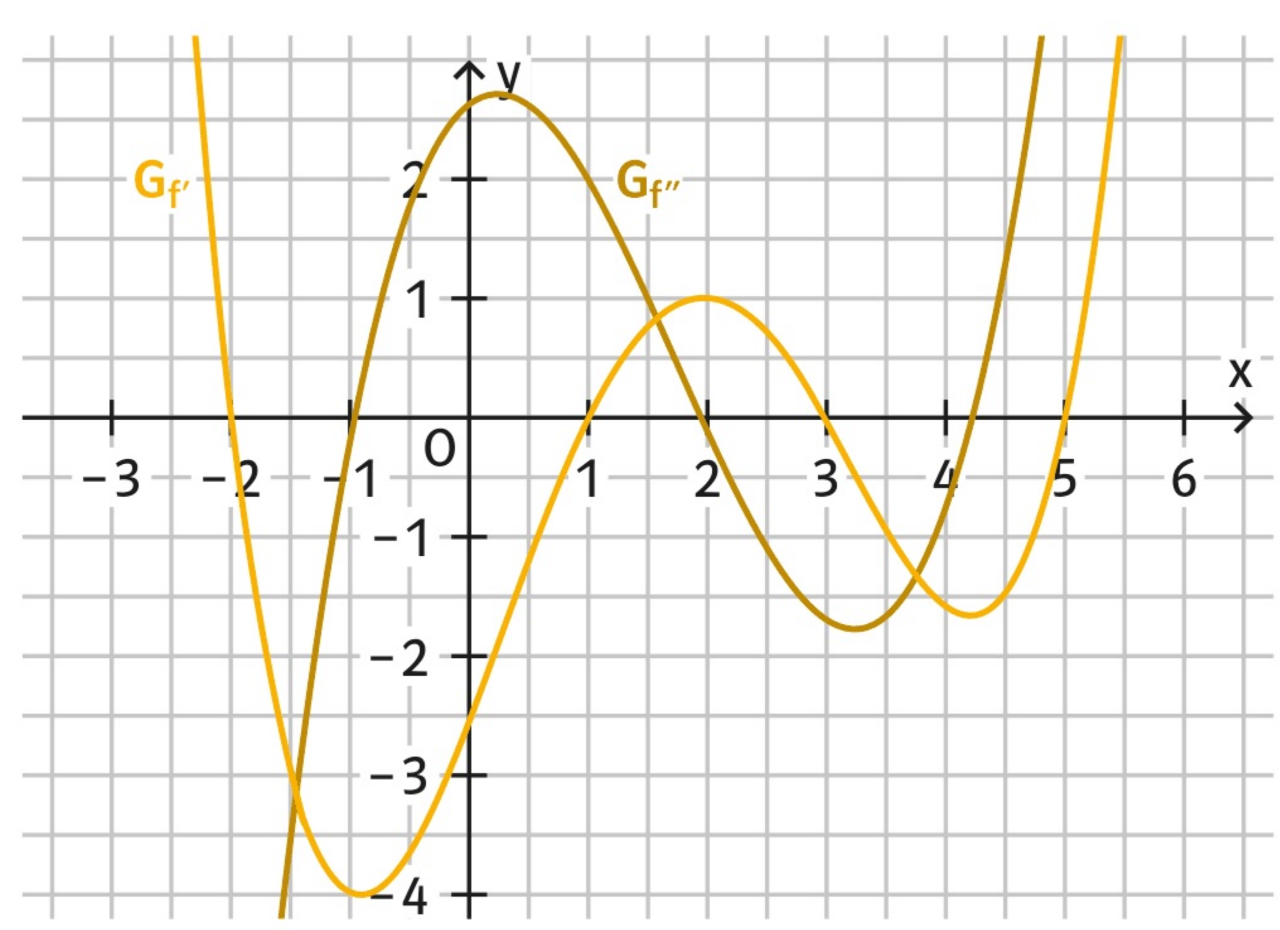


7 Abgebildet sind die Graphen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion f′ und f″ einer Funktion f.

a) Bestimmen Sie mithilfe beider Graphen die Extremstellen von f sowie die Art der Extrema.

b) Erläutern Sie den Unterschied zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung für eine Wendestelle.

c) Ermitteln Sie die Wendestellen von f und geben Sie jeweils an, wie der Graph von f sein Krümmungsverhalten ändert.



8 Untersuchen Sie den Graphen von f auf Wendepunkte. Ermitteln Sie in allen Wendepunkten die Gleichung der Wendetangente und geben Sie an, ob ein Terrassenpunkt vorliegt.

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 5$ b) $f(x) = 2x^5 + 0{,}1x$ c) $f(x) = \frac{6}{5}x^5 - x^3 - x$

9 Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus der Ruhe wird der zurückgelegte Weg s (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) durch die Funktion s mit $s(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2$ mit konstanter Beschleunigung $a \in \mathbb{R}$ $\left(\text{in } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ beschrieben.

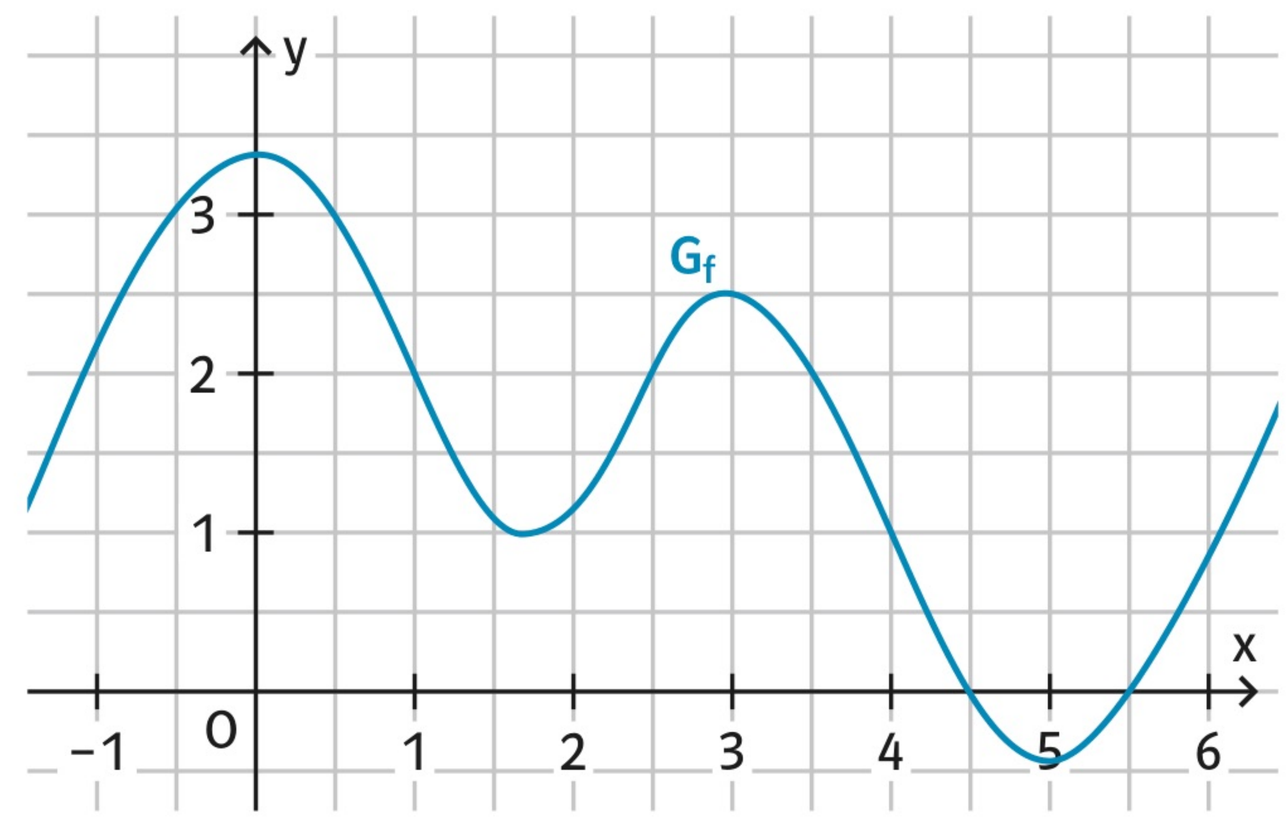
a) Begründen Sie, dass der Graph von s für $a > 0$ immer linksgekrümmt ist, und erläutern Sie, was dies für die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$ bedeutet.

b) Ein Fahrzeug fährt an einer Ampel an, beschleunigt gleichmäßig und bremst dann gleichmäßig vor einer Baustelle wieder ab. Skizzieren sie den möglichen Verlauf eines Graphen, der den zurückgelegten Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Test 1

Lösungen | Seite 218

10 Lesen Sie am Graphen der Funktion f deren Wendestellen ab und begründen Sie jeweils, ob an der Wendestelle ein Maximum oder ein Minimum der Ableitung f′ vorliegt. Geben Sie für $-1 \leq x \leq 6$ die größtmöglichen Intervalle an, in denen der Graph links- bzw. rechtsgekrümmt ist.



11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4{,}5x$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f.

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente.

12 Die Funktion f beschreibt die Oberflächentemperatur eines Sees (in °C) in Abhängigkeit von der Zeit (in Tagen seit Beobachtungsbeginn). Wählen Sie jeweils alle Kärtchen aus, die eine der Situationen (1), (2) oder (3) vollständig beschreiben.

(1) Nach 24 Tagen beträgt die Temperatur 4 °C.

(2) Die höchste Temperatur wird mit 24 °C nach vier Tagen gemessen.

(3) Der größte Temperaturanstieg ist nach 24 Tagen.



A $f(4) = 24$

B $f''(4) < 0$

C $f'(24) > 0$

D $f(24) = 4$

E $f''(24) = 0$

F $f'(4) = 0$

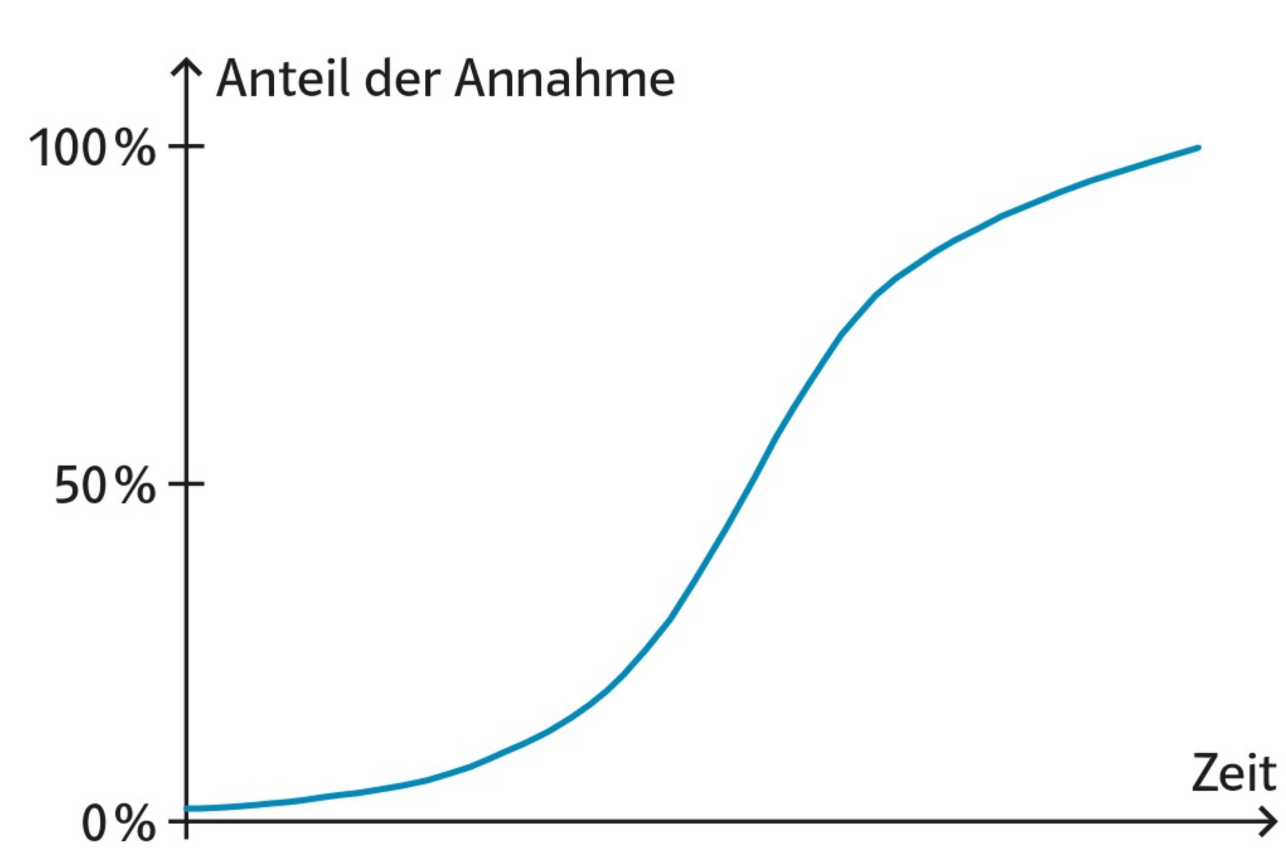
G $f'''(24) \neq 0$

13 Aus einer Funktion f wird eine neue Funktion g gebildet. Entscheiden Sie, ob g dieselben Extrem- und Wendestellen wie f hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $g(x) = f(x) + 3$ b) $g(x) = 2 \cdot f(x)$ c) $g(x) = -\frac{1}{3} \cdot f(x)$ d) $g(x) = f(x - 5)$

14 Die Entwicklung der Nutzerzahlen einer neuen Social-Media-App in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich mit der sogenannten Innovationsadoptionskurve beschreiben.

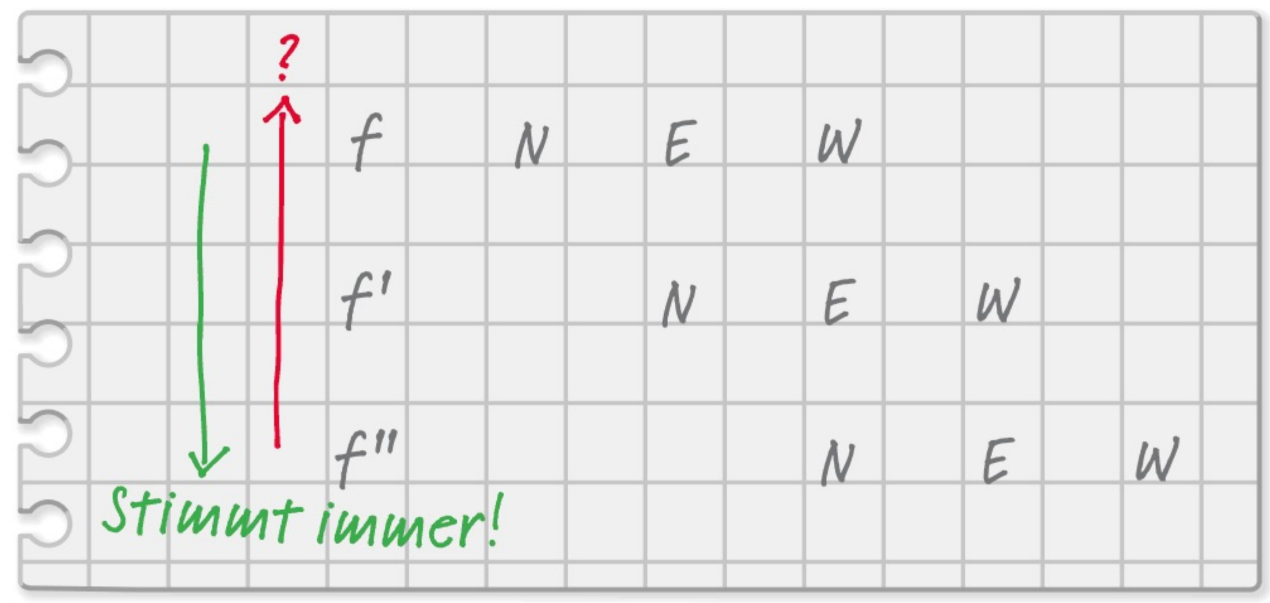
a) Interpretieren Sie das Krümmungsverhalten des Graphen im Sachzusammenhang. Erläutern Sie dabei insbesondere die Bedeutung der zunehmenden bzw. abnehmenden Steigung des Graphen und die des Wendepunktes.



b) Recherchieren Sie mögliche Gründe dafür, dass die Kurve für nahezu alle Innovationen von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung übergeht.

Der Begriff Adoption bezeichnet in diesem Fall die Annahme einer Innovation durch den Kunden.

15 Clemens hat eine Faustregel erstellt, wie man von den Eigenschaften einer Funktion f auf die der Ableitungen f′ und f″ schließen kann. N bedeutet dabei Nullstelle, E innere Extremstelle und W Wendestelle.
Hat beispielsweise die Funktion f eine Wendestelle, so hat f′ dort eine Extremstelle.



a) Begründen Sie mithilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Extrem- und Wendestellen, dass die Folgerung „abwärts" immer gilt.
b) „Aufwärts" gilt die Regel nicht. Begründen Sie dies gegenseitig anhand eines Beispiels.
c) Diskutieren Sie, wie man die Faustregel ergänzen könnte, sodass sie in beide Richtungen Gültigkeit hat.

16 Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 10$ beschreibt für $x \in [6; 20]$, x in Stunden, näherungsweise die Lufttemperatur in Grad Celsius von 6 Uhr bis 20 Uhr im Laufe eines Tages.
a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperaturänderung von 9 Uhr bis 11 Uhr.
b) Ermitteln Sie die momentane Temperaturänderung um 10 Uhr.
c) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der die höchste Temperatur erreicht wurde.
d) Ermitteln Sie die Wendestelle von f sowie die Steigung der Wendetangente und erläutern Sie jeweils die Bedeutung im Sachzusammenhang.
e) Zeichnen Sie den Graphen von f mit einem Funktionenplotter und erläutern Sie die Bedeutung einer Rechts- bzw. Linkskrümmung für die Temperaturänderung.

Test 2

Lösungen | Seite 218

17 Die Anzahl der Besucher eines Schulfests von 8 Uhr bis 17 Uhr kann näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = -t^3 + 24t^2 - 117t + 182$ beschrieben werden (t in Stunden, $8 \le t \le 17$).
a) Bestimmen Sie die Anzahl der Besucher, die um 11 Uhr auf dem Schulfest waren.
b) Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die Anzahl der Besucher fortwährend ansteigt.
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die meisten bzw. die wenigsten Besucher auf dem Schulfest waren, und berechnen Sie jeweils die Besucheranzahl.
d) Ermitteln Sie die Uhrzeit, zu der die Zunahme der Besucheranzahl am größten war.

18 Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f_a mit $f_a(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 4$.
a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes $W_a(x_w \mid f_a(x_w))$ des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.
b) Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis mit einer dynamischen Mathematiksoftware. Verwenden Sie einen Schieberegler für a und zeichnen sie die Spur der Wendepunkte W_a.
c) Bestimmen Sie die Funktion, deren Graph alle Wendepunkte W_a enthält. Der Graph, auf dem alle Wendepunkte W_a liegen, heißt Ortskurve (oder Ortslinie) der Wendepunkte. Überprüfen Sie, ob die Spur der Wendepunkte auf Ihrer rechnerisch bestimmten Ortskurve verläuft.

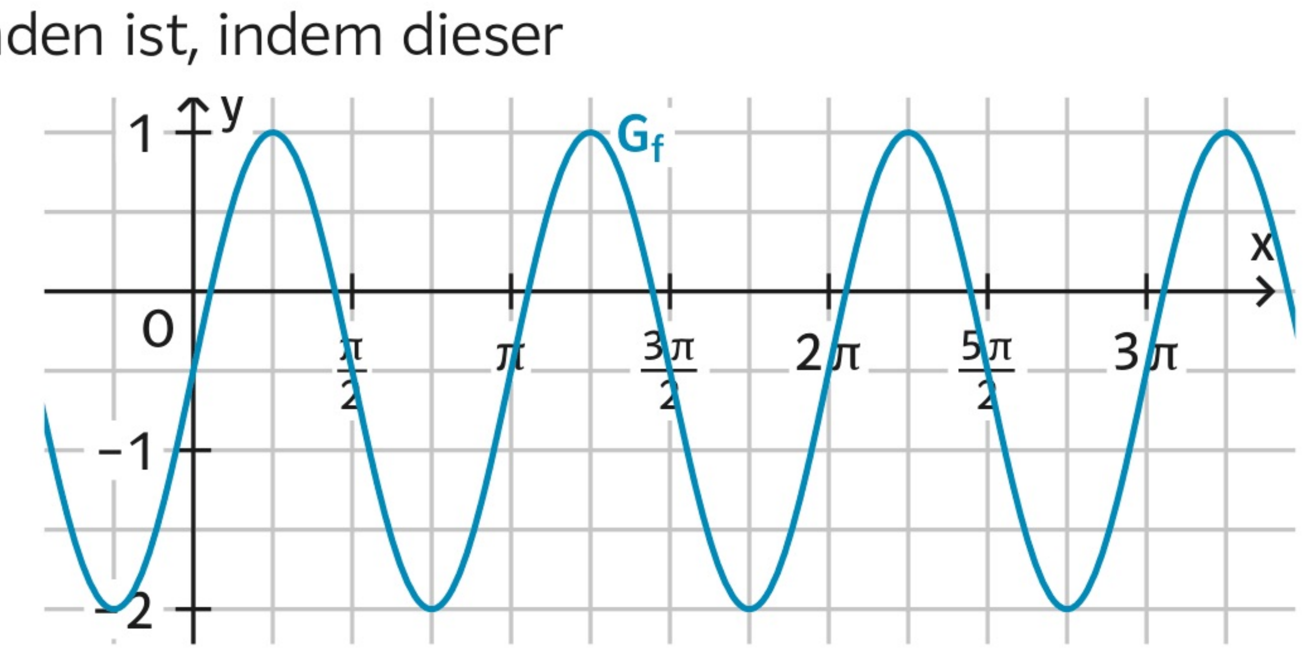
Hinweis zu Aufgabe 18:
Zur Bestimmung des Funktionsterms für die Ortskurve löst man die Gleichung für die Wendestelle x_w nach a auf und setzt dies im Term von f_a für a ein.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 218

G 19 Geben Sie den Funktionsterm und die Amplitude der Funktion g an, deren Graph aus dem Graphen der Sinusfunktion $f\colon x \mapsto \sin(x)$ entstanden ist, indem dieser
a) mit dem Faktor 4 in y-Richtung gestreckt wurde,
b) um −3 in y-Richtung verschoben wurde,
c) um 2,5 in x-Richtung verschoben wurde.

G 20 Geben Sie zu dem abgebildeten Graphen einen Funktionsterm der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx) + d$ an.



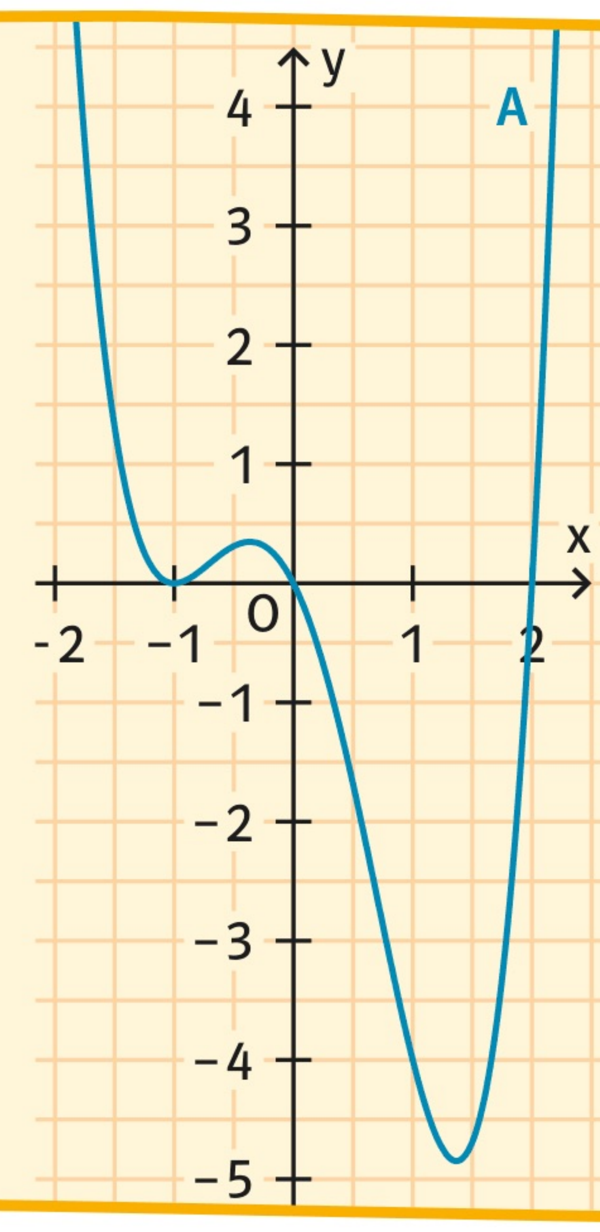
5 Untersuchung ganzrationaler Funktionen

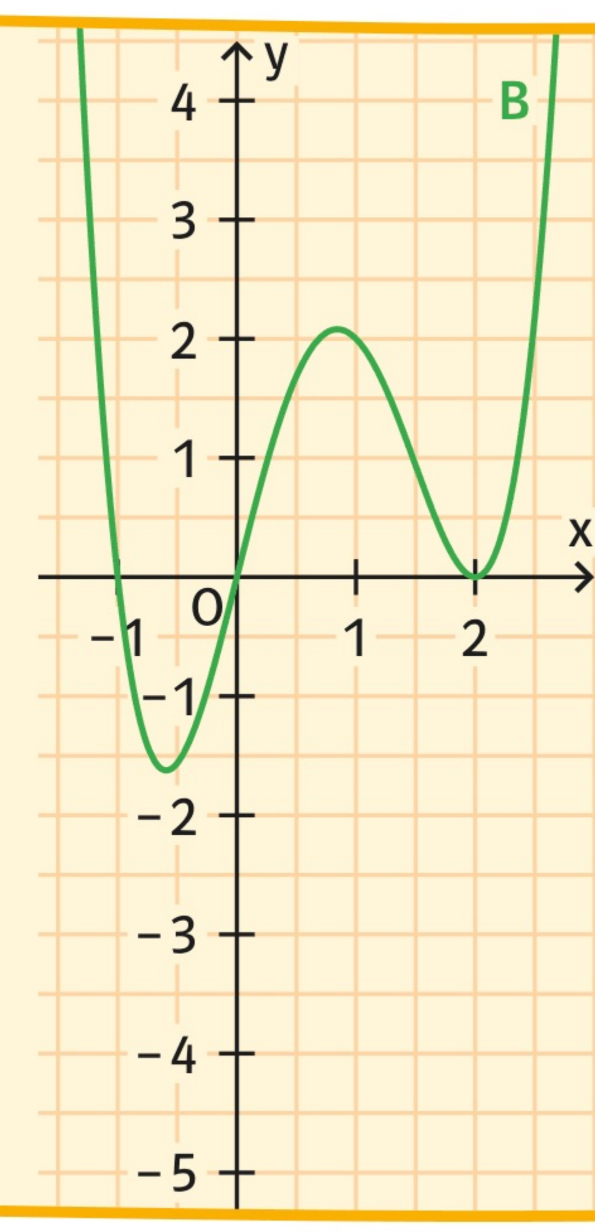
Zu jeder der angegebenen Funktionen gehört einer der Graphen A, B oder C. Ordnen Sie die Graphen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

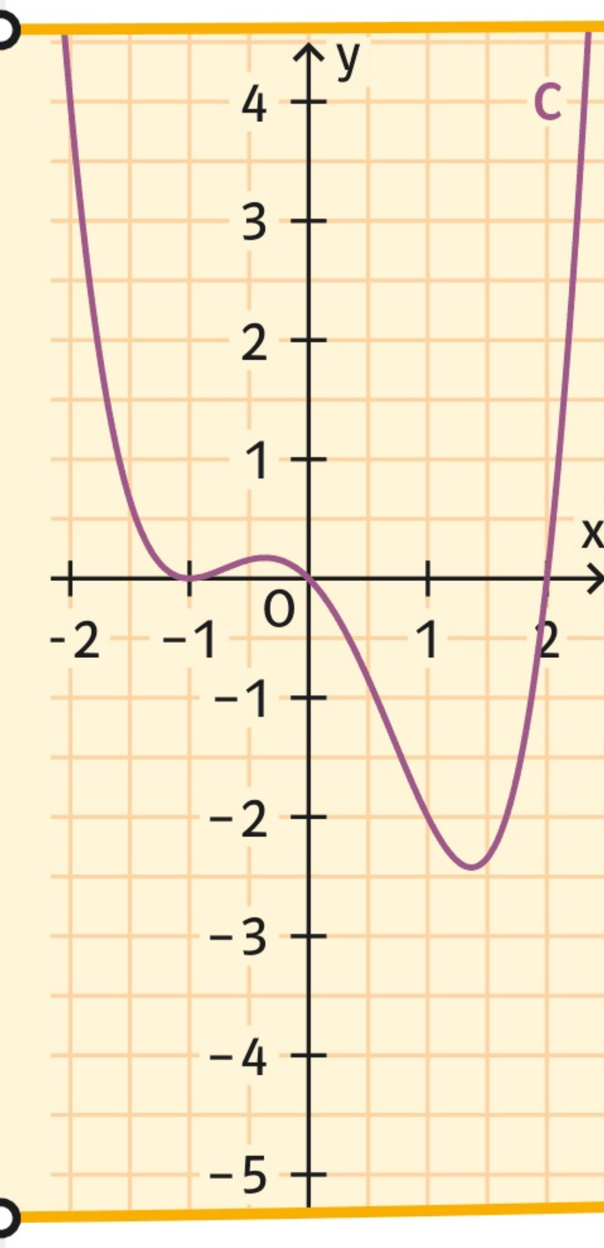
$f: x \mapsto x^4 - 3x^2 - 2x$

$g: x \mapsto x^4 - 3x^3 + 4x$

$h: x \mapsto 0{,}5x^4 - 1{,}5x^2 - x$







Mithilfe des Funktionsterms können charakteristische Eigenschaften einer Funktion bzw. ihres Graphen ermittelt werden. Beispiele hierfür sind die Symmetrie des Graphen, die Koordinaten seiner Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die der Extrem- und Wendepunkte und das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$. Dies sind mögliche Aspekte einer Funktionsuntersuchung.

Nachfolgend wird für eine ganzrationale Funktion f eine Funktionsuntersuchung durchgeführt.

Zur Erinnerung:
Für ganzrationale Funktionen ist die maximale Definitionsmenge ℝ.

Funktion f

$f: x \mapsto 3x^4 + 8x^3 + 6x^2$

Symmetrie

Symmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$.
Symmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = 3(-x)^4 + 8(-x)^3 + 6(-x)^2 = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
$-f(x) = -(3x^4 + 8x^3 + 6x^2) = -3x^4 - 8x^3 - 6x^2$
Da $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ gilt, besitzt der Graph weder eine Symmetrie zur y-Achse noch eine Symmetrie zum Ursprung.

Kürzer: Da f(x) gerade und ungerade Exponenten enthält, besitzt der Graph weder eine Symmetrie zur y-Achse noch eine Symmetrie zum Ursprung.

Schnittpunkte mit der x-Achse

Die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ sind die Nullstellen von f.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2(3x^2 + 8x + 6) = 0$
Nullstellen:
$x_1 = 0$ doppelt (G_f berührt hier die x-Achse)
$3x^2 + 8x + 6 = 0$ hat keine Lösung,
da bei $\frac{-8 \pm \sqrt{64 - 72}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{-8}}{6}$
die Diskriminante $-8 < 0$ ist.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_{x_1}(0\,|\,0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse

$S_y(0\,|\,f(0))$

$f(0) = 3 \cdot 0^4 + 8 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0\,|\,0)$.

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ zeigen die Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion dasselbe Verhalten wie der Summand mit dem höchsten Exponenten.

Der Summand von f(x) mit dem höchsten Exponenten ist $3x^4$. Also gilt
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Kennt man bei ganzrationalen Funktionen das Verhalten im Unendlichen und die Nullstellen mit ihren Vielfachheiten, kann man bereits den groben Verlauf des Graphen skizzieren.

Extremstellen und Extrempunkte

Notwendige Bedingung für eine innere Extremstelle x_0:
$f'(x_0) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow 12x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 12x \cdot (x+1)^2 = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -1$

Hinreichende Bedingung für eine innere Extremstelle x_0:
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$:
$f(x_0)$ ist lokales Maximum bzw.
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$:
$f(x_0)$ ist lokales Minimum
oder
$f'(x_0) = 0$ und f' wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen von − nach + (Minimumstelle) bzw.
$f'(x_0) = 0$ und f' wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen von + nach − (Maximumstelle).

$f''(x) = 36x^2 + 48x + 12$
$x_1 = 0$: $f''(x_1) = f''(0) = 12 > 0$
$\Rightarrow f(0) = 0$ ist lokales Minimum.
Tiefpunkt: $T(0|0)$.

$x_2 = -1$: $f''(x_2) = f''(-1) = 0$
$\Rightarrow$ Da f' an der Stelle $x_2 = -1$ keinen Vorzeichenwechsel hat, ist $f(-1) = 1$ kein Extremum.

Wendestellen und Wendepunkte

Notwendige Bedingung für eine Wendestelle x_0:
$f''(x_0) = 0$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow$
$36x^2 + 48x + 12 = 12 \cdot (3x^2 + 4x + 1) = 0$
$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$
$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3},\ x_4 = -1 = x_2.$

Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle x_0:
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$
oder
$f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen.

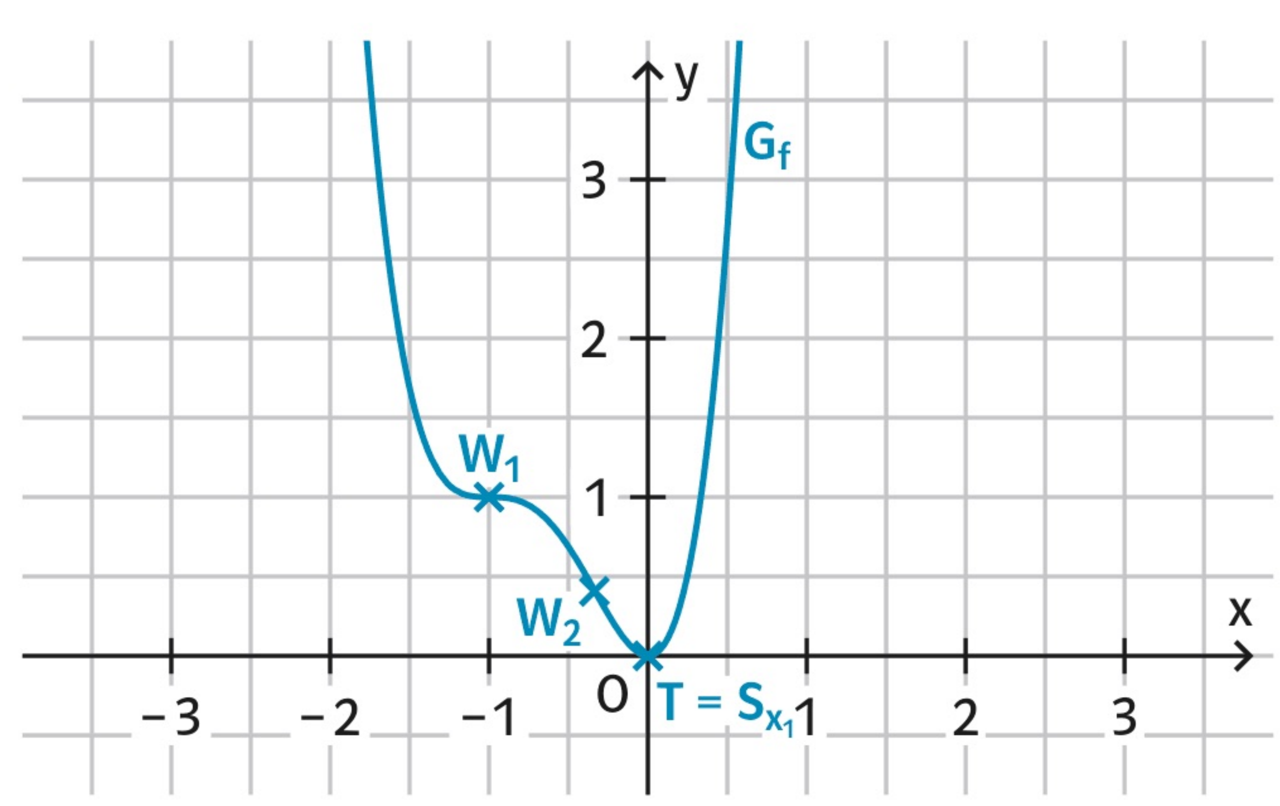
$f'''(x) = 72x + 48$
$x_2 = -1$: $f'''(x_2) = f'''(-1) = -24 \neq 0$
$x_3 = -\frac{1}{3}$: $f'''(x_3) = f'''\left(-\frac{1}{3}\right) = 24 \neq 0$
$\Rightarrow x_2$ und x_3 sind Wendestellen.
$f(-1) = 1;\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{27}$
Wendepunkte: $W_1(-1|1)$ und $W_2\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{11}{27}\right)$.

Gilt zusätzlich $f'(x_0) = 0$, dann liegt ein **Terrassenpunkt** vor.

Da zusätzlich $f'(-1) = 0$ gilt, ist $W_1(-1|1)$ ein Terrassenpunkt.

Graph

Zum Zeichnen werden die ermittelten Punkte eingetragen und gegebenenfalls zusätzliche Funktionswerte berechnet.



Untersuchung einer Funktion f bzw. ihres Graphen G_f auf charakteristische Eigenschaften:
- Untersuchung, ob G_f symmetrisch zum Ursprung bzw. zur y-Achse ist.
- Bestimmung der Nullstellen der Funktion mit ihrer Vielfachheit.
- Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse.
- Untersuchung des Verhaltens der Funktion für $x \to \pm\infty$.
- Bestimmung der Koordinaten von Extrem- und Wendepunkten von G_f.

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion $h\colon x \mapsto \frac{1}{300}x^4 - 0{,}08x^3 + 0{,}54x^2$. Untersuchen Sie, ob bei den Punkten $A(0|0)$, $B(9|h(9))$ und $C(3|h(3))$ des Graphen von h ein Tiefpunkt, ein Hochpunkt, ein Wendepunkt bzw. ein Terrassenpunkt vorliegt.

Lösung

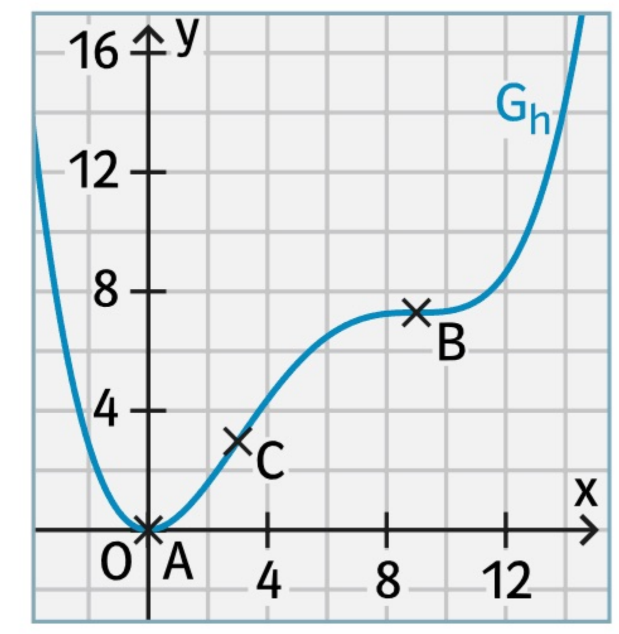
$h'(x) = \frac{1}{75}x^3 - 0{,}24x^2 + 1{,}08x$; $h''(x) = \frac{1}{25}x^2 - 0{,}48x + 1{,}08$

Da $h'(0) = 0$ und $h''(0) = 1{,}08 > 0$ gilt, ist der Punkt A ein Tiefpunkt.

Da $h'(9) = h''(9) = 0$ gilt und $h''(x)$ bei $x = 9$ einen Vorzeichenwechsel hat, ist der Punkt B ein Terrassenpunkt.

Da $h'(3) \neq 0$ und $h''(3) = 0$ gilt und $h''(x)$ bei $x = 3$ einen Vorzeichenwechsel hat, ist der Punkt C ein Wendepunkt.

Zur Kontrolle kann man den Graphen mit einem Funktionenplotter zeichnen:



Beispiel 2

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $g\colon x \mapsto (x-2)^2(x+1)$ auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf Extrem- und Wendepunkte.

Lösung

Schnittpunkte mit der x-Achse: $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1) = 0$.

$\Rightarrow$ Nullstellen: $x_1 = 2$ (doppelt) und $x_2 = -1$ (einfach), also $S_{x_1}(2|0)$; $S_{x_2}(-1|0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $g(0) = (-2)^2 \cdot 1 = 4 \Rightarrow S_y(0|4)$.

Extrempunkte: $g(x) = (x-2)^2(x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$; $g'(x) = 3x^2 - 6x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_3 = 0$

$g''(x) = 6x - 6$

$g''(0) = -6 < 0 \Rightarrow g(0) = 4$ ist lokales Maximum.

$g''(2) = 6 > 0 \Rightarrow g(2) = 0$ ist lokales Minimum.

$\Rightarrow$ Tiefpunkt: $T(2|0)$; Hochpunkt: $H(0|4)$.

Wendepunkte: $g''(x) = 6x - 6 = 6(x-1) = 0 \Rightarrow x_4 = 1$

$g'''(x) = 6$; $g'''(1) = 6 \neq 0$; $g(1) = 2$

$\Rightarrow$ Wendepunkt: $W(1|2)$.

Aufgaben

1 Untersuchen Sie den Graphen G_f der Funktion f auf Symmetrie, bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion, untersuchen Sie das Verhalten von f im Unendlichen und bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von G_f. Skizzieren Sie anschließend G_f.

a) $f\colon x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - x$ b) $f\colon x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2$ c) $f\colon x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + 3x$

d) $f\colon x \mapsto 4 - 5x^2 + 2x^4$ e) $f\colon x \mapsto (x+1)^2(x-2)$ f) $f\colon x \mapsto -2(x^3+1)^2$

2 Untersuchen Sie die Funktion f bzw. ihren Graphen G_f hinsichtlich Nullstellen, Symmetrieverhaltens, Verhaltens im Unendlichen sowie Extrem- und Wendepunkten. Überprüfen Sie anschließend Ihre Ergebnisse mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $f\colon x \mapsto 0{,}5x^3 - 9x^2 + 6x$ b) $f\colon x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)(x+3)^2$ c) $f\colon x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$

d) $f\colon x \mapsto 2(x^2+2)^2$ e) $f\colon x \mapsto (x^2-1)^3$ f) $f\colon x \mapsto x^4 - 4x^2 + 4$

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x - 1$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen G_f, die parallel zur Geraden g verläuft.

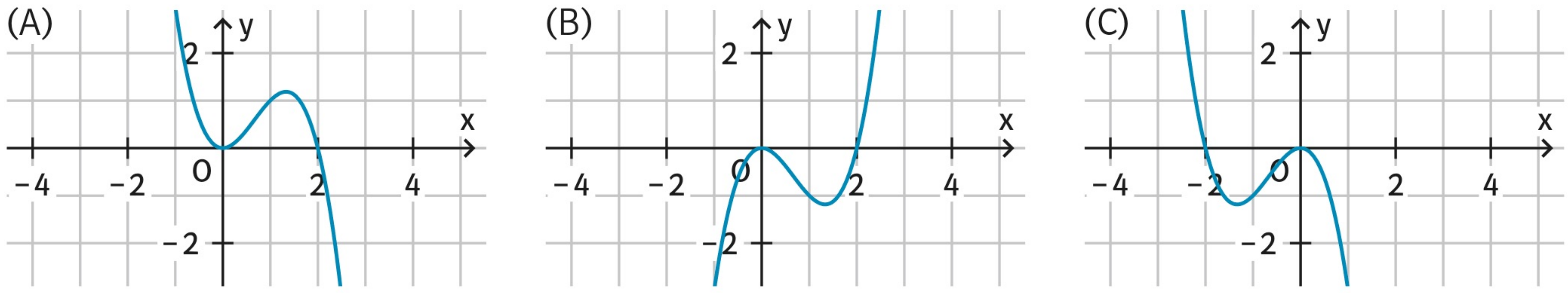
a) $g\colon y = -4x - 2$ b) $g\colon y = -x + 1$ c) $g\colon y = 5x - 1$

4 Untersuchen Sie den Graphen von f mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware auf Wendepunkte und beschreiben Sie sein Krümmungsverhalten.

a) $f(x) = 4x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 2x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3$ c) $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2$

5 Ordnen Sie ohne Rechnung den Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2 \cdot (x - 2)$, $g(x) = x^2 \cdot (2 - x)$ und $h(x) = -x^2 \cdot (2 + x)$ jeweils den richtigen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

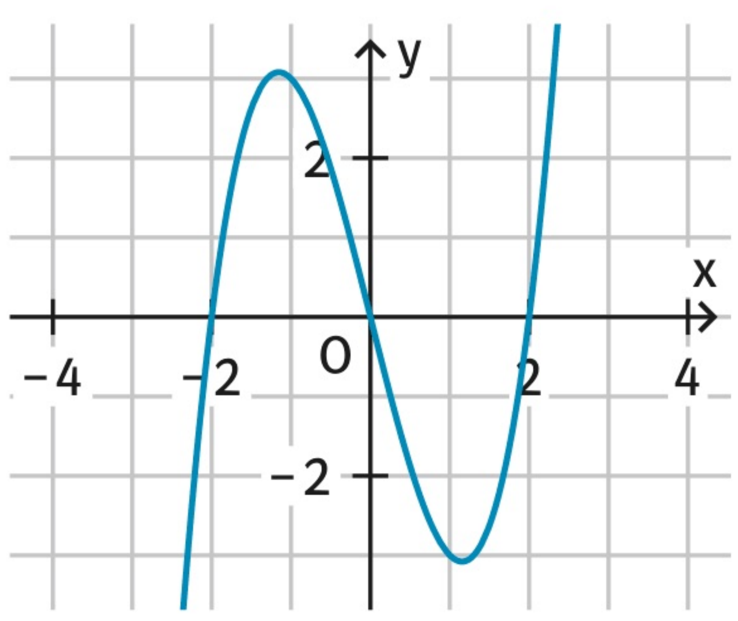
Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip



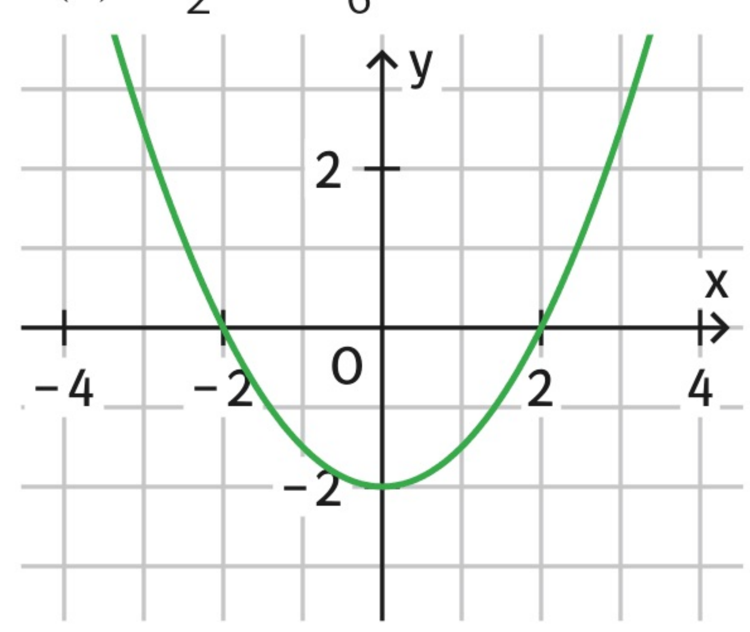
6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2$. Skizzieren Sie nur mithilfe der Nullstellen und einer Untersuchung des Verhaltens der Funktion für $x \to \pm\infty$ grob den Verlauf ihres Graphen G_f. Optimieren Sie anschließend Ihre Skizze, indem Sie die Koordinaten der Extrempunkte berechnen.

7 Begründen Sie mit drei unterschiedlichen Argumenten, dass der dargestellte Graph nicht der Graph der Ableitungsfunktion f′ sein kann, und vergleichen Sie Ihre Argumente.

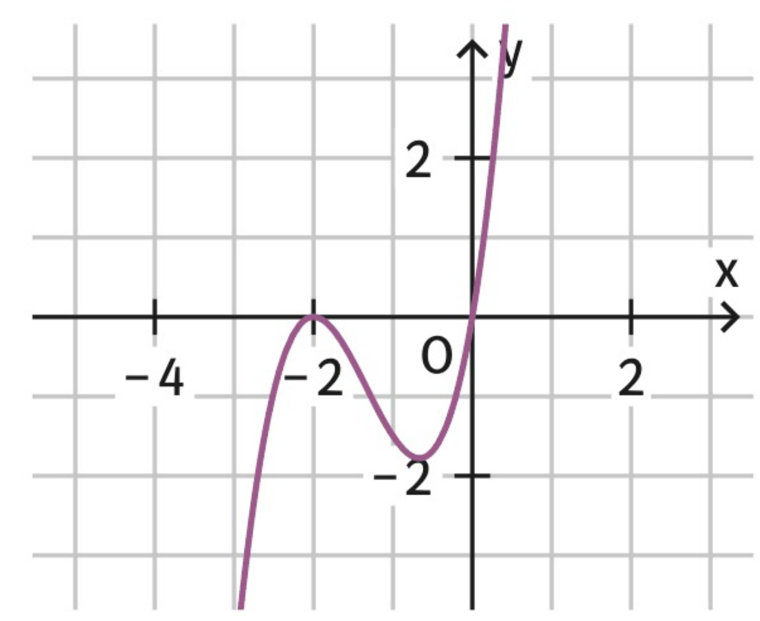
a) $f(x) = -x^4 - 8x^2 + 1$



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$



c) $f(x) = -0{,}75x^4 + 4x^3 - 6x^2$



8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Beschreiben Sie mithilfe der Begriffe Konvergenz bzw. Divergenz das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen sowie die der Extrem- und Wendepunkte von G_f und skizzieren Sie den Graphen von f.

c) Leiten Sie aus den in Teilaufgabe b) erhaltenen Ergebnissen Aussagen zur Monotonie und zum Krümmungsverhalten ab.

d) Es soll nun die Funktion g mit $g(x) = f(x) + 3$ untersucht werden. Valentin meint, dass ihr Graph G_g nicht skizziert werden könne, da er die Nullstellen der Funktion g nicht berechnen könne. Julian behauptet, dass er den Graphen G_g ohne weitere Rechnung mithilfe der Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b) skizzieren könne. Beurteilen Sie die beiden Aussagen.

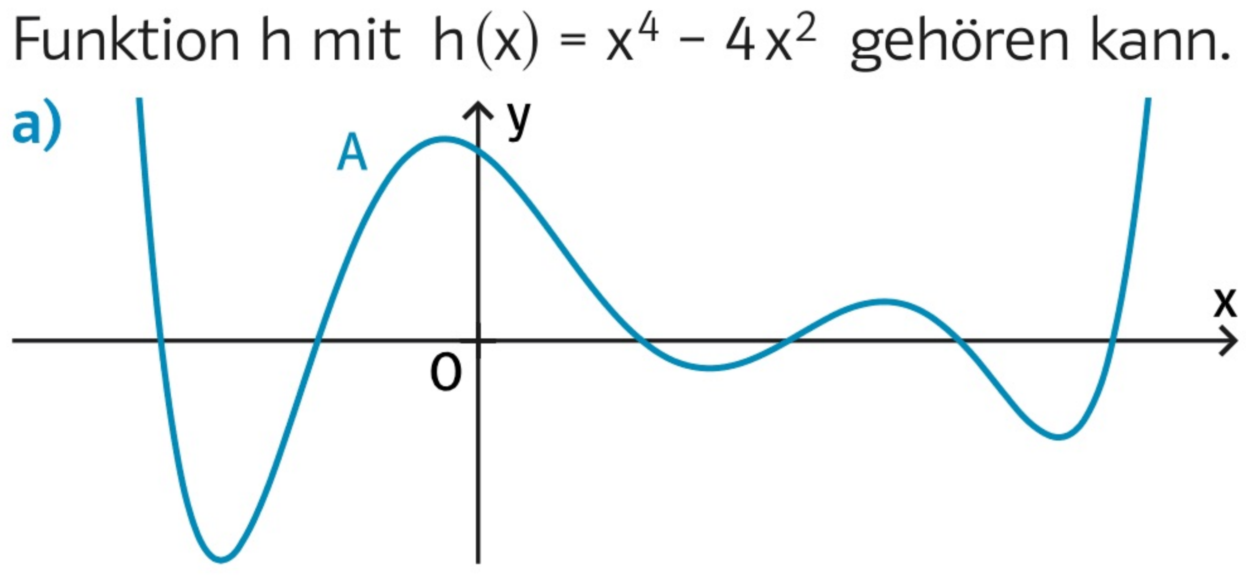
Test 1

Lösungen | Seite 218

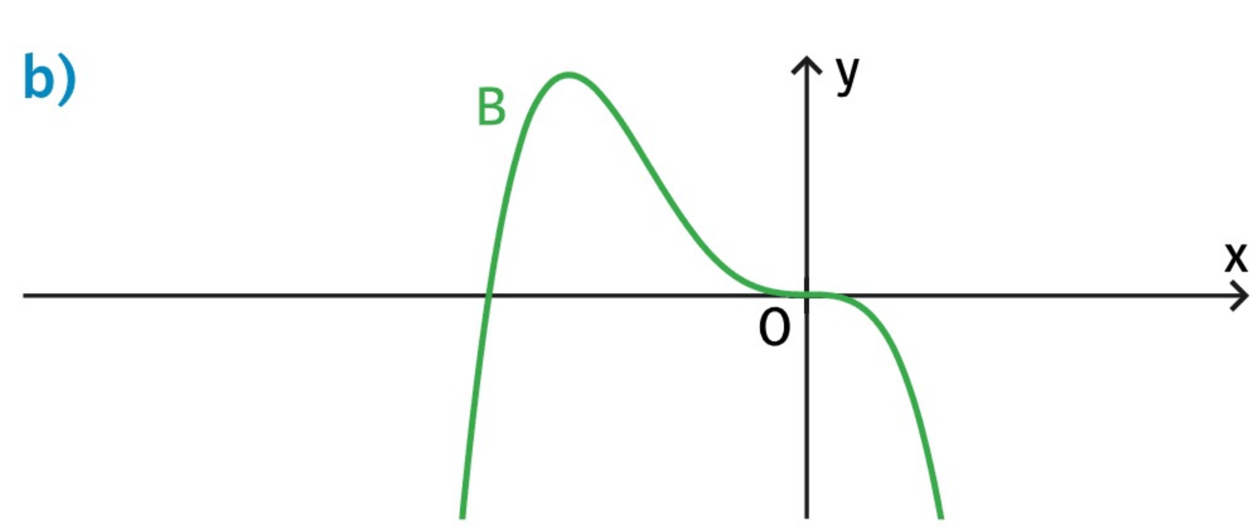
9 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 2x^2 - 24x)$ auf Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion sowie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von G_f. Skizzieren Sie anschließend den Graphen und überprüfen Sie ihn dann mithilfe eines Funktionenplotters.

10 Begründen Sie mit drei unterschiedlichen Argumenten, dass der dargestellte Graph nicht zur Funktion h mit $h(x) = x^4 - 4x^2$ gehören kann.

a)



b)



11 Ordnen Sie jedem Funktionsterm alle passenden Eigenschaften zu und begründen Sie.
(1) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (2) $f(x) = x^3 - 4x$ (3) $f(x) = 4x + 1$ (4) $f(x) = x^5$

- A: Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- B: Der Graph ist punksymmetrisch zum Ursprung.
- C: Die Funktion hat mindestens zwei Nullstellen.
- D: Die Funktion hat keine Extremstelle.
- E: Die Funktion hat genau zwei Extremstellen.
- F: Der Graph hat genau eine waagerechte Tangente.
- G: Der Graph hat einen Terrassenpunkt.

12 Begründen Sie, welche Eigenschaften des Graphen einer ganzrationalen Funktion f auch für den Graphen der Funktion g gelten, wobei $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt. Beschreiben Sie, wie sich gegebenenfalls die Eigenschaften, z.B. Art und Lage der Extrempunkte, verändern.
a) $g(x) = f(x) + c$ **b)** $g(x) = c \cdot f(x)$ **c)** $g(x) = f(x + c)$ **d)** $g(x) = f(c \cdot x)$

Strategie | Seite 187
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

13 a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{48}(x^4 - 24x^2 + 80)$ auf Symmetrie, bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die der Extrem- und Wendepunkte. Skizzieren Sie anschließend den Graphen und untersuchen Sie sein Krümmungsverhalten.
b) Geben Sie an, für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\frac{1}{48}(x^4 - 24x^2 + 80) = b$ vier, drei, zwei, eine oder keine Lösung hat.

14 Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_a: x \mapsto x^3 + ax^2 + 3x$.
a) Bestimmen Sie für die drei Funktionen f_1, f_3 und f_5 die Nullstellen, das Verhalten im Unendlichen sowie die Koordinaten der Extrem- und Terrassenpunkte des zugehörigen Graphen. Skizzieren Sie anschließend die Graphen und überprüfen Sie diese mithilfe eines Funktionenplotters.
b) Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Parameterwerte a die Funktionen f_a zwei Extrema, ein bzw. kein Extremum besitzen.

15 Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_t: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10}t\right)x^2 + 5x + 2t$ mit dem Graphen G_t.
a) Zeichnen Sie für $t = 10$ und $t = -10$ die Graphen G_{10} und G_{-10} mithilfe eines Funktionenplotters.
b) Berechnen Sie, für welchen Wert von t der Graph von f_t den Wendepunkt auf der y-Achse hat.

16 Durch heftige Niederschläge können in Flüssen starke Wasserstandsschwankungen auftreten. Der Verlauf des Pegelstandes eines Flusses wurde unmittelbar nach einem Niederschlagsereignis erfasst. Der daraus berechnete Abfluss kann in den ersten sechs Tagen näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit $f(t) = 0{,}25t^3 - 3t^2 + 9t + 4$ (t in Tagen nach dem Niederschlagsereignis, f(t) in $\frac{m^3}{s}$).
a) Berechnen Sie, wann der Abfluss am größten ist, und bestimmen Sie diesen Wert.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f und erklären Sie die Bedeutung der Wendetangente an den Graphen von f in diesem Sachzusammenhang.



17 Beurteilen Sie, ob die Aussage für eine ganzrationale Funktion wahr oder falsch ist.
a) Jede Funktion dritten Grades hat mindestens eine Nullstelle.
b) Jede Funktion vierten Grades hat mindestens eine Extremstelle.
c) Wenn der Grad der Funktion ungerade ist, dann ist die Anzahl der Wendestellen gerade.
d) Wenn die Anzahl der Wendestellen gerade ist, dann ist der Grad der Funktion ungerade.
e) Ist der Grad der Funktion gerade, so hat die Funktion mindestens eine Extremstelle.
f) Wenn die Funktion drei verschiedene Extremstellen hat, dann hat die Funktion mindestens zwei Wendestellen.
g) Eine Funktion vom Grad n hat höchstens $n - 1$ Extremstellen.

Strategie | Seite 188
Betrachten von etwas Gegenteiligem

18 a) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 2 an, die ein lokales Maximum besitzt.
b) Geben Sie zwei ganzrationale Funktionen vom Grad 4 mit genau einer Extremstelle an.
c) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 an, die genau zwei Wendestellen hat.
d) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) bis c) mithilfe eines Funktionenplotters.

19 Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_k gegeben mit $f_k(x) = x^2 + kx - k$. Ihr Graph sei G_k.
a) Zeichnen Sie mit einem Funktionenplotter die Graphen G_0, G_1, G_{-1} und G_{-2}.
b) Bestimmen Sie das globale Minimum der Funktion f_k in Abhängigkeit von k.
c) Ermitteln Sie einen Wert für $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph G_k die x-Achse berührt.
d) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Funktionen f_k zwei verschiedene Nullstellen bzw. keine Nullstellen haben.
e) Zeigen Sie, dass $f_k(1) = 1$ unabhängig von k gilt. Interpretieren Sie diese Eigenschaft geometrisch.

20 **Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 5**
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.
a) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.
b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

Test 2

Lösungen | Seite 219

21 An einem Sommertag werden stündlich die Lufttemperaturen gemessen. Der Temperaturverlauf kann modelliert werden durch die Funktion f mit $f(t) = -0{,}01t^3 + 0{,}24t^2 + 6{,}84$ ($0 \leq t < 24$ in Stunden seit Mitternacht, f(t) in Grad Celsius).
a) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der die Höchst- bzw. die Tiefsttemperatur des Tages erreicht wird.
b) Erklären Sie die Bedeutung der Steigung der Wendetangente in diesem Sachzusammenhang.

22 Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_a: x \mapsto x^3 - ax^2 + 1$ mit dem Graphen G_a.
a) Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Punkt $W(x_w|3)$ ein Wendepunkt von G_a ist.
b) Untersuchen Sie G_a für den Wert von a aus Teilaufgabe a) auf Extrem- und Wendepunkte. Skizzieren Sie den Graphen und die Wendetangente im Intervall $[-3; 1]$.

23 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, welche Beziehung für die Koeffizienten a, b und c gelten muss, damit es nur eine Stelle gibt, an der die Tangente an den Graphen von f parallel zur x-Achse verläuft.

24 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
a) Skizzieren Sie die Graphen G_f und G_g der Funktionen f und g.
b) Vergleichen Sie die Art und Lage der Extrempunkte der Graphen G_f und G_g und das Verhalten der Funktionen f und g für $x \to \pm\infty$.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 219

G 25 Berechnen Sie die Werte der beiden Variablen, z. B. mit dem Einsetzungsverfahren.

a) (I) $y - x = 5$
(II) $4x + 2y = -2$

b) (I) $3x - 4y = 2 - 2x$
(II) $6x - 8y = 2$

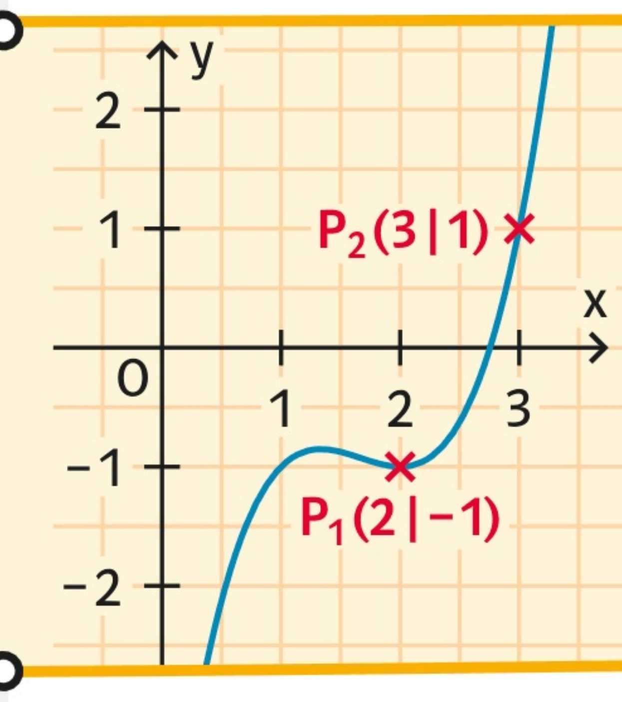
c) (I) $a^2 - b^2 = 20$
(II) $a - b = 5$

6 Das Newton-Verfahren

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto x^3 - 5x^2 + 8x - 5$.

a) Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf dem Graphen von f.
Erläutern Sie, wie man nur mithilfe der angegebenen Koordinaten der Punkte einen groben Näherungswert für die Nullstelle von f ermitteln kann.

b) Bestimmen Sie mithilfe der Tangente an den Graphen von f im Punkt P_2 rechnerisch einen Näherungswert für die Nullstelle von f. Gelingt dieses Vorgehen auch mit dem Punkt P_1?

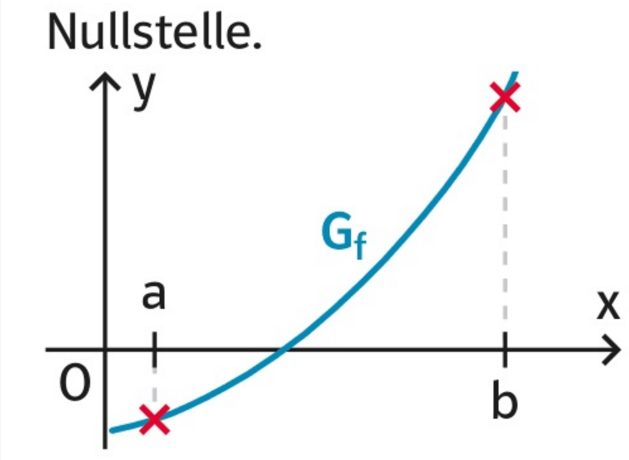


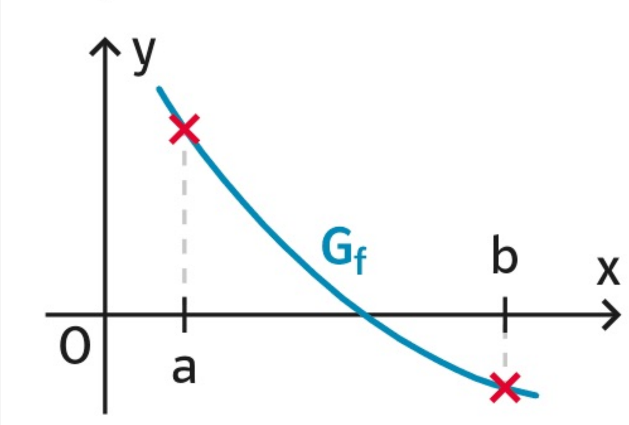
Manchmal lassen sich die Nullstellen einer Funktion f nicht oder nur schwer durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ bestimmen. Im Folgenden wird ein rechnerisches Verfahren vorgestellt, mit dem man in vielen Fällen einen Näherungswert rasch ermitteln kann. Bei diesem Verfahren, dem **Newton-Verfahren**, handelt es sich um ein Iterationsverfahren. Man geht dabei von einem Näherungswert für die Nullstelle aus und der Näherungswert wird dann von einem Iterationsschritt zum nächsten immer weiter verbessert.

Zur Erinnerung:
Ein systematisches Rechenverfahren, bei dem immer wieder der gleiche Schritt wiederholt wird, nennt man Iterationsverfahren.

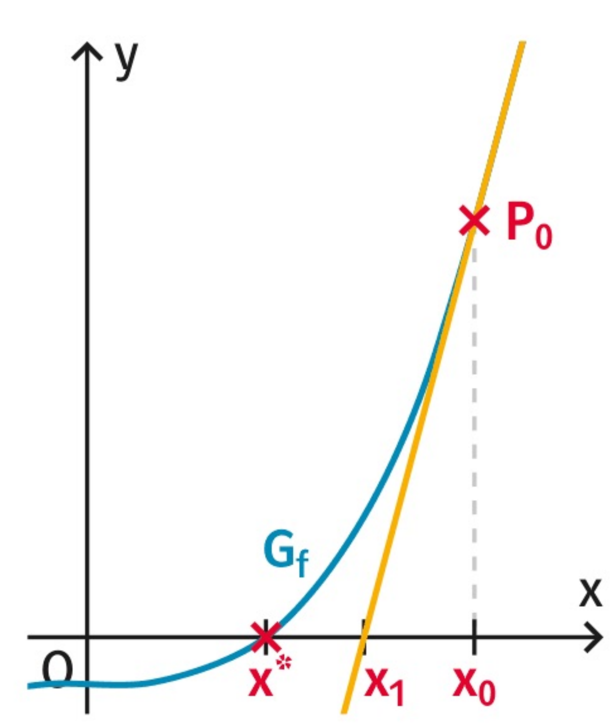
Kennt man den groben Verlauf des Graphen einer Funktion f, so kann man relativ einfach feststellen, ob die Gleichung $f(x) = 0$ überhaupt eine Lösung hat und in welchem Intervall die Lösung liegt. Alternativ versucht man, zwei Stellen a und b aus D_f zu ermitteln, für die $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben. Unter der Voraussetzung, dass die Funktion stetig ist, hat f in $[a; b]$ dann mindestens eine Nullstelle (vgl. Rand). Man wählt einen Wert $x_0 \in [a; b]$ als ersten Näherungswert für die gesuchte Nullstelle x^*, z. B. den Mittelwert zwischen a und b.

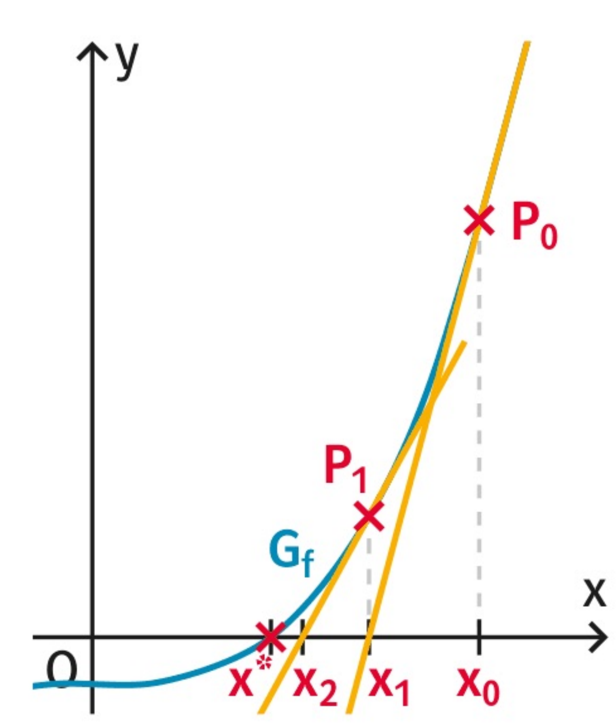
Ist eine Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ stetig und gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), dann liegt zwischen a und b mindestens eine Nullstelle.



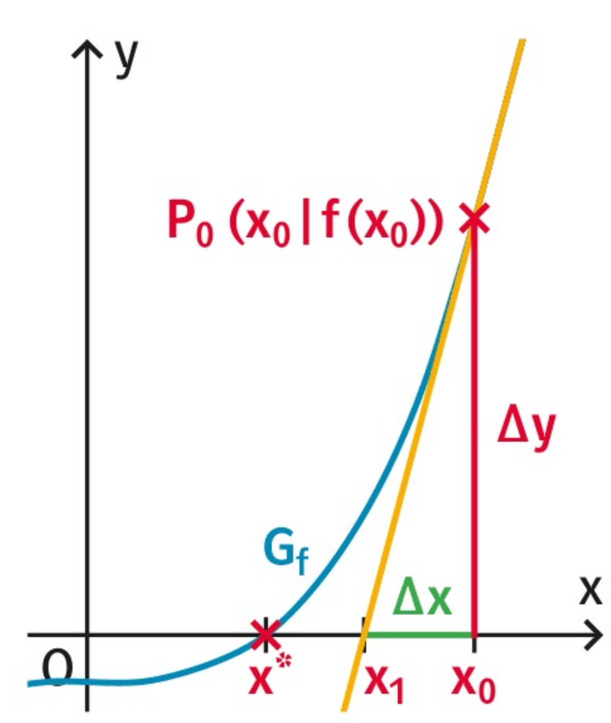


Die Tangente an den Graphen G_f an der Stelle x_0 nähert G_f in einer Umgebung dieser Stelle in der Regel recht gut an. Diese und weitere Tangenten kann man verwenden, um schrittweise bessere Näherungswerte zu gewinnen.
Man wählt einen Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ in der Nähe der Nullstelle x^* und legt eine Tangente in diesem Punkt P_0 an den Graphen. Anschließend berechnet man die Stelle x_1, an der die Tangente die x-Achse schneidet.
In vielen Fällen ist dann x_1 ein besserer Näherungswert für x^* als x_0.
Wiederholt man dieses Verfahren für $P_1(x_1|f(x_1))$ und dann für $P_2(x_2|f(x_2))$ ..., erhält man (unter gewissen Voraussetzungen) eine Folge x_0, x_1, x_2 ... von immer besseren Näherungswerten.





Rechnerische Umsetzung des Verfahrens
Die Tangente an der Stelle x_0 schneidet die x-Achse an der Stelle x_1 und hat die Steigung $m = f'(x_0)$. Diese Steigung m lässt sich auch mithilfe eines Steigungsdreiecks ausdrücken:
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$.
Daraus ergibt sich die Gleichung $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$
und mit $x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ist $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,
falls $f'(x_0) \neq 0$ ist.



$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$
$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$

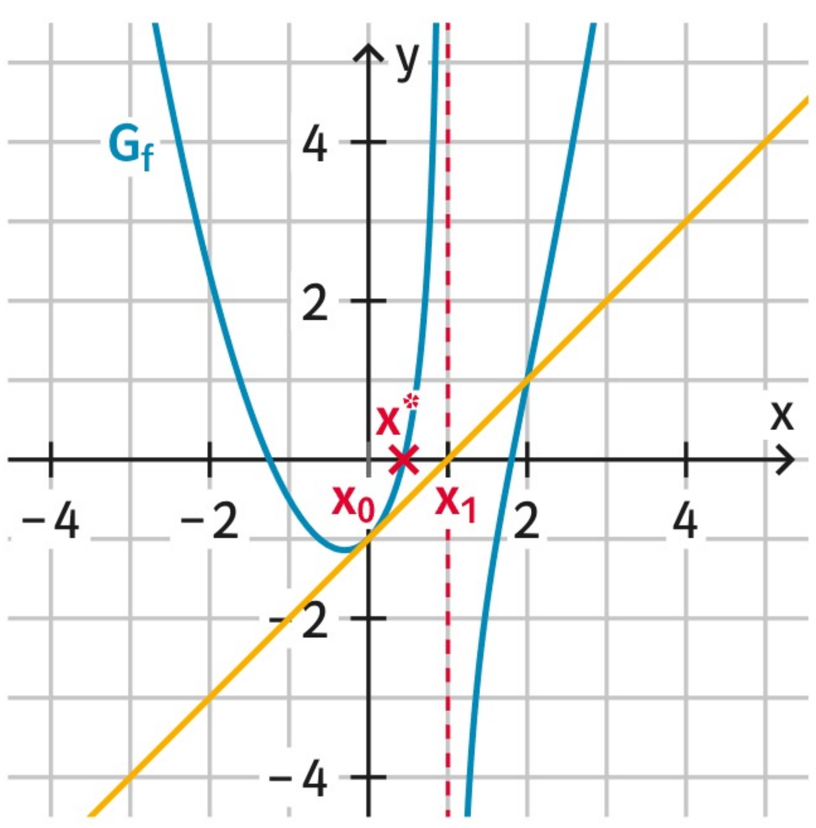
Dieser Zusammenhang zwischen dem aktuellen und dem folgenden Näherungswert gilt auch für die weiteren Wiederholungen dieses Verfahrens.

Hat die differenzierbare Funktion f eine Nullstelle, so kann man diese näherungsweise mit dem **Newton-Verfahren** ermitteln. Dabei beginnt man mit einem geeignet gewählten Näherungswert x_0 als Startwert und berechnet mit der folgenden Iterationsvorschrift die weiteren Näherungswerte für die Nullstelle von f:

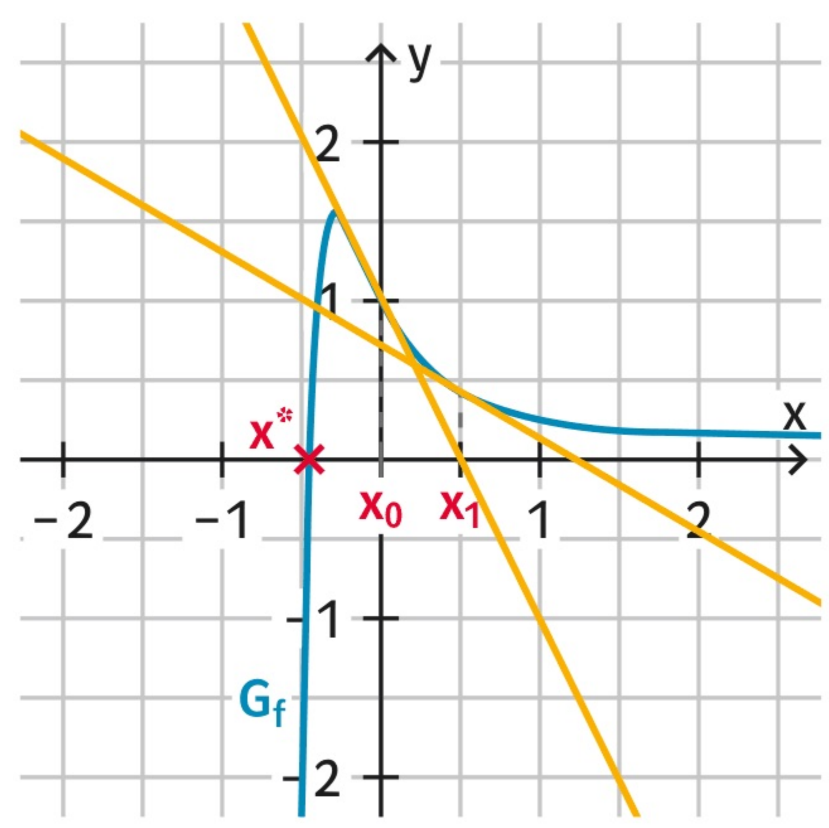
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } f'(x_n) \neq 0.$$

Das Verfahren ist nach seinem Entdecker Sir Isaac Newton (1643–1727) benannt. Solche, auf Algorithmen beruhende Näherungsverfahren werden in den unterschiedlichsten Bereichen verwendet, z. B. in der Klimaforschung, der Flugzeugentwicklung und an der Börse (vgl. hierzu auch Aufgabe 21 auf Seite 180). Mathematisch exakte Lösungen sind nicht immer möglich.

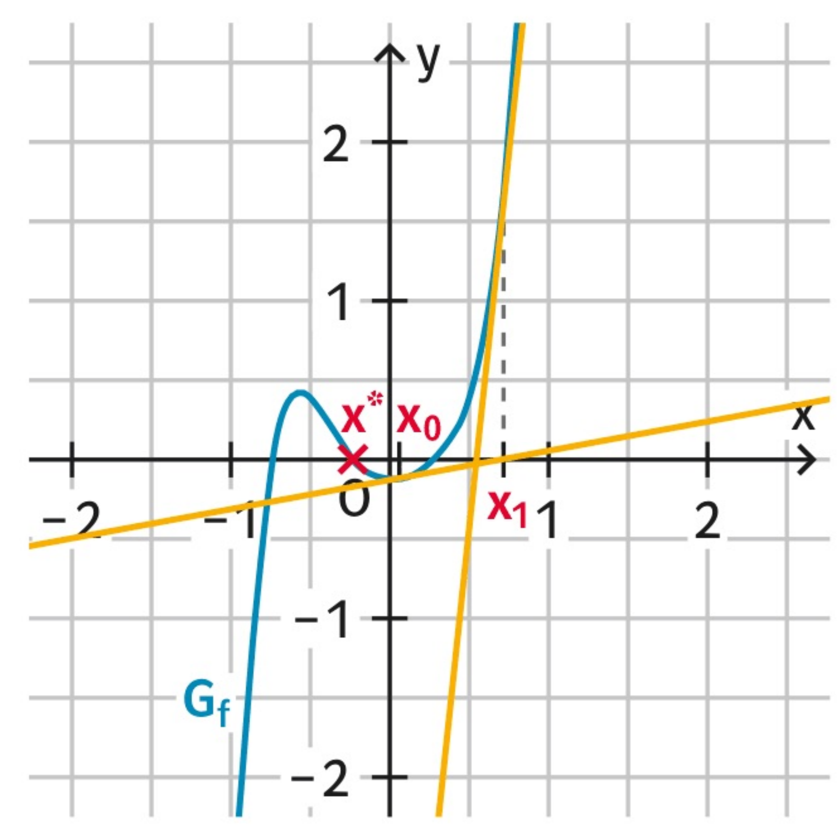
Bemerkung:
Das Newton-Verfahren ist für jede differenzierbare Funktion anwendbar, jedoch führt das Verfahren nicht immer zum Erfolg. Damit x_{n+1} berechnet werden kann, muss $f'(x_n) \neq 0$ sein. Aber auch wenn dies der Fall ist, kann es vorkommen, dass sich die errechneten Näherungswerte x_n nicht der gesuchten Nullstelle x^* annähern, wie man im Folgenden erkennt.



Startwert: $x_0 = 0$.
Ein x_n-Wert, in diesem Fall x_1, liegt nicht im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

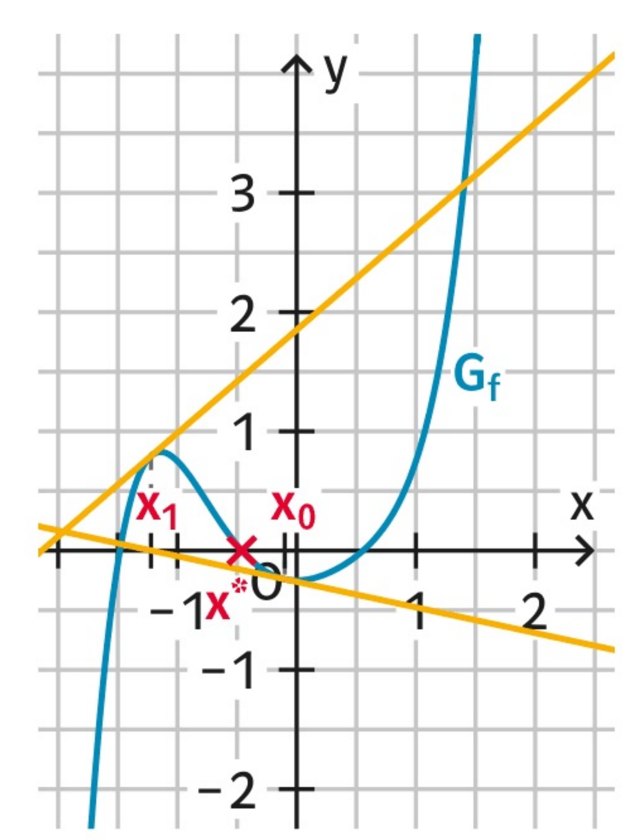


Startwert: $x_0 = 0$.
Die x_n-Werte nähern sich keinem Wert an, denn sie werden beliebig groß.

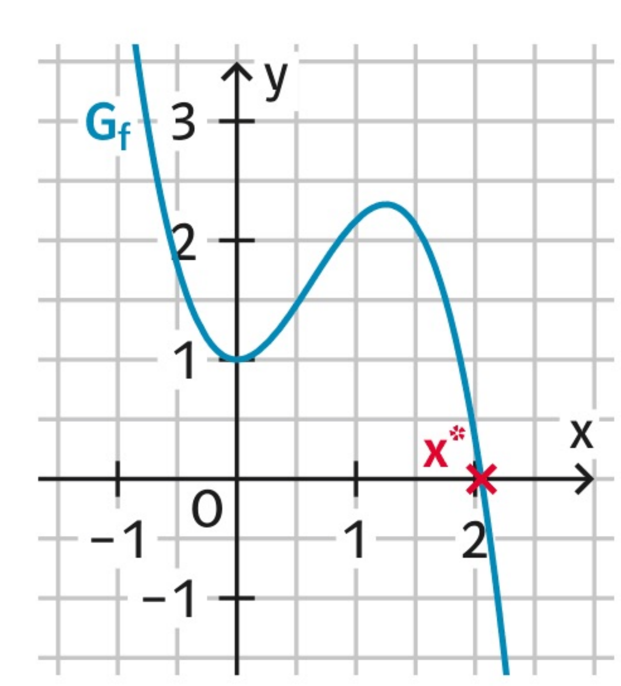


Startwert: $x_0 = 0{,}1$.
Die x_n-Werte nähern sich einer anderen als der gesuchten Nullstelle an.

Auch wenn der Startwert auf der „richtigen" Seite der Extremstelle liegt, kann es passieren, dass sich die x_n-Werte einer anderen Nullstelle annähern (vgl. Abbildung auf dem Rand).



In all diesen Fällen muss man einen Startwert wählen, der nahe genug an der gesuchten Nullstelle x^* liegt.



Newton-Verfahren mit Tabellenkalkulation

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 1$.
Die Nullstelle x^* der Funktion soll mit dem Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 2$ angenähert werden.
Für die Ableitungsfunktion gilt $f'(x) = -4x^2 + 5x$.

Tabellenblatt mit angezeigten Formeln:

B2 = 2

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	2	=-4/3*B2^3+5/2*B2^2+1	=-4*B2^2+5*B2	=B2-C2/D2
3	=A2+1	=E2	=-4/3*B3^3+5/2*B3^2+1	=-4*B3^2+5*B3	=B3-C3/D3
4	=A3+1	=E3	=-4/3*B4^3+5/2*B4^2+1	=-4*B4^2+5*B4	=B4-C4/D4
5	=A4+1	=E4	=-4/3*B5^3+5/2*B5^2+1	=-4*B5^2+5*B5	=B5-C5/D5

In die Zelle B2 wird der Startwert x_0 eingesetzt. In der Zelle C2 wird der Funktionswert für x_0 berechnet und in der Zelle D2 der Wert der Ableitung für x_0. Die Zelle E2 enthält die Iterationsformel. In die Zelle B3 wird der in der Zelle E2 errechnete Näherungswert übernommen. Weitere Zelleninhalte erhält man dann jeweils durch Kopieren und Übertragen der Formeln nach unten.

Tabellenblatt mit berechneten Werten:

E5 =B5-C5/D5

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	2,0000000	0,3333333	-6,0000000	2,0555556
3	1	2,0555556	-0,0172039	-6,6234568	2,0529581
4	2	2,0529581	-0,0000386	-6,5937577	2,0529523
5	3	2,0529523	-0,0000000	-6,5936908	2,0529523

Beispiel 1

Die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}$ hat genau eine Nullstelle x^*, die mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden soll.

a) Untersuchen Sie die Funktion f so weit, dass Sie ihren Graphen G_f mit den Extrempunkten skizzieren können. Legen Sie dann einen sinnvollen Startwert für das Newton-Verfahren fest.

b) Geben Sie die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren an und führen Sie die ersten beiden Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Taschenrechner durch.

c) Ermitteln Sie die Nullstelle x^* mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms auf die dritte Stelle nach dem Komma genau.

Lösung

a) $f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ Es ist $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

Monotonieverhalten von f:

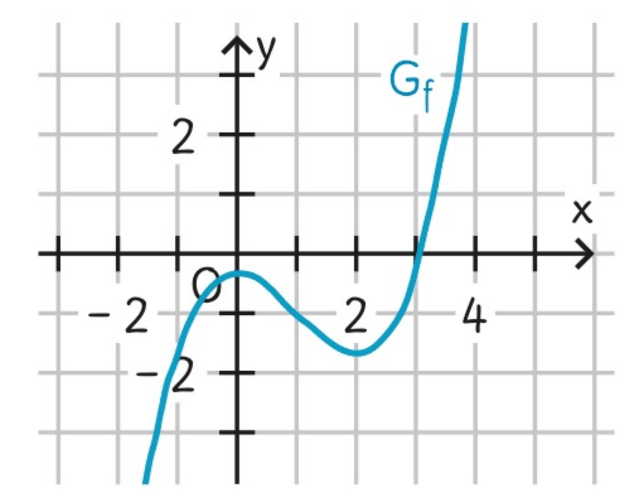
$f'(x)$: > 0 | 0 | < 0 | 2 | > 0

G_f: ↗ | Max | ↘ | Min | ↗

lokales Maximum: $f(0) = -\frac{1}{3} \approx -0{,}3$

lokales Minimum: $f(2) = -\frac{5}{3} \approx -1{,}7$

Skizze:



Die Nullstelle liegt rechts vom lokalen Minimum. Deshalb sollte der Startwert x_0 größer als 2 gewählt werden. Es ist $f(3) = -\frac{1}{3}$ und $f(4) = 5$. Also ist z. B. $x_0 = 3$ ein sinnvoller Startwert.

b) Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{3}\cdot x_n^3 - x_n^2 - \frac{1}{3}}{x_n^2 - 2\cdot x_n}$

1. Schritt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3}}{3^2 - 2\cdot 3} = 3 - \frac{-\frac{1}{3}}{3} = \frac{28}{9} = 3{,}\overline{1}$

2. Schritt: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{28}{9} - \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{28}{9}\right)^3 - \left(\frac{28}{9}\right)^2 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{28}{9}\right)^2 - 2\cdot\frac{28}{9}} = \frac{4693}{1512} \approx 3{,}103\,835\,978\,836$

Man gibt den Startwert $x_0 = 4$ ein und speichert diesen durch Drücken von „=“ bzw. „enter“.

Dann gibt man die Berechnungsvorschrift ein, wobei man jedes x_n durch „Ans“ ersetzt.

$Ans - \frac{\frac{1}{3}Ans^3 - Ans^2 - \frac{1}{3}}{Ans^2 - 2Ans}$

Durch Drücken von „=“ erhält man den ersten Näherungswert.

$Ans - \frac{\frac{1}{3}Ans^3 - Ans^2 - \frac{1}{3}}{Ans^2 - 2Ans}$

3.375

Drückt man erneut „=“, so erhält man den nächsten Näherungswert.

$Ans - \frac{\frac{1}{3}Ans^3 - Ans^2 - \frac{1}{3}}{Ans^2 - 2Ans}$

3.14001122334455

Die Taste, unter der das letzte Ergebnis abgespeichert wird, heißt meist „**Ans**(wer)“.

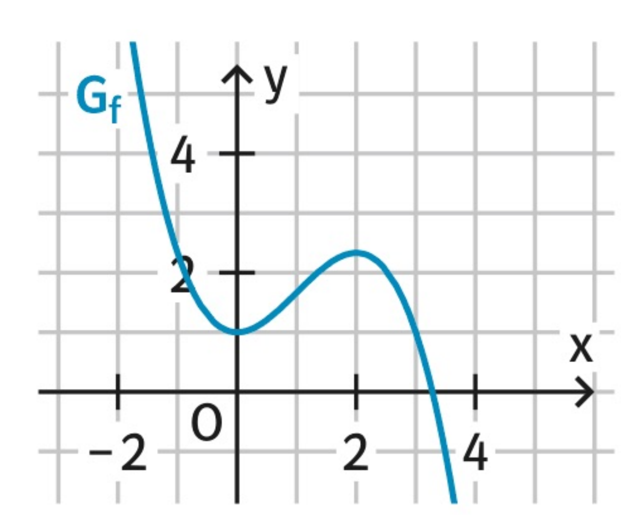
c) Durchführung der Iteration mit einem Tabellenkalkulationsprogramm:
Mit dem 5. Schritt erhält man das auf die dritte Stelle genaue Endergebnis:
$x^* \approx 3{,}104$.

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	4,0000000	5,0000000	8,0000000	3,3750000
3	1	3,3750000	1,0904948	4,6406250	3,1400112
4	2	3,1400112	0,1268215	3,5796480	3,1045827
5	3	3,1045827	0,0026713	3,4292685	3,1038038
6	4	3,1038038	0,0000013	3,4259903	3,1038034

Ändert sich die vierte Stelle nach dem Komma nicht mehr, kann auf die dritte Nachkommastelle gerundet werden.

Beispiel 2

Die Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ besitzt genau eine Nullstelle, wie der Graph G_f rechts zeigt. Mithilfe des Newton-Verfahrens soll diese Nullstelle angenähert werden.



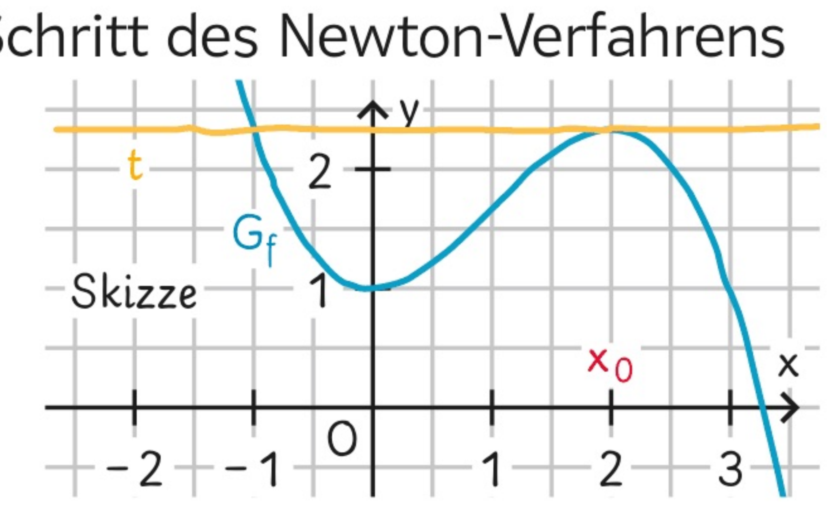
a) Begründen Sie anhand der Iterationsformel, dass $x_0 = 2$ nicht als Startwert gewählt werden darf.

b) Erläutern Sie am Graphen, warum die Wahl des Startwertes $x_0 = 2$ nicht zum Ziel führt.

Lösung

a) Für die Ableitung f' der Funktion f gilt $f'(x) = -x^2 + 2x$. Setzt man den Startwert $x_0 = 2$ ein, so ergibt sich $f'(2) = 0$, da die Funktion an dieser Stelle eine Extremstelle besitzt. Die Iterationsvorschrift lautet $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ und so würde sich im ersten Schritt des Newton-Verfahrens im Nenner der Wert 0 ergeben.

b) Die Tangente an den Graphen im Punkt $(2\,|\,f(2))$ verläuft waagerecht, also parallel zur x-Achse und wird diese niemals schneiden. Es ergibt sich somit kein weiterer Näherungswert für die Nullstelle.

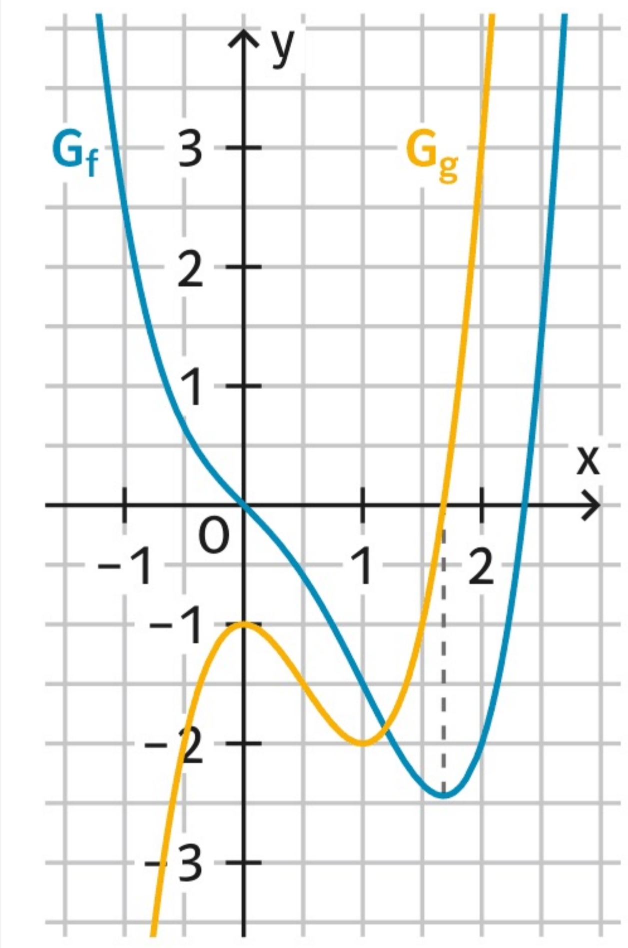


Beispiel 3

Die Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x$ besitzt ein lokales Minimum (vgl. Graph auf dem Rand).

a) Erläutern Sie, inwiefern die Extremstelle mit dem Newton-Verfahren gefunden werden kann.

b) Wählen Sie für die Bestimmung der Extremstelle als Startwert $x_0 = 2$ und führen Sie zwei Iterationsschritte durch.



Lösung

a) Mit dem Newton-Verfahren muss hier die Nullstelle der Ableitung $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ gesucht werden, denn die Extremstelle der Funktion ist eine Nullstelle der Ableitung. Also muss die Lösung der Gleichung $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ angenähert werden. Bestimmung der Nullstelle x^* der Funktion g mit dem Term $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$:
Mit $g'(x) = 6x^2 - 6x$ lautet die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 - 3x_n^2 - 1}{6x_n^2 - 6x_n}$.

b) Mit $x_0 = 2$ ergibt sich $x_1 = 1{,}75$ und damit $x_2 = 1{,}682\,539\,683\ldots \approx 1{,}68$.

Aufgaben

1 Die Funktion f hat genau eine Nullstelle x^*. Ermitteln Sie diese mithilfe des Newton-Verfahrens. Führen Sie die ersten beiden Schritte des Verfahrens mit dem angegebenen Startwert x_0 durch.

a) $f\colon x \mapsto x^3 + 2x - 1;\ x_0 = 1$ b) $f\colon x \mapsto x^3 + 3x - 6;\ x_0 = 2$ c) $f\colon x \mapsto x^5 - x + 3;\ x_0 = -1$

2 Die folgende Gleichung hat genau eine Lösung x^*. Berechnen Sie x^* mit dem Newton-Verfahren mit dem angegebenen Startwert x_0. Führen Sie die ersten beiden Schritte des Verfahrens durch.

a) $2x^3 - x^2 + x - 1 = 0;\ x_0 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0;\ x_0 = -2$ c) $2x^3 - 3x^2 - 2 = 0;\ x_0 = 2$

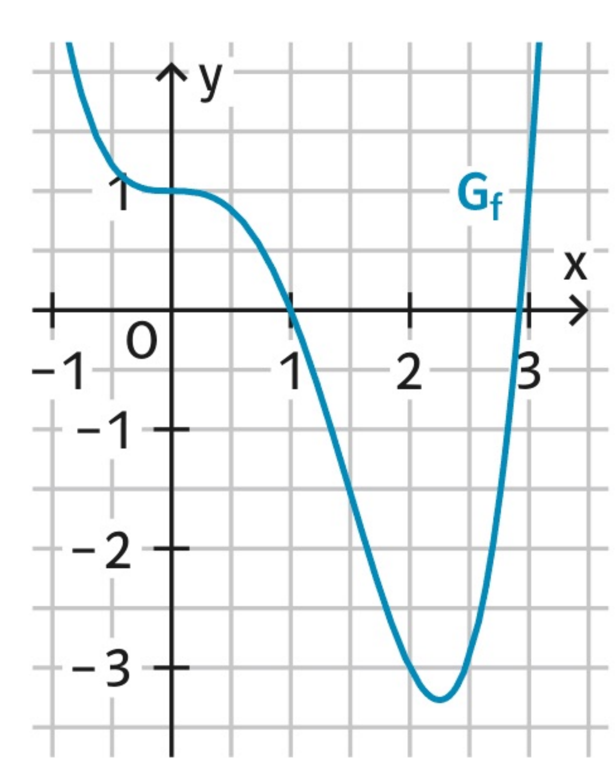
3 Die Funktion f hat mehrere Nullstellen. Bestimmen Sie diese mit dem Newton-Verfahren mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms auf drei Nachkommastellen genau. Zeichnen Sie zunächst den Funktionsgraphen mit einem Funktionenplotter, um sinnvolle Startwerte wählen zu können.

a) $f\colon x \mapsto x^3 + 3x^2 - 3$ b) $f\colon x \mapsto x^4 + x^3 - 4x^2 + 0{,}5$ c) $f\colon x \mapsto x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1$

4 Gegeben ist der Graph der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 1$.

a) Bestimmen Sie die beiden Nullstellen von f mit dem Newton-Verfahren auf eine Dezimale genau.

b) Diskutieren Sie miteinander, warum man $x_0 = 0$ nicht als Startwert wählen kann und warum man den Startwert nicht im Intervall $]2{,}25; \infty[$ wählen darf, wenn man die linke Nullstelle annähern will.

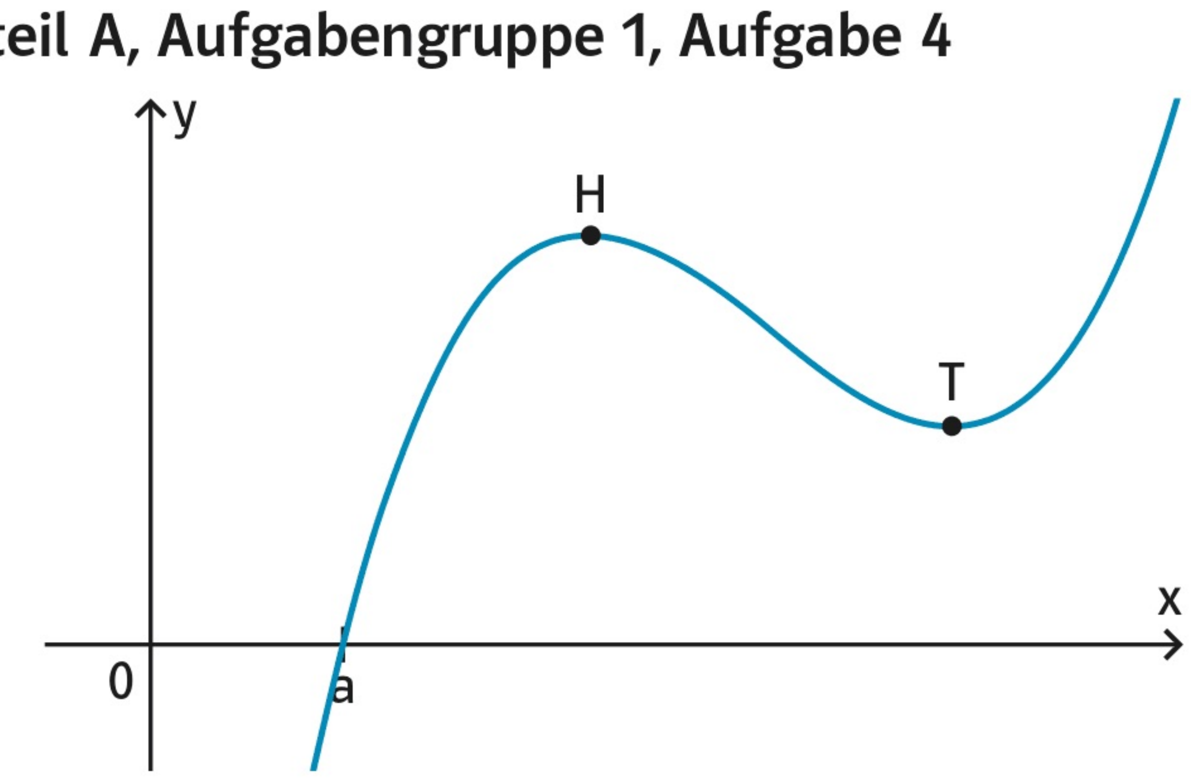


5 Zeichnen Sie mit einem Funktionenplotter den Funktionsgraphen G_f und drucken Sie ihn aus. Veranschaulichen Sie mit dem angegebenen Startwert x_0 die ersten beiden Schritte des Newton-Verfahrens zeichnerisch. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anschließend rechnerisch.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{7}{3};\ x_0 = 1$ b) $f(x) = x^5 - x^3 + 1;\ x_0 = -1$

6 **Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 4**

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion $g\colon x \mapsto g(x)$. Mithilfe des Newton-Verfahrens soll ein Näherungswert für die Nullstelle a von g ermittelt werden. Begründen Sie, dass weder die x-Koordinate des Hochpunkts H noch die x-Koordinate des Tiefpunkts T als Startwert des Newton-Verfahrens gewählt werden kann.



7 Klaus hat seine Tabelle zum Newton-Verfahren wie abgebildet begonnen. Geben Sie den Funktionsterm f(x) der Funktion f an, deren Nullstellen Klaus bestimmen will, und den von ihm gewählten Startwert. Erläutern Sie außerdem, was jeweils in den Zellen berechnet wird.

	A	B	C	D	E	F
1	0	1,5	=B1^3+2*B1-5	=3*B1^2+2	=C1/D1	=B1-E1
2	=A1+1	=F1				
3						

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

a) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_f der Funktion f und skizzieren Sie den groben Verlauf von G_f.

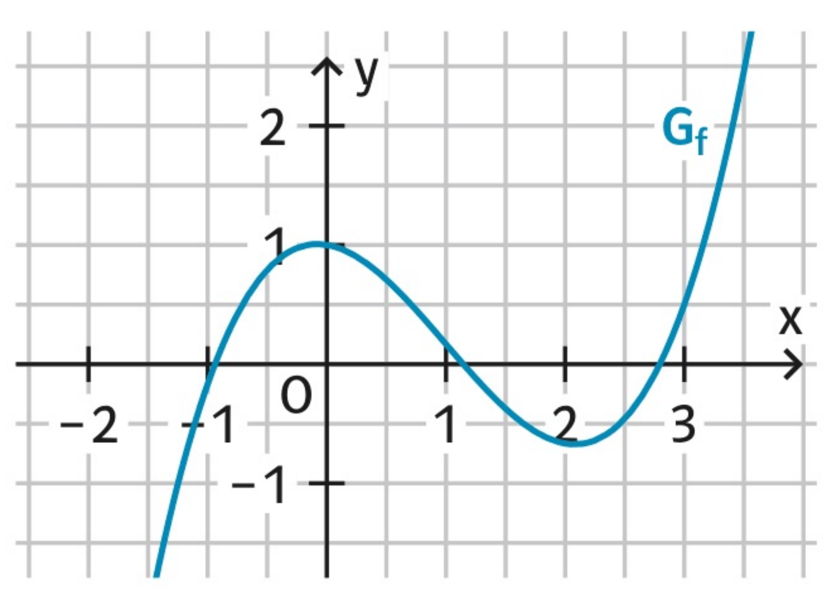
b) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion auf Hundertstel genau, indem Sie das Newton-Verfahren mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms durchführen.

Test 1

Lösungen | Seite 219

9 Die Gleichung $x^5 + x^3 + 1 = 0$ hat genau eine Lösung x^*. Berechnen Sie x^*, indem Sie die ersten beiden Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = -1$ durchführen.

10 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{6}x + 1$.



a) Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms alle Nullstellen der Funktion f auf zwei Dezimalen genau.

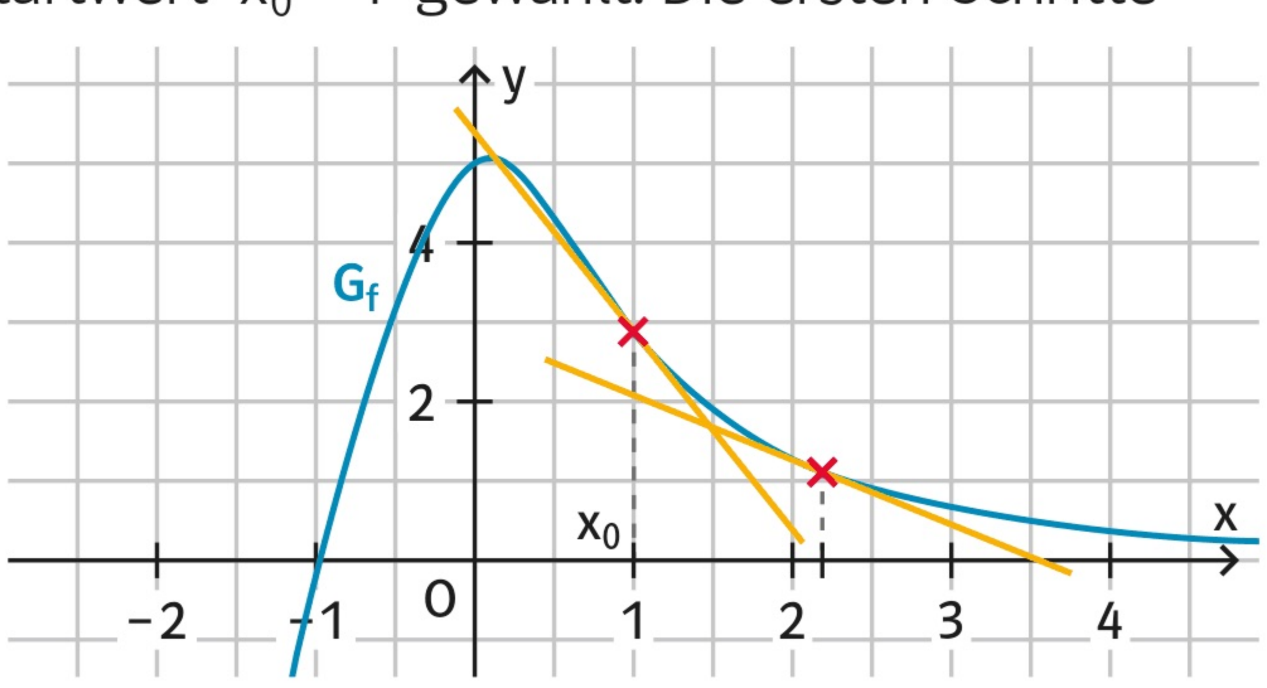
b) Geben Sie zwei Stellen an, die auf keinen Fall als Startwert gewählt werden dürfen, wenn die Nullstellen angenähert werden sollen, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

11 a) Zeigen Sie: Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^5 + x + 1$ schneidet die x-Achse genau einmal.

b) Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunktes aus Teilaufgabe a) auf vier Dezimalen genau.

Eine Regel zum Ermitteln eines Startwertes, die meistens zum Erfolg führt: Bestimmen Sie zunächst ein möglichst kleines Intervall mit ganzzahligen Intervallgrenzen, das die gesuchte Nullstelle enthält. Wählen Sie dann als Startwert x_0 die Mitte dieses Intervalls.

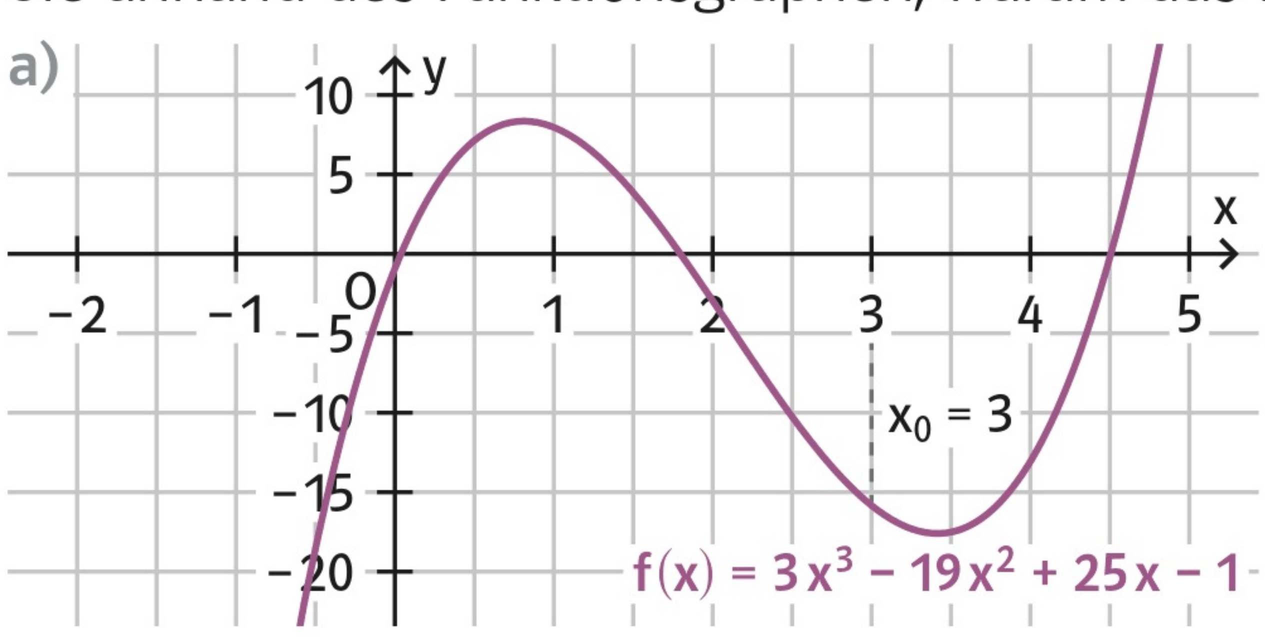
12 Die Funktion f, deren Graph abgebildet ist, besitzt genau eine Nullstelle. Zur Bestimmung der Nullstelle mit dem Newton-Verfahren wurde der Startwert $x_0 = 1$ gewählt. Die ersten Schritte sind in der Abbildung dargestellt.

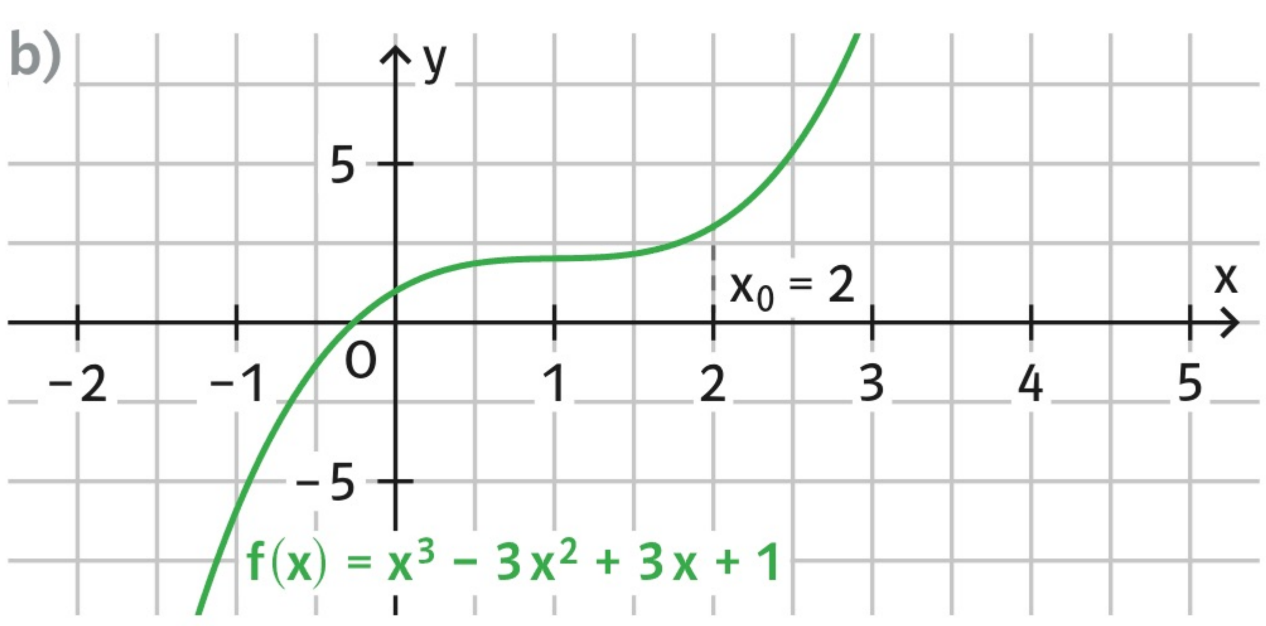


a) Beschreiben Sie, warum das Newton-Verfahren hier keine Näherungswerte für die Nullstelle liefert.

b) Erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen sich mit dem Newton-Verfahren ein Näherungswert der gesuchten Nullstelle von f berechnen lässt.

13 In der folgenden Situation liefert das Newton-Verfahren mit Startwert x_0 keinen Näherungswert der Nullstelle(n). Berechnen Sie – falls möglich – die ersten vier Näherungswerte und erläutern Sie anhand des Funktionsgraphen, warum das Newton-Verfahren scheitert.

a)


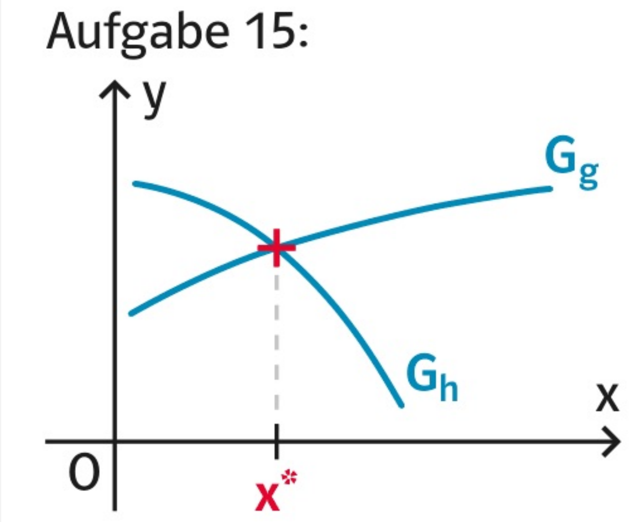
b)


14 Die Funktion f hat genau eine Extremstelle. Ermitteln Sie diese mit dem Newton-Verfahren. Führen Sie dazu zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem angegebenen Startwert x_0 durch.

a) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 8x + 1;\ x_0 = 1$ b) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x;\ x_0 = 0$

Auch in diesen Fällen kann das Newton-Verfahren angewendet werden.

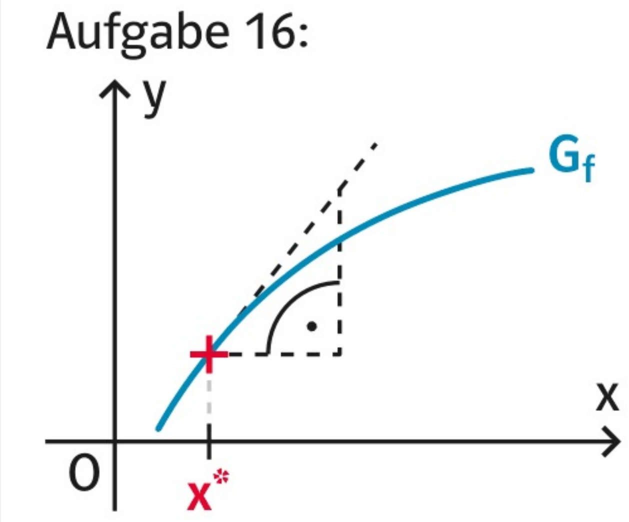
Aufgabe 15:



15 Der Graph der Funktion g schneidet den Graphen der Funktion h an genau einer Stelle x*. Ermitteln Sie x* mithilfe des Newton-Verfahrens. Führen Sie dazu zwei Iterationsschritte durch.

a) $g: x \mapsto x^2;\ h: x \mapsto x^3 - 1$ b) $g: x \mapsto x^3;\ h: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 2x + 2$

Aufgabe 16:

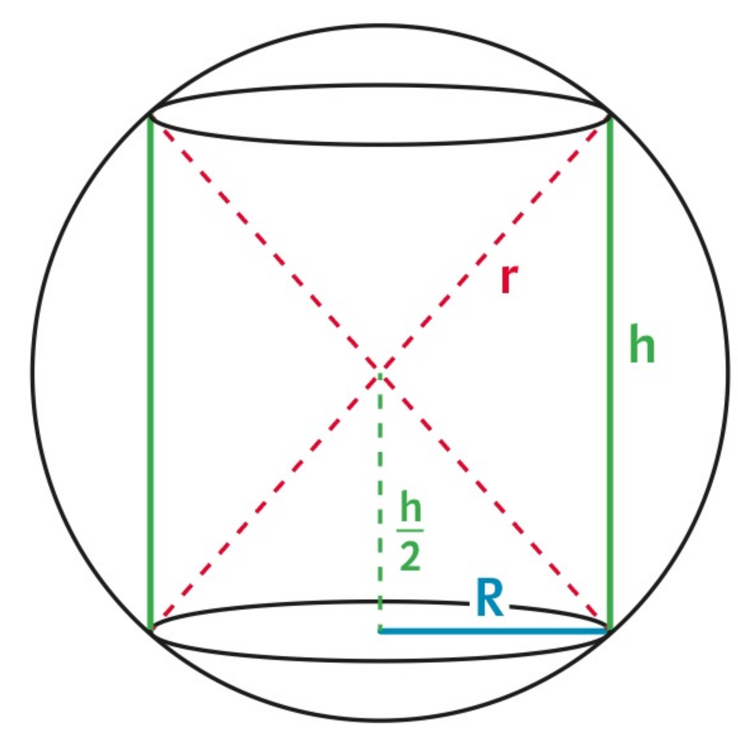


16 Die Funktion f hat an genau einer Stelle x* im Intervall [2; 3] die Steigung m. Berechnen Sie x* auf zwei Nachkommastellen genau.

a) $f: x \mapsto 0{,}1x^4 - x^2 - x + 1;\ m = 1$

b) $f: x \mapsto -0{,}1x^4 - x^3 + x^2 + 3;\ m = -18$

17 Einer Kugel mit dem Radius $r = 9\,\text{m}$ soll wie rechts gezeigt ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Volumen ein Viertel des Kugelvolumens ist. Berechnen Sie die Höhe h und den Radius R des Zylinders auf Zentimeter genau.



Test 2

Lösungen | Seite 220

18 Begründen Sie anhand der zweiten Ableitung und des Verhaltens im Unendlichen, dass die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 0{,}5x$ genau eine Extremstelle besitzt. Bestimmen Sie diese Extremstelle mit dem Newton-Verfahren auf zwei Dezimalen genau.

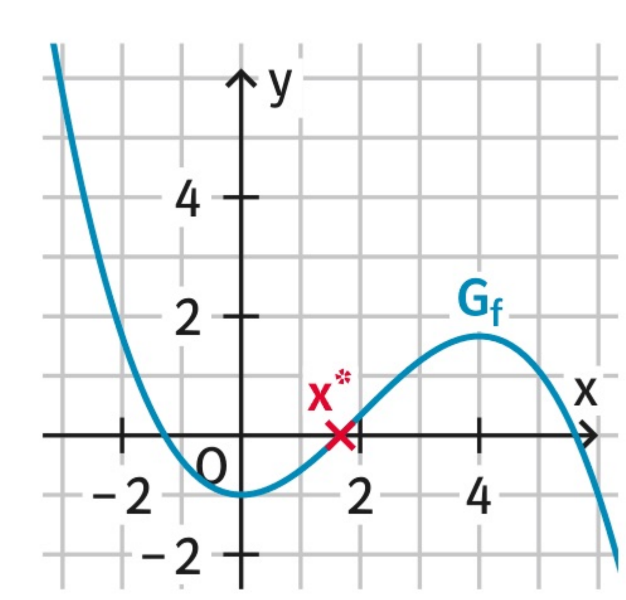
19 Die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 0{,}5x^2 - 4x + 1$ und $g: x \mapsto x^3 - x + 2$ schneiden sich in genau einem Punkt. Berechnen Sie die x-Koordinate dieses Punktes mit dem Newton-Verfahren auf drei Dezimalen genau.

20 Auf dem Rand ist der Graph G_f der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ dargestellt. Die Nullstelle x* der Funktion f soll mit dem Newton-Verfahren ermittelt werden.

a) Führen Sie den ersten Iterationsschritt mit dem Startwert $x_0 = 2$ durch.

b) Zeigen Sie, dass man mit dem Startwert $x_0 = 3{,}5$ die Nullstelle x* nicht bestimmen kann. Begründen Sie dies mithilfe des abgebildeten Graphen.

c) Untersuchen Sie, welcher Nullstelle man sich annähern würde, wenn man als Startwert $x_0 = 0{,}1$ bzw. $x_0 = 0{,}3$ wählen würde. Erstellen Sie jeweils eine Skizze dazu.



21 Die Iterationsvorschrift beim Heron-Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ lautet $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

a) Die Funktion f mit $f(x) = x^2 - a$ hat die Nullstellen $\pm\sqrt{a}$.
Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren die gleiche Vorschrift wie das Heron-Verfahren liefert, um die Nullstelle $\sqrt{a}$ zu ermitteln.

b) Berechnen Sie $\sqrt{17}$ auf acht Dezimalen genau.

c) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt[3]{a}$.

d) Berechnen Sie $\sqrt[3]{21}$ auf acht Dezimalen genau.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 221

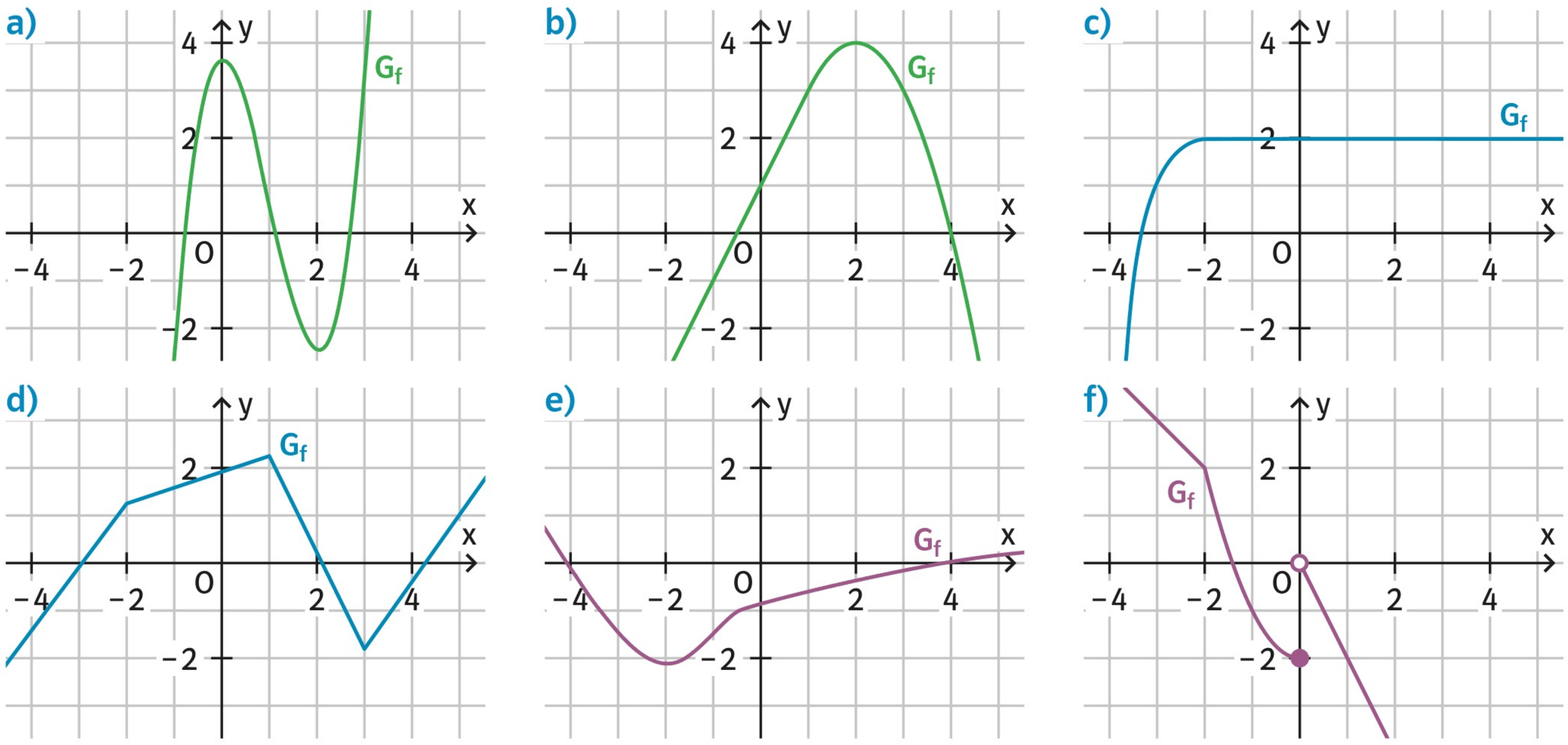
G 22 Der Preis einer Fahrkarte ist von 13,50 € auf 15,00 € gestiegen.

a) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Preis erhöht worden ist.

b) Bestimmen Sie, um wie viel die Fahrkarte vorher günstiger war, als sie es heute ist.

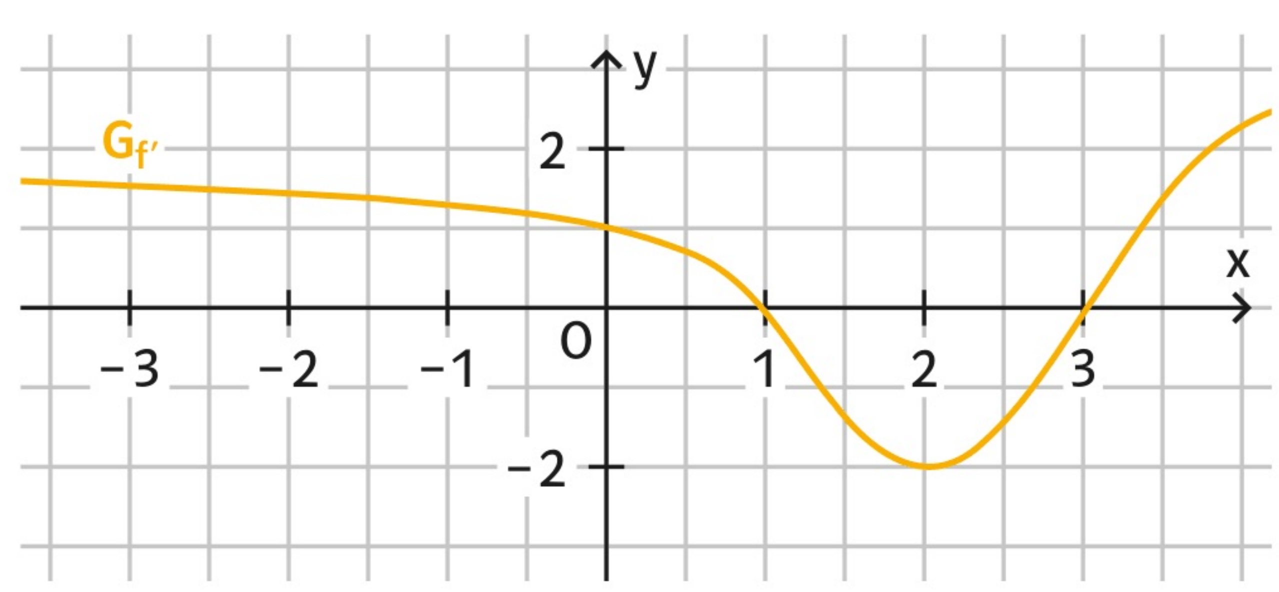
Wiederholen

1 Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion f die Monotonieintervalle von f im abgebildeten Bereich.



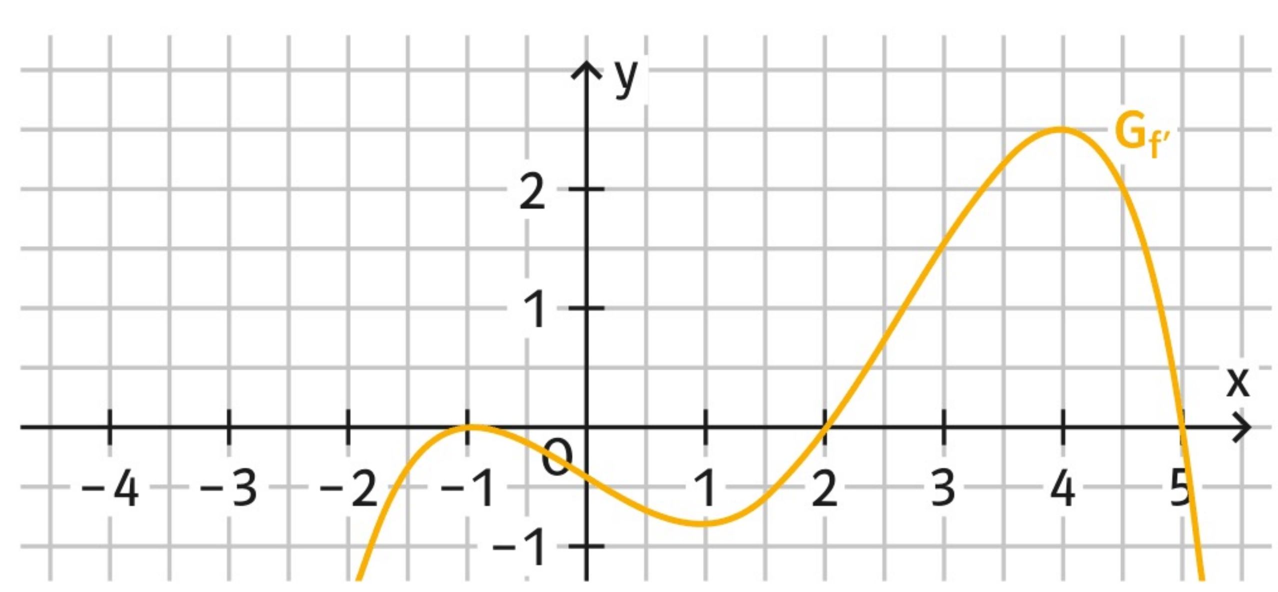
2 Bestimmen Sie die Monotonieintervalle der Funktion f und untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f.
a) $f\colon x \mapsto (x-2)^2$ **b)** $f\colon x \mapsto x^5 - 5$ **c)** $f\colon x \mapsto x^4 - 0{,}5x^2$ **d)** $f\colon x \mapsto 7{,}5$

3 Gegeben ist der Graph der ersten Ableitung f′ einer Funktion f. Beurteilen Sie die Aussage.
Der Graph der Funktion f ist
a) für $x > 2$ streng monoton steigend,
b) für $x \in [-3; -1]$ monoton steigend,
c) für $x \in [1; 3]$ streng monoton fallend,
d) für $x \in [-3; 2]$ rechtsgekrümmt.



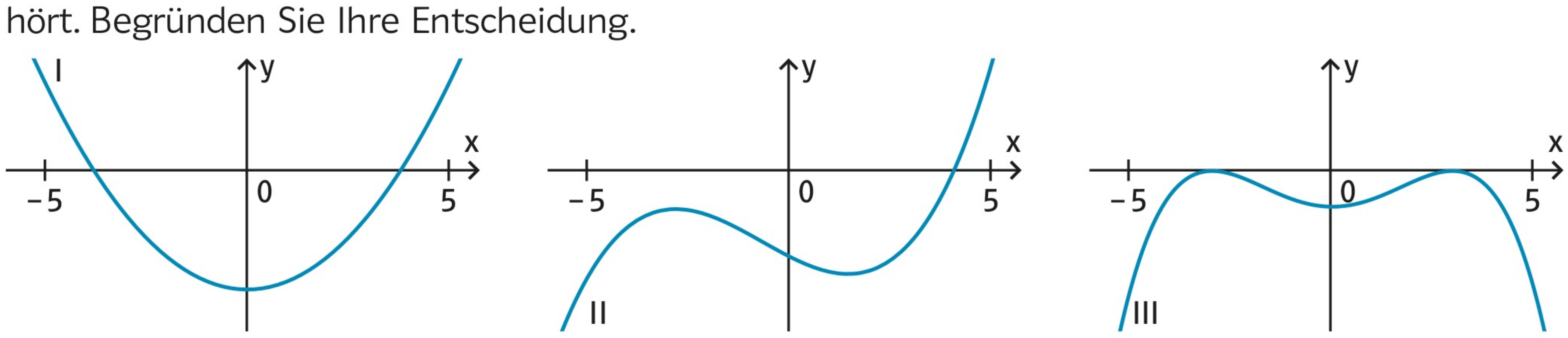
4 Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremstellen.
a) $f\colon x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 9x + 7$ **b)** $f\colon x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ **c)** $f\colon x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - 16x$ **d)** $f\colon x \mapsto 2x^4 - x$

5 Gegeben ist der Graph der ersten Ableitung f′ einer Funktion f.
Erläutern Sie, wie man am Graphen von f′ erkennen kann, an welcher Stelle der Graph von f einen Hochpunkt, einen Tiefpunkt oder einen Terrassenpunkt besitzt. Geben Sie die Stelle jeweils an.



6 **Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3**
Der Graph einer in ℝ definierten Funktion $g\colon x \mapsto g(x)$ besitzt für $-5 \leq x \leq 5$ zwei Wendepunkte. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I, II oder III zur zweiten Ableitungsfunktion g″ von g gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip



7 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

a) Ermitteln Sie, für welchen Wert $x \in [0; 4]$ die Summe der Funktionswerte maximal bzw. minimal wird. Geben Sie für f, g und $f + g$ jeweils die globalen Extremwerte an und erläutern Sie, ob es sich um ein inneres Extremum oder ein Randextremum handelt.

b) Beantworten Sie die Fragestellungen aus Teilaufgabe a) für die Differenz der Funktionswerte.

8 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}2x^3 - 2x + 1$ und die Gleichung der Wendetangente.

b) Die Schnittpunkte S und T der Wendetangente mit den Koordinatenachsen und der Ursprung O bilden das Dreieck OST. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

9 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion sowie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte ihres Graphen. Skizzieren Sie anschließend den Graphen und überprüfen Sie ihn dann mithilfe eines Funktionenplotters.

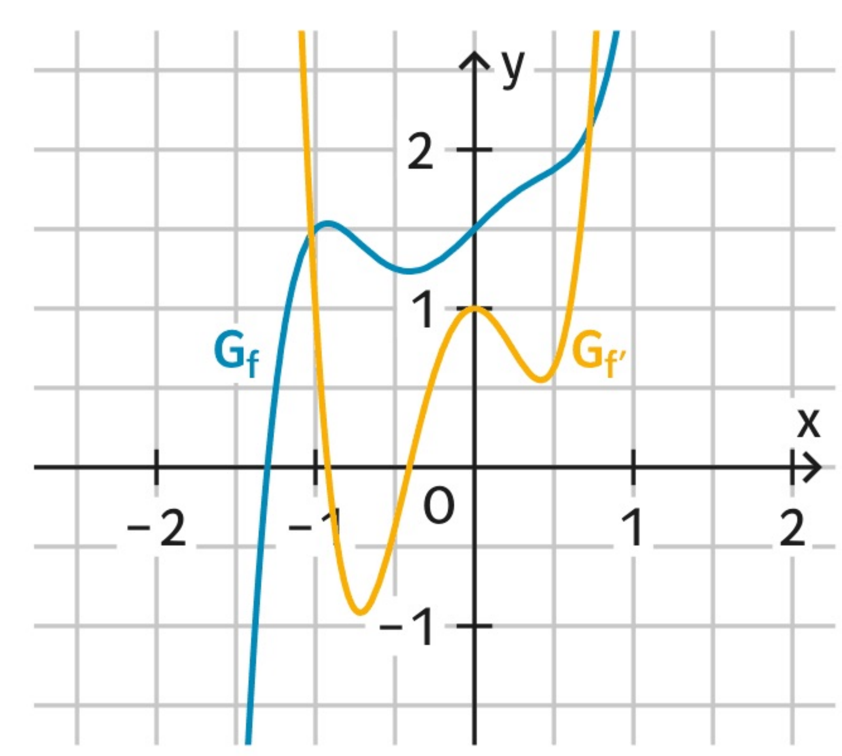
a) $f: x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + x$ **b)** $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1{,}5x$ **c)** $f: x \mapsto \frac{1}{10}x^4 - x^2 + \frac{9}{10}$

10 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 1{,}5$.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle von f mithilfe des Newton-Verfahrens auf zwei Dezimalen genau.

b) Ermitteln Sie die Extremstellen von f mithilfe des Newton-Verfahrens auf zwei Dezimalen genau.

c) Der Graph von f hat den Wendepunkt $W(0|f(0))$. Geben Sie zwei x-Werte an, die nicht als Startwert für das Newton-Verfahren in Teilaufgabe b) gewählt werden können, und begründen Sie ihre Antwort.



Vertiefen

11 Zeigen Sie rechnerisch: Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hat den Extrempunkt $E\left(-\frac{b}{2a} \middle| c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

12 **Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1**

Der Graph G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto ax^4 + bx^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $O(0|0)$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

a) $W(1|-1)$ ist ein weiterer Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie mithilfe dieser Information die Werte von a und b.

(Ergebnis: $a = 1$, $b = -2$)

b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Strategie | Seite 189
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

13 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 5**

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

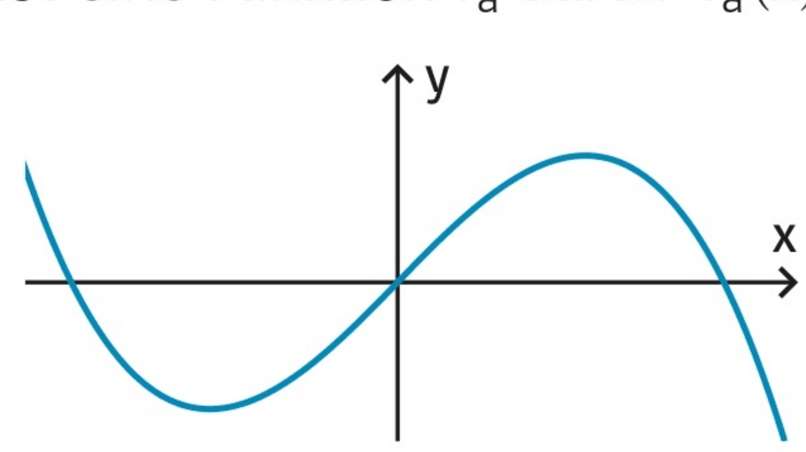


Abb. 1

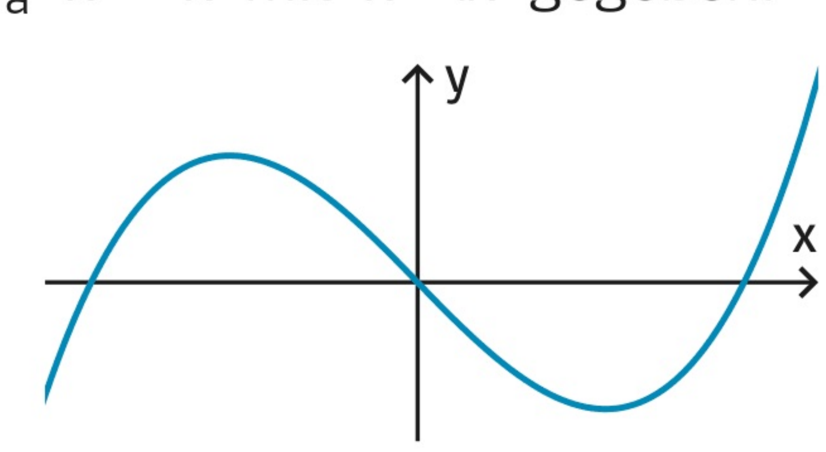


Abb. 2

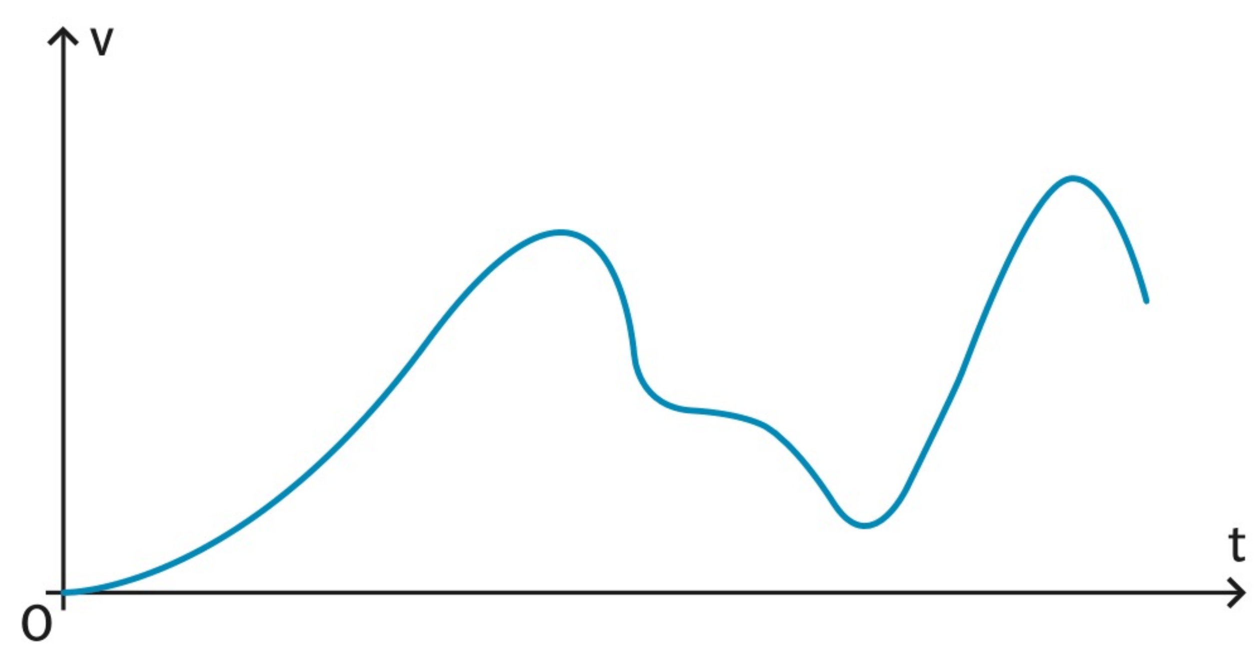
Strategie | Seite 189
Ausschlussprinzip

b) Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Strategie | Seite 186
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

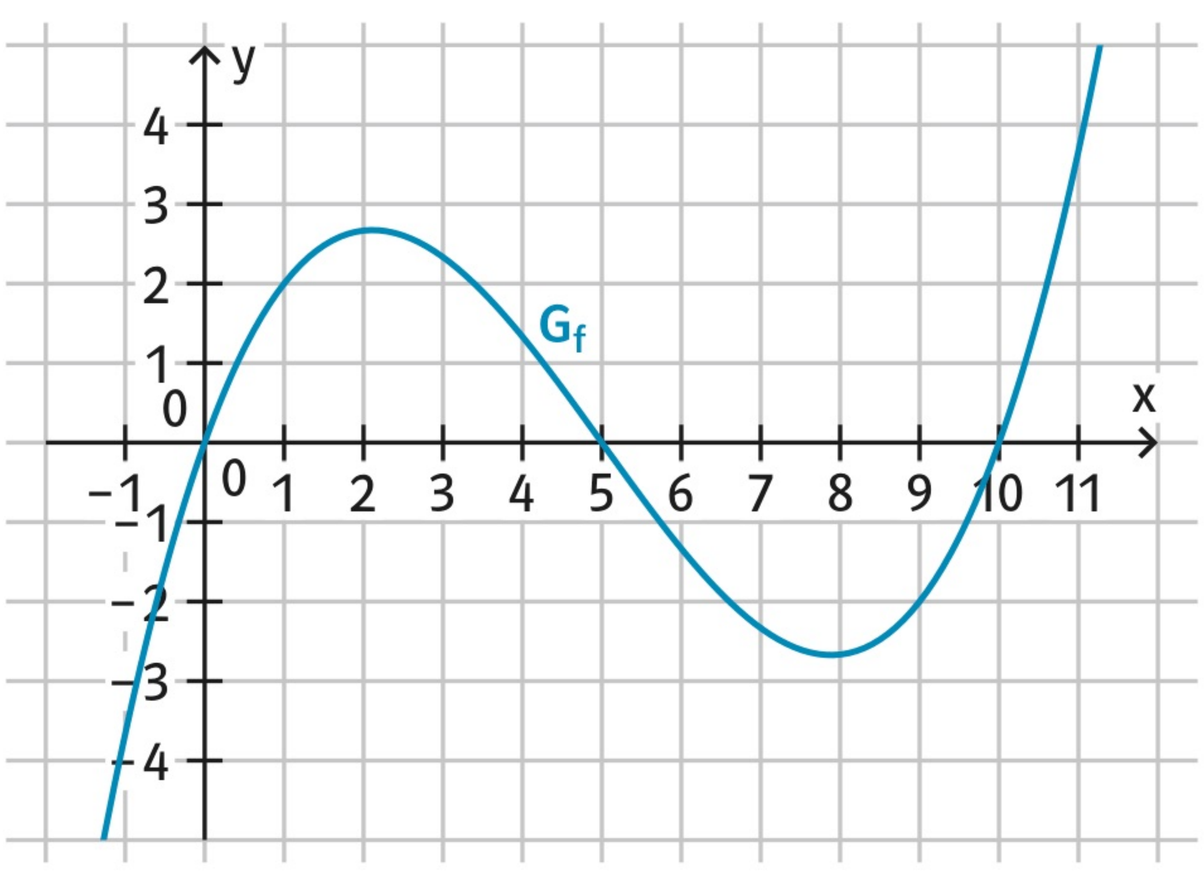
14 Geben Sie einen Term einer Funktion f mit $D = \mathbb{R}$ an, die ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 = 1$ hat, welches man
a) mithilfe der zweiten Ableitung nachweisen kann,
b) nicht mithilfe der zweiten Ableitung nachweisen kann.

15 Abgebildet ist das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm bei einer Busfahrt.
a) Diskutieren Sie, wie man im Innern des Busses einen Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkt bemerkt.
b) Erklären Sie sich gegenseitig, wie man Bereiche mit positiver bzw. negativer Änderungsrate v′ bemerkt.



16 Die Herstellungskosten eines Medikaments können beschrieben werden durch die Kostenfunktion $K: x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - 3x^2 + 30x + 40$ mit $x \in [0; 25]$, x in 1000 Packungen, K(x) in 100 €.
a) Weisen Sie nach, dass die Kostenfunktion keinen Extremwert hat. Begründen Sie, dass dies wirtschaftlich realistisch ist.
b) Es werden 1000 Packungen für 4330 € verkauft. Damit ergibt sich die Gewinnfunktion G mit $G(x) = 43{,}3x - K(x)$. Ermitteln Sie, wie viele Packungen die Firma herstellen muss, um den optimalen Gewinn zu erzielen, und berechnen Sie die Höhe dieses Gewinns.

17 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1 a), b) und c)**
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.



a) Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f.
(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18}(x^3 - 15x^2 + 50x)$)
b) Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.
c) G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 25x)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Ermitteln Sie, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist.

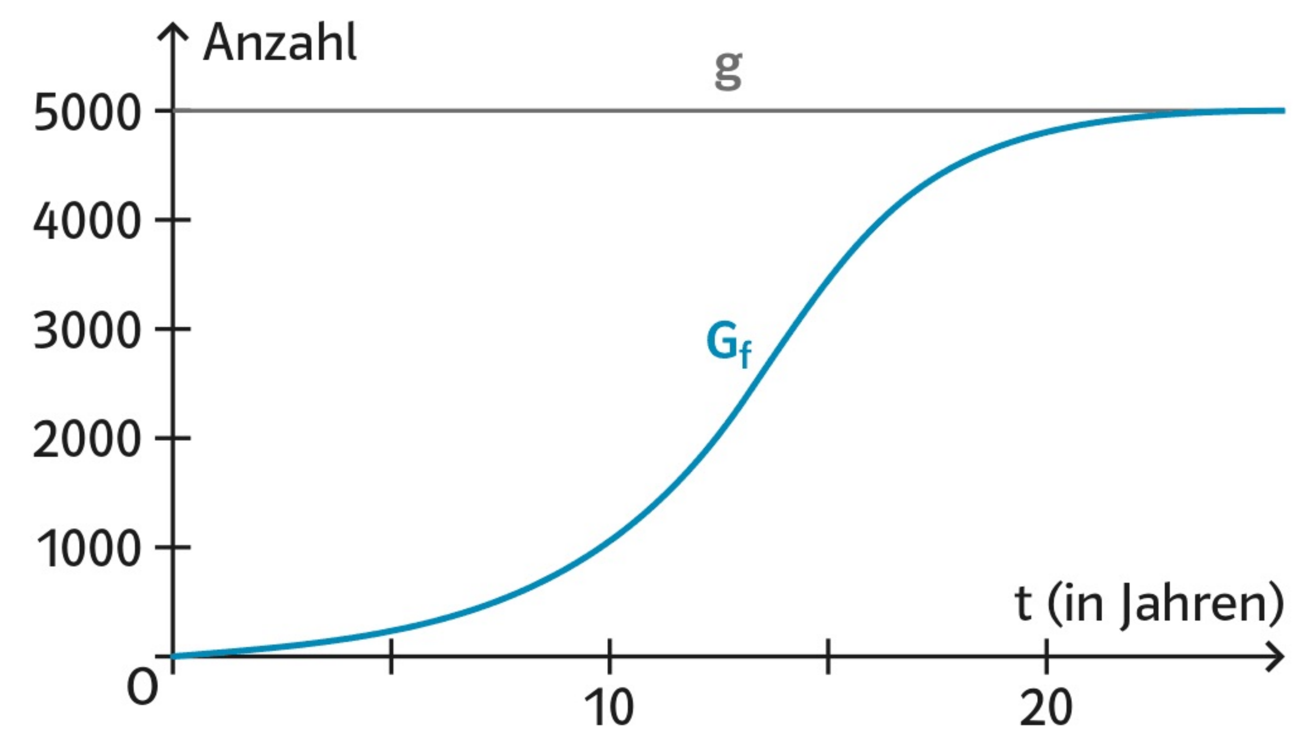
Strategie | Seite 186
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

Vernetzen

18 Wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 (in $\frac{m}{s}$) vertikal nach oben geworfen, so lässt sich seine Höhe (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) mit der Gleichung $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ berechnen. Dabei bleibt der Luftwiderstand unberücksichtigt und $g \approx 9{,}81$ (in $\frac{m}{s^2}$) ist die Erdbeschleunigung. Bei einem Vulkanausbruch werden Gesteinsbrocken mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 120$ vertikal nach oben geschleudert. Bestimmen Sie die maximale Höhe.



19 Der abgebildete Graph einer Funktion f beschreibt näherungsweise, wie sich die Anzahl der Tiere in einem Reservat entwickelt.

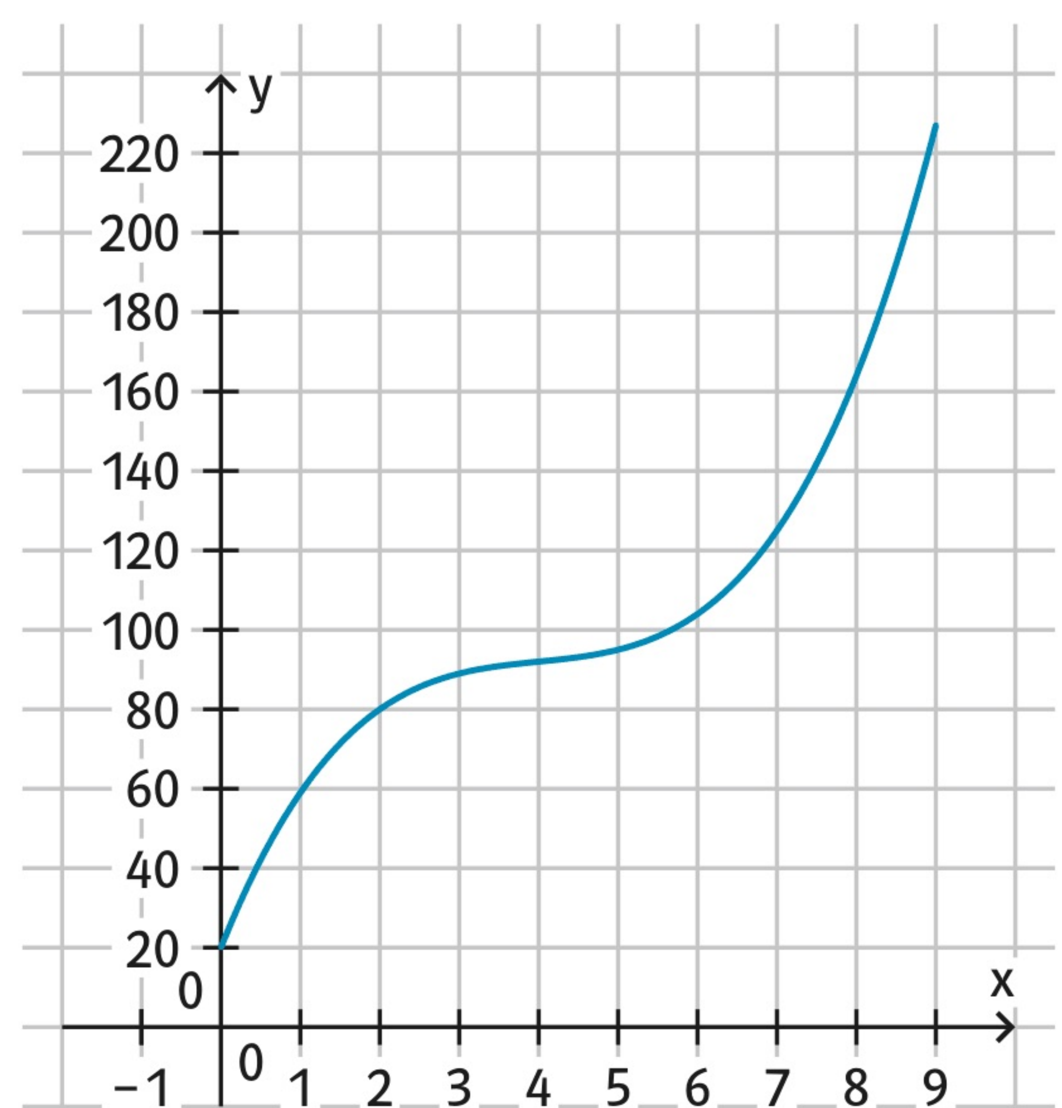


a) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Anzahl der Tiere am stärksten zunimmt.

b) Interpretieren Sie die Gerade g.

c) Skizzieren Sie die Graphen der ersten beiden Ableitungen von f und deuten Sie die Graphen im Sachzusammenhang.

20 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2**
Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K: x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0; 9]$ beschrieben werden.
Dabei gibt K(x) die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen.
Die Abbildung zeigt den Graphen von K.



a) Geben Sie mithilfe der Abbildung

α) die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.

β) das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \le x \le 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

b) Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

c) Zeichnen Sie den Graphen von E in die Abbildung ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

d) Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

Hinweis zu Aufgabe 20 c):
Übertragen Sie zunächst den Graphen von K in Ihr Heft und ergänzen Sie in dieser Zeichnung den Graphen von E.

21 Mit der Gleichung $K(x) = 1000x^5 + 1000x^4 + 1000x^3 + 1000x^2 + 1000x$ lässt sich das Gesamtkapital in € berechnen, das sich für eine fünfjährige Geldanlage mit 1000 € jährlicher Einzahlung und einer Verzinsung von p % nach fünf Jahren ergibt.
Für die Variable x gilt $x = 1 + \frac{p}{100} = (100 + p)\,\%$. Wenn man das Gesamtkapital K_G kennt, das man nach fünf Jahren besitzen wird, kann man den unbekannten Zinssatz rückwirkend mit folgendem Ansatz bestimmen: $K(x) = K_G$ oder $K(x) - K_G = 0$.

a) Bestimmen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms den Zinssatz, mit dem das Kapital von 1000 € verzinst wurde, wenn sich nach fünf Jahren ein Gesamtkapital von 5500 € ergibt. Verwenden Sie hierfür das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 1{,}1$.

b) Ermitteln Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms den Zinssatz, wenn man bei einer zehnjährigen Geldanlage mit 1000 € jährlicher Einzahlung nach den zehn Jahren ein Gesamtkapital von 11 000 € hat.

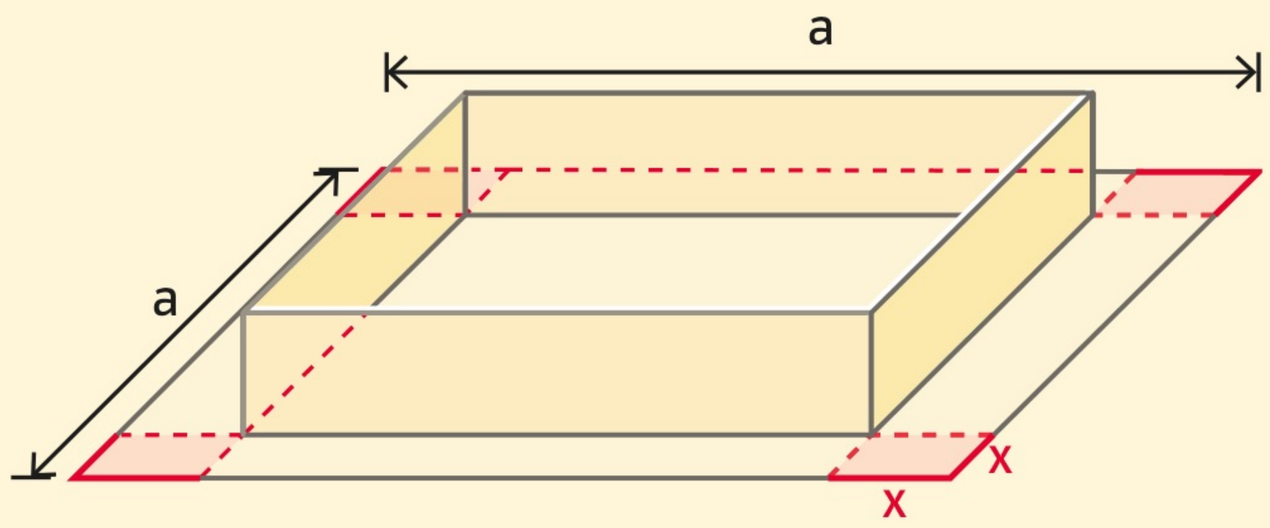
c) Bestimmen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms den Zinssatz, wenn man bei einer zehnjährigen Geldanlage mit 2000 € jährlicher Einzahlung nach den zehn Jahren ein Gesamtkapital von 22 000 € hat.

Funktionenscharen und Ortskurven

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge a (in cm) soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Haben die Einschnitte die Länge x (in cm), so erhält man zur Berechnung des Volumens V_a (in cm^3) die Gleichung

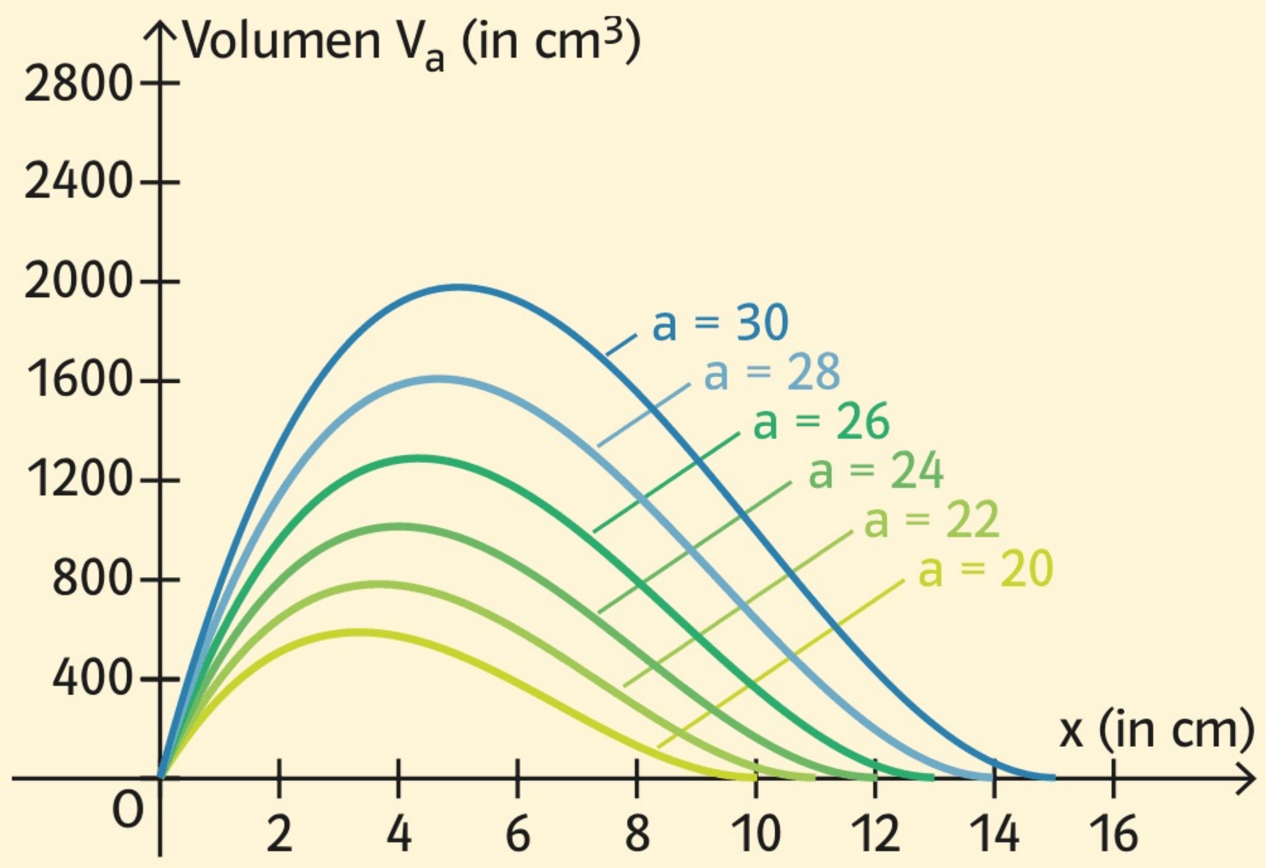
$$V_a(x) = x(a - 2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

V_a ist eine Funktion von x mit $0 < x < \frac{a}{2}$.



Auf diese Art kann man alle Funktionen der **Funktionenschar** V_a mithilfe eines einzigen Terms beschreiben. Der Term enthält einen Platzhalter a, den sogenannten **Scharparameter**.

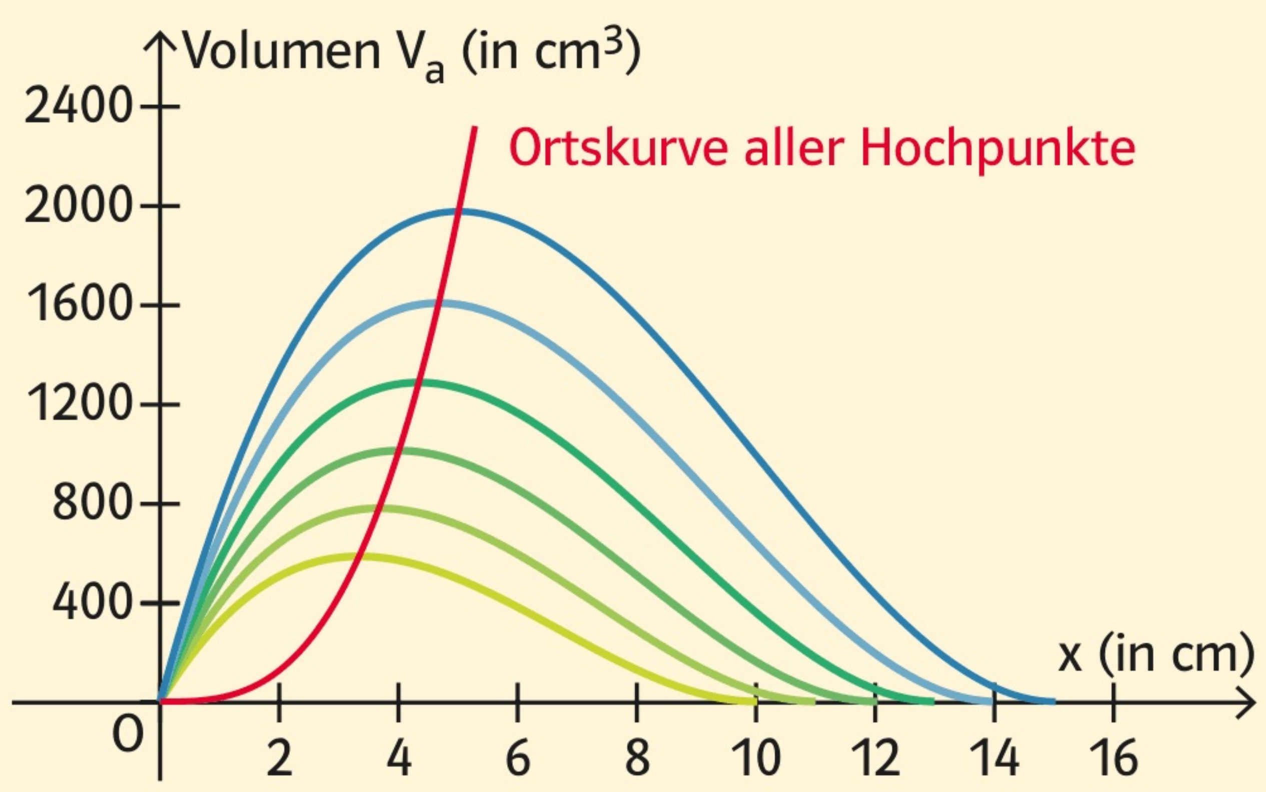
Betrachtet man die Graphen von V_a für verschiedene Werte von a, so erkennt man, dass es für jeden Wert von a eine Schachtel mit maximalem Volumen gibt. Aus $V_a'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$ erhält man $x_1 = \frac{a}{6}$ und $x_2 = \frac{a}{2}$, wobei $x_2 \notin D$ ist.
Mit $V_a''(x) = 24x - 8a$ ist $V_a''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0$.
Damit hat das Volumen an der Stelle $x_1 = \frac{a}{6}$ ein Maximum mit $V_a\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3$.



Die zu einer Schar gehörenden Scharkurven haben oft Gemeinsamkeiten. Alle Kurven im obigen Beispiel haben einen Hochpunkt $H_a\left(\frac{a}{6} \middle| \frac{2}{27}a^3\right)$. Zeichnet man einige Kurven der Schar in dasselbe Koordinatensystem und verbindet dann die Hochpunkte, so stellt man fest, dass diese selbst wieder auf einer Kurve liegen.

Die Gleichung dieser Kurve lässt sich folgendermaßen bestimmen:

Wählt man für a einen bestimmten Wert a_0, so hat der Hochpunkt den x-Wert $x_0 = \frac{a_0}{6}$ und den y-Wert $y_0 = \frac{2}{27}a_0^3$. Wegen $a_0 = 6x_0$ ergibt sich daraus $y_0 = 16x_0^3$. Alle Hochpunkte liegen also auf der Kurve mit der Gleichung $y = 16x^3$.
Die Kurve, auf der alle Hochpunkte liegen, wird **Ortskurve** oder **Ortslinie** aller Hochpunkte genannt.



1 Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}^+$ die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x^3 - ax^2$. Ihre Graphen sind G_a.

a) Bestimmen Sie den Wert von a, für den der Graph der Schar durch den Punkt $P(1|-1)$ verläuft.

b) Zeigen Sie: Alle Graphen der Schar verlaufen durch den Ursprung.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen und die Koordinaten der Extrempunkte von G_a.

2 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$. Untersuchen Sie die Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie Extrem- und Wendepunkte.

a) $f_a: x \mapsto x^3 - ax$ **b)** $f_a: x \mapsto x^2 - ax - 1$ **c)** $f_a: x \mapsto a^2x^4 - 6x^2$

3 Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^3 - kx,\ k \in \mathbb{R}^+$.

a) Untersuchen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware den Einfluss des Parameters k auf den Verlauf der Graphen G_k.

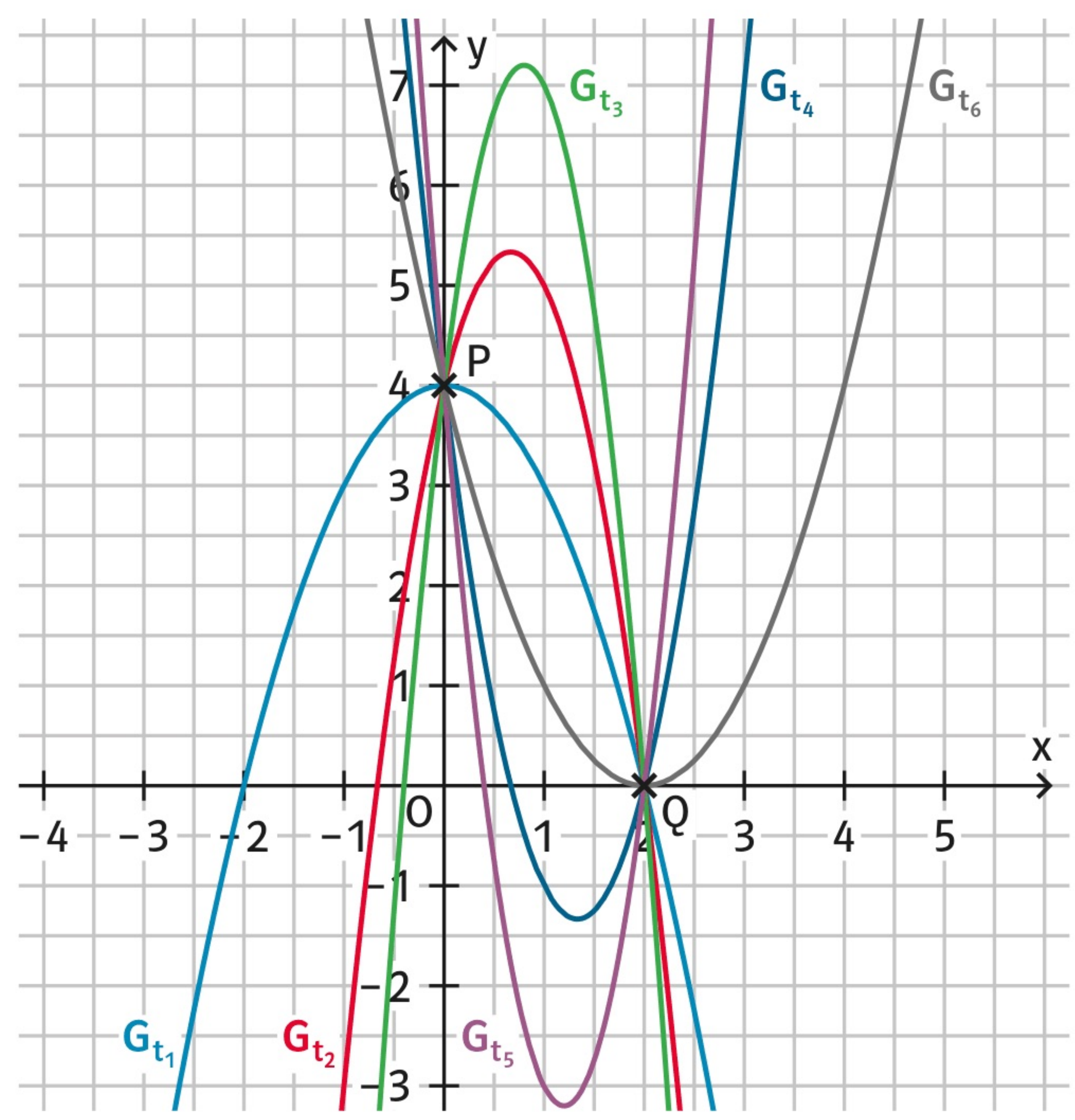
b) Bestimmen Sie den Wert für k, für den G_k durch den Punkt $P(1\,|\,-3)$ verläuft.

c) Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an G_k im Ursprung.

d) Bestimmen Sie den Wert für k, für den die Gerade mit der Gleichung $y = 8x + t,\ t \in \mathbb{R}$, an der Stelle $x = 2$ Tangente an G_k ist.

e) Zeichnen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware für den in Teilaufgabe d) bestimmten Wert von k den Graphen G_k und die Tangente an G_k in $P(2\,|\,f_k(2))$.

4 Die Graphen G_t einer quadratischen Funktionenschar f_t verlaufen alle durch die Punkte P und Q (vgl. Abbildung).



a) Bestimmen Sie für diese Funktionenschar einen Funktionsterm in Abhängigkeit von x und t mit $x, t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$.

b) Ermitteln Sie den Wert von t, für den G_t durch den Punkt $R(3\,|\,1)$ verläuft.

c) Abgebildet sind die Graphen von quadratischen Funktionen der Schar für sechs ganzzahlige Werte von t.
Erläutern Sie, wie sich mithilfe des Funktionsterms und der Graphen die Werte t_1 bis t_6 ermitteln lassen.

d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer dynamischen Mathematiksoftware.

5 Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(t) = 0{,}5t^3 - 1{,}5kt^2 + 6kt - 6t + 50,\ k \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Extremstellen dieser Funktionenschar und bestimmen Sie den Wert von k, für den f_k kein Extremum besitzt.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich alle Graphen der Funktionenschar in zwei Punkten schneiden, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

c) Die Funktionen f_3 und f_5 geben für $t \in [0; 4]$ näherungsweise die Geschwindigkeit $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ von zwei Zugvögeln während eines Fluges an (t entspricht der Zeit in Stunden). Untersuchen Sie mithilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) und gegebenenfalls weiterer Überlegungen oder Rechnungen, welcher Vogel innerhalb dieses Zeitraums von vier Stunden im Durchschnitt schneller fliegt.



d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer dynamischen Mathematiksoftware.

6 Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}^+$ die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = a^2x^3 - 6ax^2 + 9x$ mit den Graphen G_a.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Hochpunkte H_a und der Tiefpunkte T_a der Graphen G_a und skizzieren Sie G_1 und G_2 in dasselbe Koordinatensystem.

b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für den Graphen G_H, auf dem alle Hochpunkte der Schar liegen, und zeichnen Sie G_H in das vorhandene Koordinatensystem.

7 Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + 2x^2 + kx$.

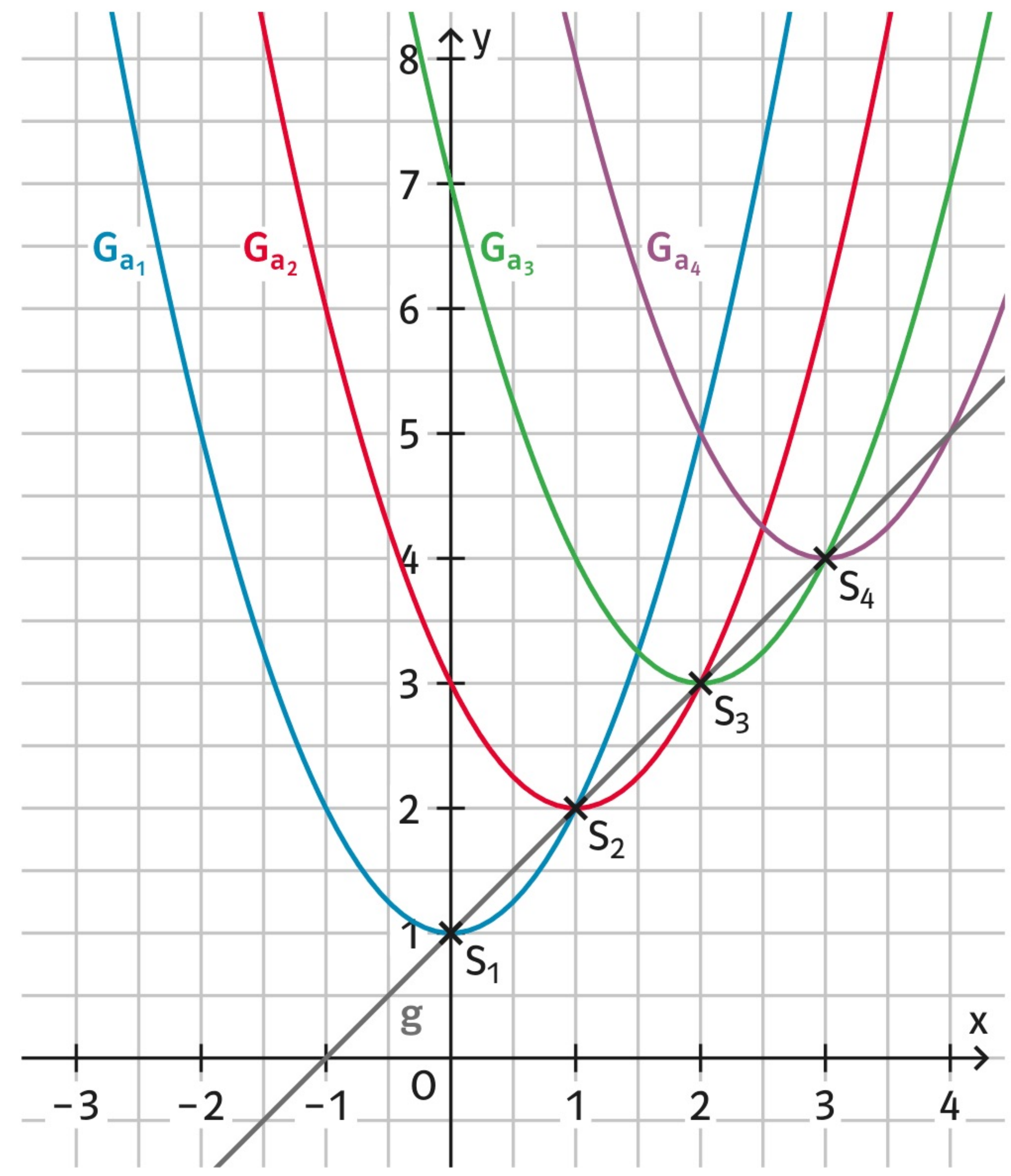
a) Bestimmen Sie jeweils die Gleichung für die Ortskurve der Hochpunkte, der Tiefpunkte und der Wendpunkte der Graphen der Schar.

b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer dynamischen Mathematiksoftware.

8 Eine Normalparabel, wird so verschoben, dass ihr Scheitel wie abgebildet auf der Geraden g wandert.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktionenschar f_a, zu der diese Parabeln gehören.

b) Veranschaulichen Sie die Parabelwanderung mit einer dynamischen Mathematiksoftware.



9 Gegeben sind die Funktionenscharen f_a und g_a mit $f_a(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}a^2x^2$ und $g_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 + \frac{3}{2}ax$, $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f_a und g_a für alle $a > 0$ übereinstimmen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Hochpunkte der Graphen von g_a in Abhängigkeit von a. Berechnen Sie, für welche Werte von a die Hochpunkte der Graphen von g_a oberhalb der Geraden h mit $h(x) = 4{,}5$ liegen.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der Graphen von f_a sowie die Ortskurve der Tiefpunkte.

10 Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^2 + kx + k$, $k \in \mathbb{R}$, mit ihren Graphen G_k.

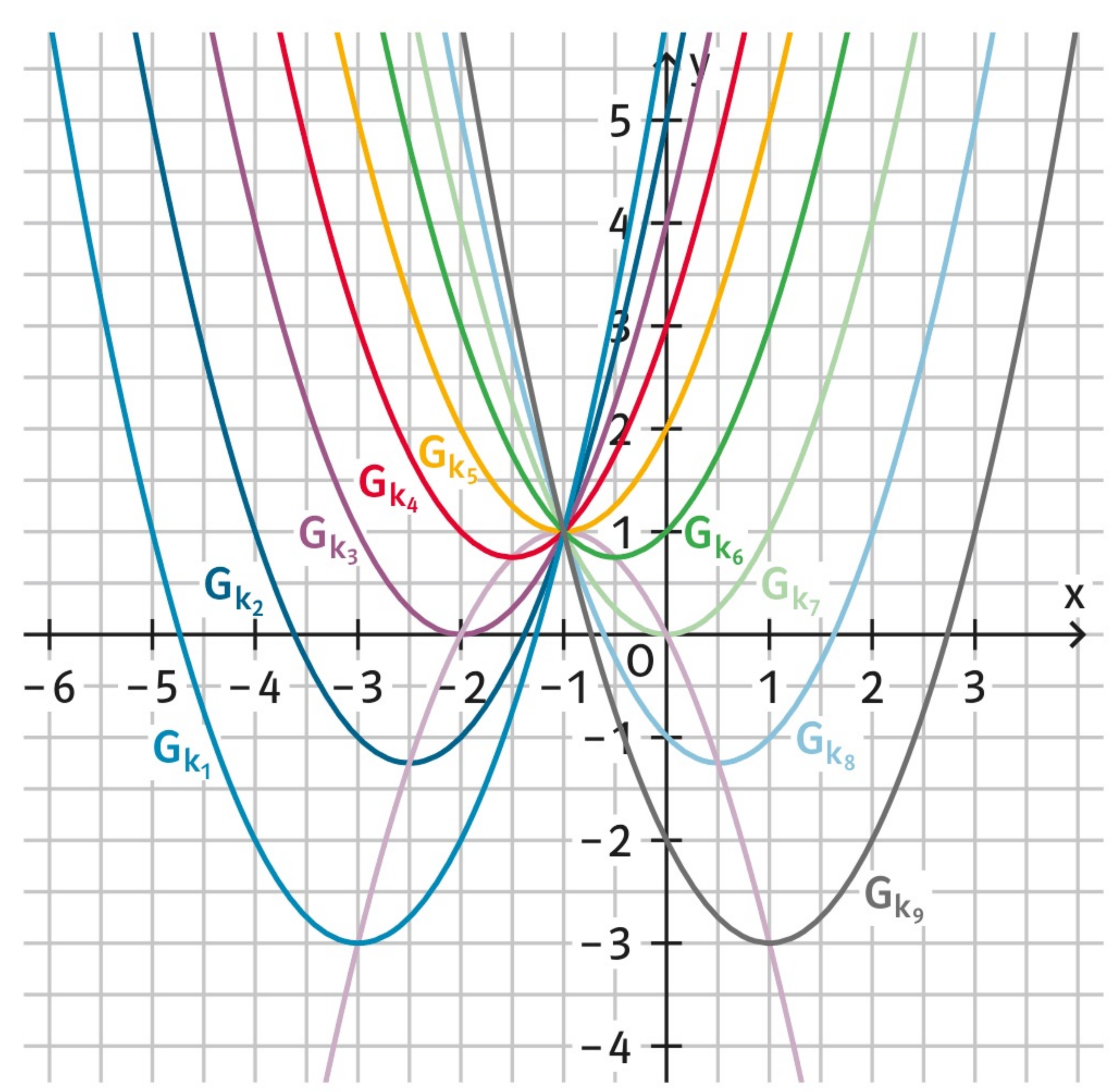
a) Bestimmen Sie das globale Minimum der Funktionenschar f_k.

b) Ermitteln Sie die Ortskurve der Tiefpunkte der Graphen G_k.

c) Berechnen Sie den Wert von k, für den der Graph G_k die x-Achse berührt.

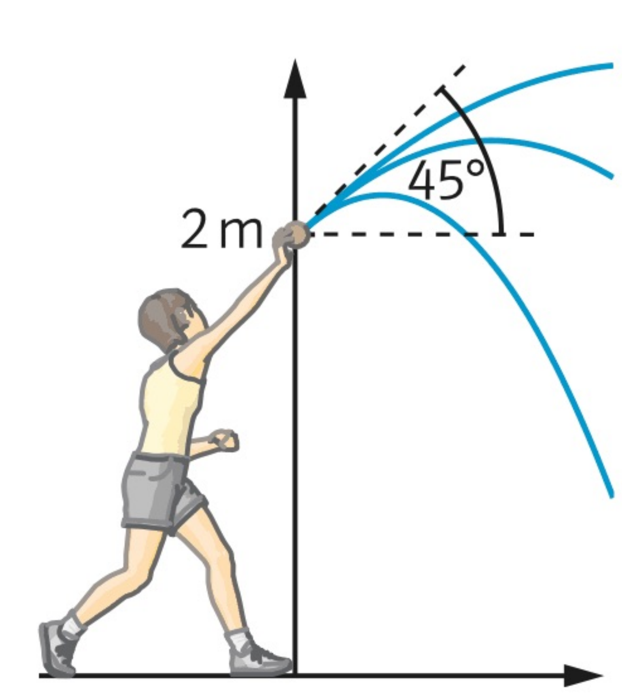
d) Ermitteln Sie, welche Funktionen der Schar zwei Nullstellen und welche keine Nullstelle haben.

e) Zeigen Sie, dass es einen Punkt gibt, durch den alle Graphen G_k verlaufen, und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an.



11 Wird ein Ball aus einer Höhe von 2 m unter einem Winkel von 45° gegenüber der Horizontalen abgeworfen, so kann die Flugbahn des Balls mit dem Graphen der Funktion h_v mit $h_v(x) = 2 + x - 10\frac{x^2}{v^2}$, $v \in \mathbb{R}^+$, modelliert werden.

Hierbei ist v (in $\frac{m}{s}$) der Betrag der Abwurfgeschwindigkeit, x (in m) die horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt und $h_v(x)$ (in m) die jeweilige Höhe über dem Boden.
Jede Flugbahn hat einen Punkt mit maximaler Höhe h.
Ermitteln Sie die Gleichung für die Ortskurve dieser Punkte.



Rückblick

Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ dreimal differenzierbar.

$f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1,\ D = \mathbb{R}$

Monotonie

Die Funktion f heißt **streng monoton zunehmend** bzw. **abnehmend** in einem Intervall I der Definitionsmenge, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$.

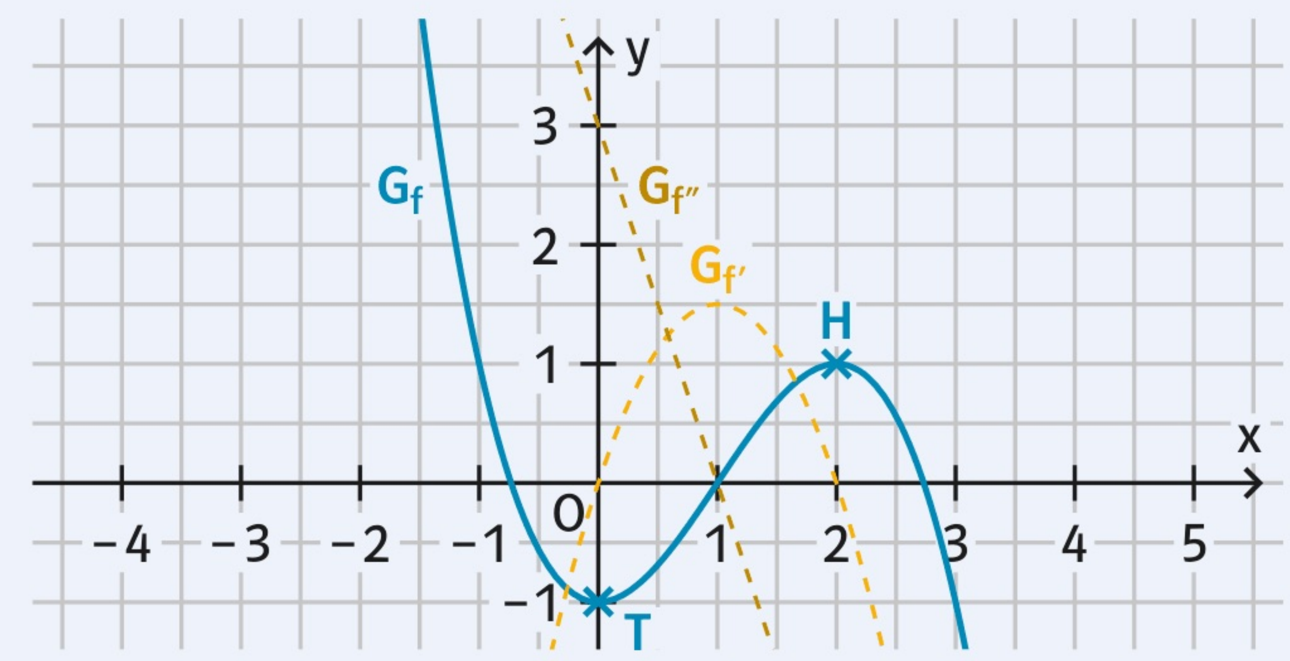
Monotoniekriterium: Wenn für alle $x \in I$ gilt:
$f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton zunehmend in I,
$f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton abnehmend in I.

$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x = 3x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$
$\Rightarrow f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.
Da $f'(x) > 0$ ist für $0 < x < 2$, ist f streng monoton zunehmend in $[0; 2]$.
Da $f'(x) < 0$ ist für $x < 0$ und $x > 2$, ist f streng monoton abnehmend in $]-\infty; 0]$ und $[2; +\infty[$.

Krümmung

Bewegt man sich auf dem Graphen von f in positiver x-Richtung und beschreibt man dabei eine Links- bzw. Rechtskurve, so heißt G_f in diesem Bereich **linksgekrümmt** bzw. **rechtsgekrümmt**.
Kriterien:
Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist $f'(x)$ streng monoton zunehmend in I und der Graph von f linksgekrümmt in I.
Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist $f'(x)$ streng monoton abnehmend in I und der Graph von f rechtsgekrümmt in I.

$f''(x) = -3x + 3 = -3(x - 1)$
$\Rightarrow f''(x) = 0$ für $x_3 = 1$.
Da $f''(x) > 0$ ist für $x < 1$, ist G_f in $]-\infty; 1]$ linksgekrümmt.
Da $f''(x) < 0$ ist für $x > 1$, ist G_f in $[1; +\infty[$ rechtsgekrümmt.



Extremstellen und Extrempunkte

Kriterien (hinreichende Bedingungen für Extremstellen):
Sei x_0 eine innere Stelle von I.
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum**, wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen VZW von + nach − hat oder wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ gilt.
Der Punkt $H(x_0 | f(x_0))$ ist dann ein **Hochpunkt** von G_f.
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum**, wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen VZW von − nach + hat oder wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ gilt.
Der Punkt $T(x_0 | f(x_0))$ ist dann ein **Tiefpunkt** von G_f.

Extremstellen und Extrempunkte:
$f'(0) = 0$ mit VZW von − nach + $\Rightarrow T(0|-1)$.
$f'(2) = 0$ mit VZW von + nach − $\Rightarrow H(2|1)$.
Alternativ:
$f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0 \Rightarrow T(0|-1)$.
$f'(2) = 0$ und $f''(2) < 0 \Rightarrow H(2|1)$.

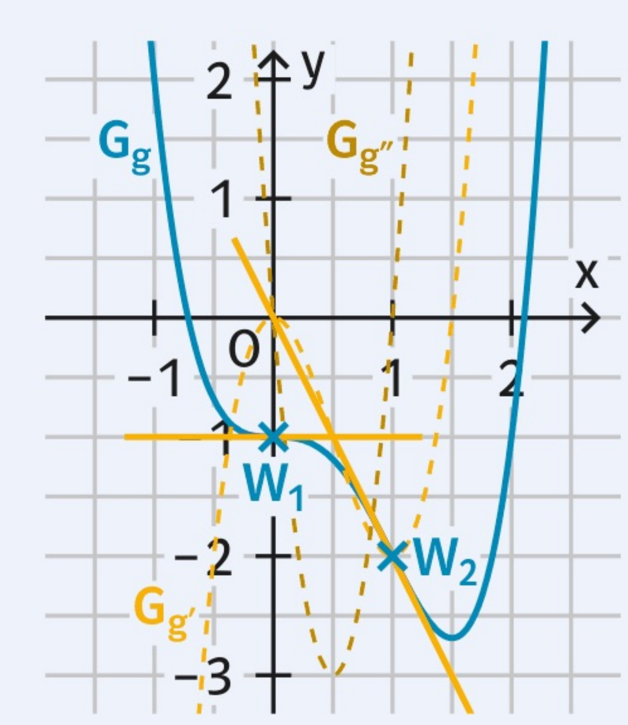
Wendestellen und Wendepunkte

Kriterien (hinreichende Bedingungen für Wendestellen):
Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in I$ eine **Wendestelle**, wenn $f''(x_0) = 0$ und f'' bei x_0 einen VZW hat oder wenn $f''(x_0) = 0$ ist und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt.
Der Punkt $W(x_0 | f(x_0))$ ist dann ein **Wendepunkt** von G_f.
In diesem Punkt ändert der Graph sein Krümmungsverhalten.

Die Tangente an G_f im Wendepunkt heißt **Wendetangente**.
Sie durchsetzt den Graphen im Wendepunkt.

Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente ist ein **Terrassenpunkt**.

$g(x) = x^4 - 2x^3 - 1$
$g'(x) = 4x^3 - 6x^2$
$g''(x) = 12x^2 - 12x$
Wendepunkte:
$g''(0) = 0$ mit VZW
$\Rightarrow W_1(0|0)$.
$g''(1) = 0$ mit VZW
$\Rightarrow W_2(1|-2)$.

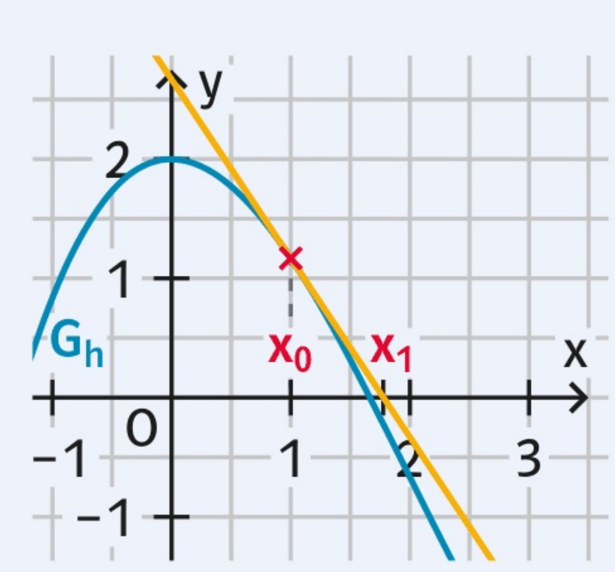


Wendetangenten:
$g'(0) = 0 \Rightarrow w_1: y = -1 \Rightarrow W_1$ ist Terrassenpunkt.
$g'(1) = -2 \Rightarrow w_2: -2 = -2 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 0$ und $w_2: y = -2x$.

Newton-Verfahren

Hat die differenzierbare Funktion f eine Nullstelle, so kann man diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren ermitteln. Dabei beginnt man mit einem geeignet gewählten Näherungswert x_0 als Startwert und berechnet mit der folgenden Iterationsvorschrift die weiteren Näherungswerte für die Nullstelle von f:

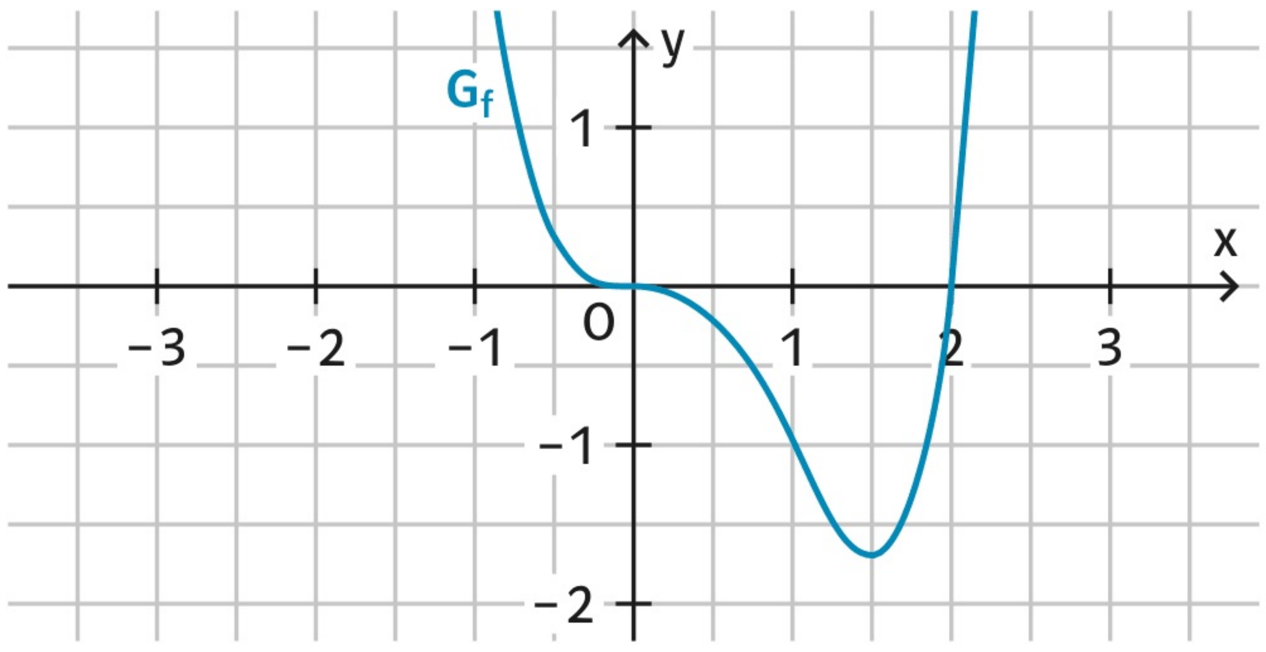
$$\mathbf{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } f'(x_n) \neq 0.$$



$h(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2$
$h'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
Startwert: $x_0 = 1$.
$x_1 = 1 - \frac{h(1)}{h'(1)} = 1 - \frac{\frac{7}{6}}{-\frac{3}{2}} = \frac{16}{9}$

Lösungen | Seite 221

1 **a)** Entnehmen Sie dem gegebenen Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 möglichst große Intervalle, in denen f streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend ist.
b) Entnehmen Sie dem Graphen möglichst große Intervalle, in denen er links- bzw. rechtsgekrümmt ist.

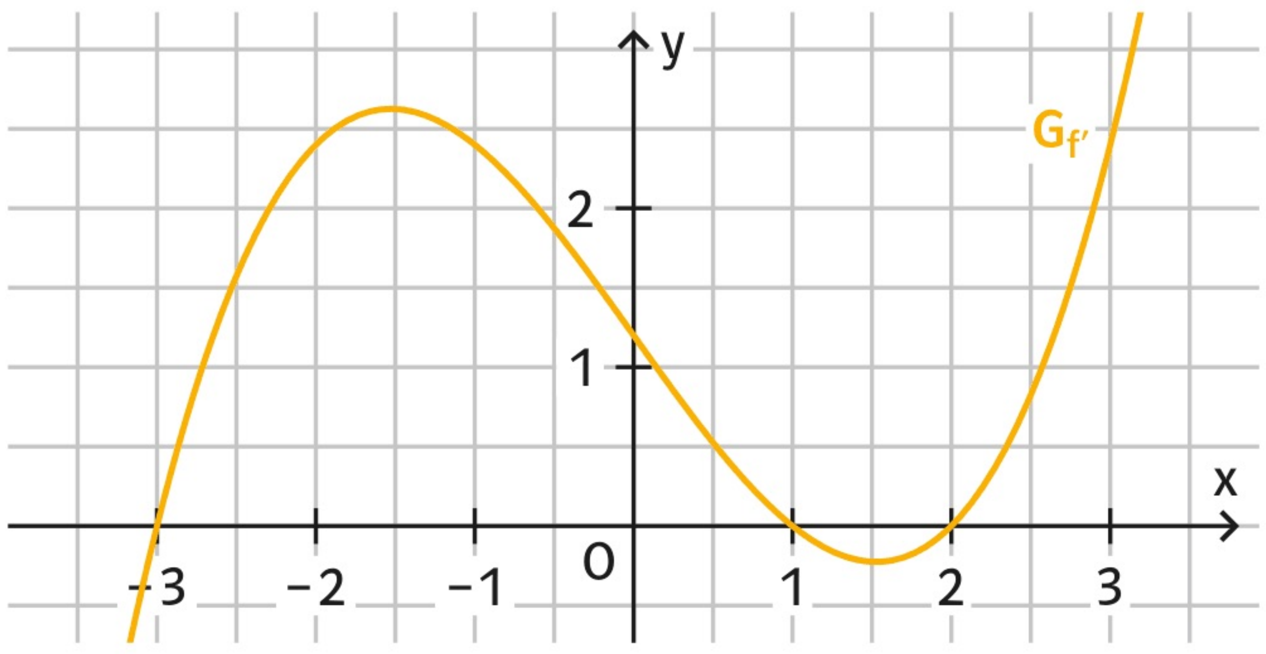


2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x - 2$.
a) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle von f und ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f.
b) Untersuchen Sie rechnerisch das Krümmungsverhalten des Graphen von f.

3 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2**
Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, deren Graph im Punkt $(2|1)$ eine waagrechte Tangente, aber keinen Extrempunkt hat.

4 Der Graph einer ganzrationalen Funktion f fünften Grades ist für $x \leq -3$ linksgekrümmt und besitzt Wendepunkte bei $x = -3$, $x = 1$ und $x = 5$.
Skizzieren Sie einen möglichen Graphen der zweiten Ableitung von f.

5 Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f.
a) Bestimmen Sie die Extremstellen von f und geben Sie jeweils ihre Art an.
b) Geben Sie alle Wendestellen von f an und ermitteln Sie, in welchen Bereichen der Graph von f linksgekrümmt ist.
c) Begründen Sie, dass $f(-1) > f(-2)$ ist.

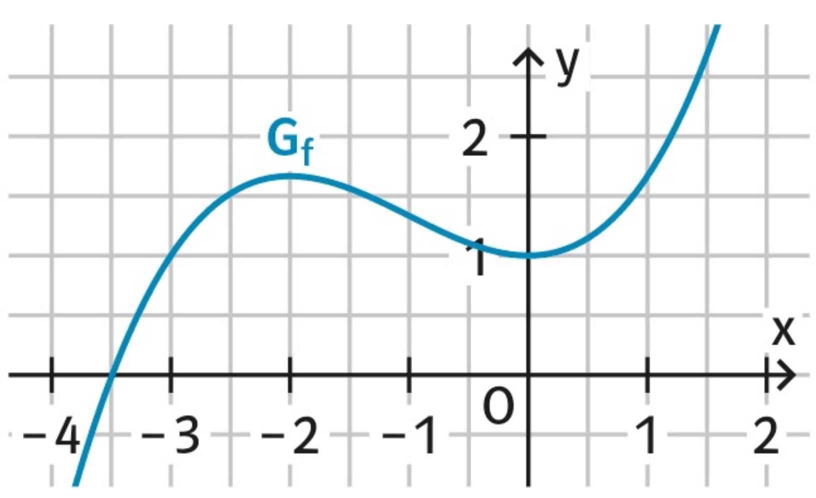


6 Weisen Sie nach: Die Tangenten an den Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$ in den beiden Wendepunkten schneiden sich im Punkt $S(0|4)$.

7 Eine Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in I$.
Beurteilen Sie die Aussage.
a) Ist $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 eine lokale Extremstelle von f.
b) Ist x_0 eine lokale Extremstelle von f, so ist $f'(x_0) = 0$.
c) Ist x_0 eine Nullstelle von f′ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine Maximumstelle von f.
d) Ist x_0 eine Nullstelle von f″ mit Vorzeichenwechsel, so ändert der Graph von f an der Stelle x_0 sein Krümmungsverhalten und x_0 ist eine Extremstelle von f′.
e) Ist $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine Maximumstelle von f.

8 Untersuchen Sie den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$ auf Symmetrie, bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion, geben Sie ihr Verhalten im Unendlichen an und bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen. Skizzieren Sie anschließend G_f.

9 Abgebildet ist der Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$.
a) Die Nullstelle x^* der Funktion f soll mit dem Newton-Verfahren ermittelt werden. Führen Sie dazu die ersten beiden Iterationsschritte mit dem Startwert $x_0 = -4$ durch.
b) Geben Sie zwei Stellen an, die auf keinen Fall als Startwert gewählt werden dürfen, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



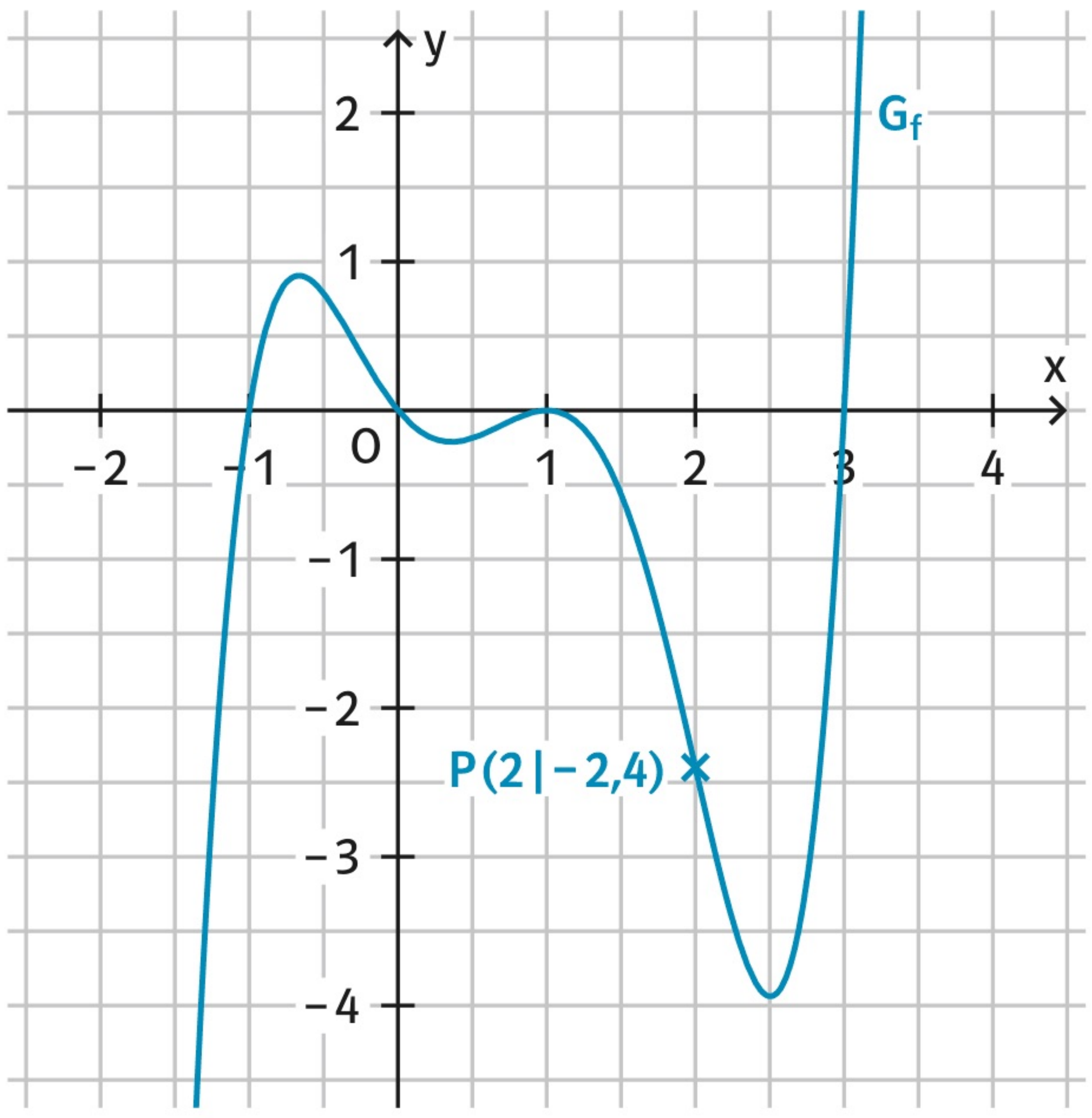
Für das Lösen von Aufgaben, bei denen man den Lösungsweg nicht unmittelbar erkennt, können die im Folgenden vorgestellten Hilfsmittel und Strategien nützlich sein.

Aufstellen und Lösen einer Gleichung

Es gibt Problemstellungen, bei denen es möglich ist, gegebene Größen oder Informationen mithilfe einer eingeführten Variablen so zueinander in Beziehung zu setzen, dass eine Gleichung aufgestellt werden kann. Die Lösung dieser Gleichung führt dann zur Lösung des gegebenen Problems (entweder direkt, vgl. Aufgabe „Bestimmen eines Funktionsterms", oder nach weiteren Überlegungen, vgl. Aufgabe „Parabeln").

Aufgabe „Bestimmen eines Funktionsterms"

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in ℝ definierten ganzrationalen Funktion f vom Grad 5. Der Punkt P liegt auf G_f. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung den Funktionsterm von f.



Lösung

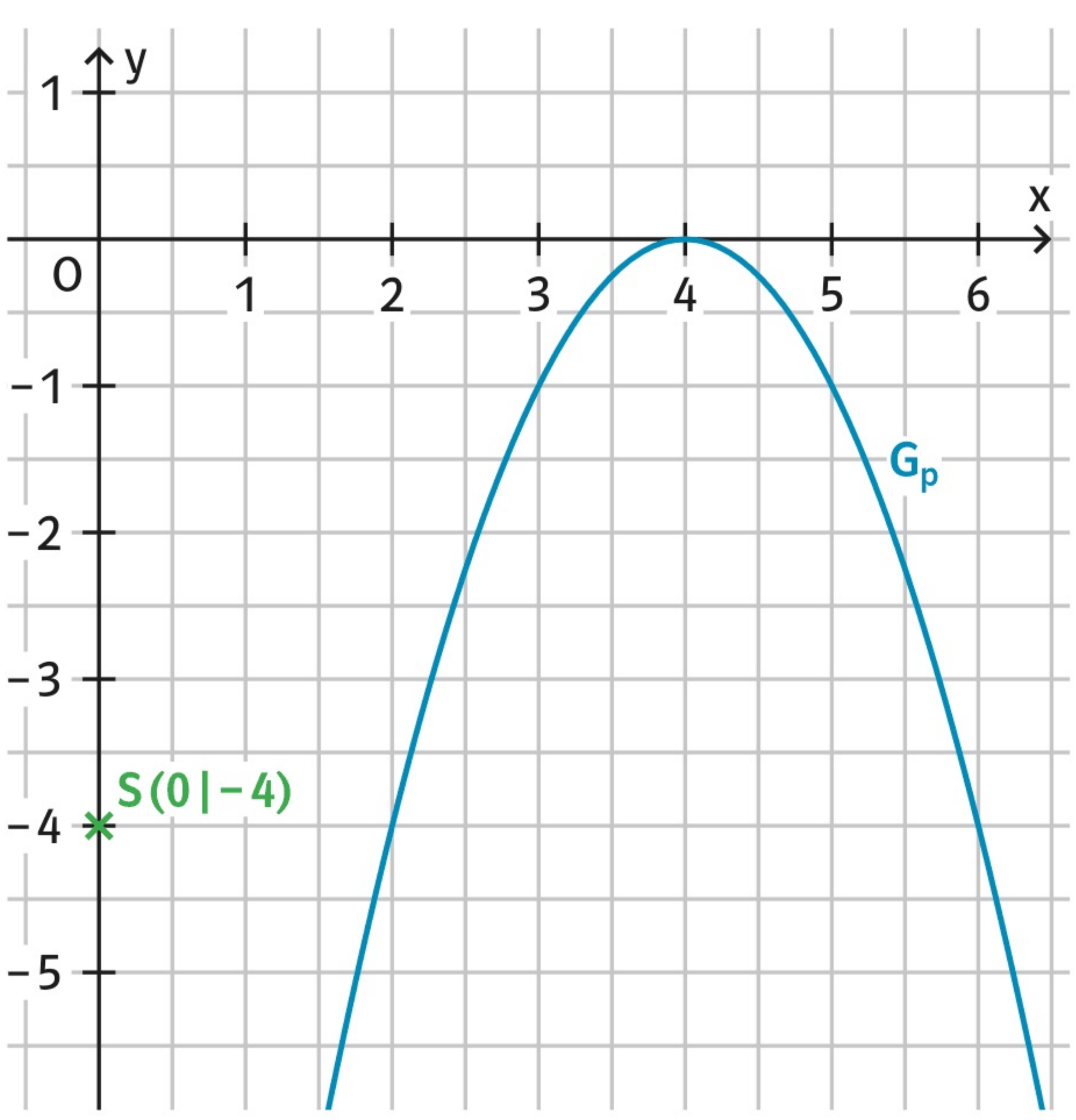
Die Funktion f ist vom Grad 5 und hat – mit Vielfachheiten gerechnet – fünf Nullstellen (jeweils eine einfache bei −1, 0 und 3 sowie eine doppelte bei 1). Somit ist unter Verwendung der noch zu bestimmenden Variable $k \in \mathbb{R}$ folgender Ansatz für den Funktionsterm von f möglich:
$f(x) = k \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-3)$.
Der Punkt $(2 \mid -2{,}4)$ liegt auf G_f, das heißt, es gilt $f(2) = -2{,}4$.
Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} k \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot (-1) &= -2{,}4 \\ -6k &= -2{,}4 \\ k &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Antwort: Der Funktionsterm von f lautet $f(x) = 0{,}4 \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-3)$.

Aufgabe „Parabeln"

Gegeben ist die in ℝ definierte quadratische Funktion p; ihr Graph G_p ist eine Parabel (vgl. Abbildung). Ermitteln Sie die Terme aller in ℝ definierten quadratischen Funktionen h, für die gilt:
(A) Der Graph von h besitzt den Scheitel $S(0 \mid -4)$.
(B) Der Graph von h und G_p haben keinen gemeinsamen Punkt.



Lösung

(1) Erfassen und Verarbeiten der gegebenen Informationen
Für die Parabel G_p ergibt sich $p(x) = -(x-4)^2$.
Da der Graph von h in $S(0 \mid -4)$ seinen Scheitel hat, muss für den Funktionsterm von h gelten: $h(x) = a \cdot x^2 - 4$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(2) Aufstellen, Lösen und Weiterverarbeiten der Gleichung
Mithilfe des Ansatzes $h(x) = p(x)$ können die Werte für a bestimmt werden, für die die zugehörigen Funktionsgraphen die gegebenen Bedingungen (A) und (B) erfüllen:
$a \cdot x^2 - 4 = -(x-4)^2 \Leftrightarrow a \cdot x^2 - 4 = -x^2 + 8x - 16 \Leftrightarrow (a+1) \cdot x^2 - 8x + 12 = 0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (a+1) \cdot 12}}{2 \cdot (a+1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (a+1) \cdot 12}}{2 \cdot (a+1)}.$$

Da hier gefordert ist, dass sich die Graphen von h und p nicht schneiden, sind alle Werte von a relevant, für die die Diskriminante negativ ist: $64 - 4 \cdot (a+1) \cdot 12 < 0 \Leftrightarrow 64 < 48 \cdot (a+1) \Leftrightarrow \frac{4}{3} < a + 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{3}$.

Antwort: Die Graphen der Funktionen h mit $h(x) = a \cdot x^2 - 4$ und $a > \frac{1}{3}$ erfüllen die Bedingungen (A) und (B).

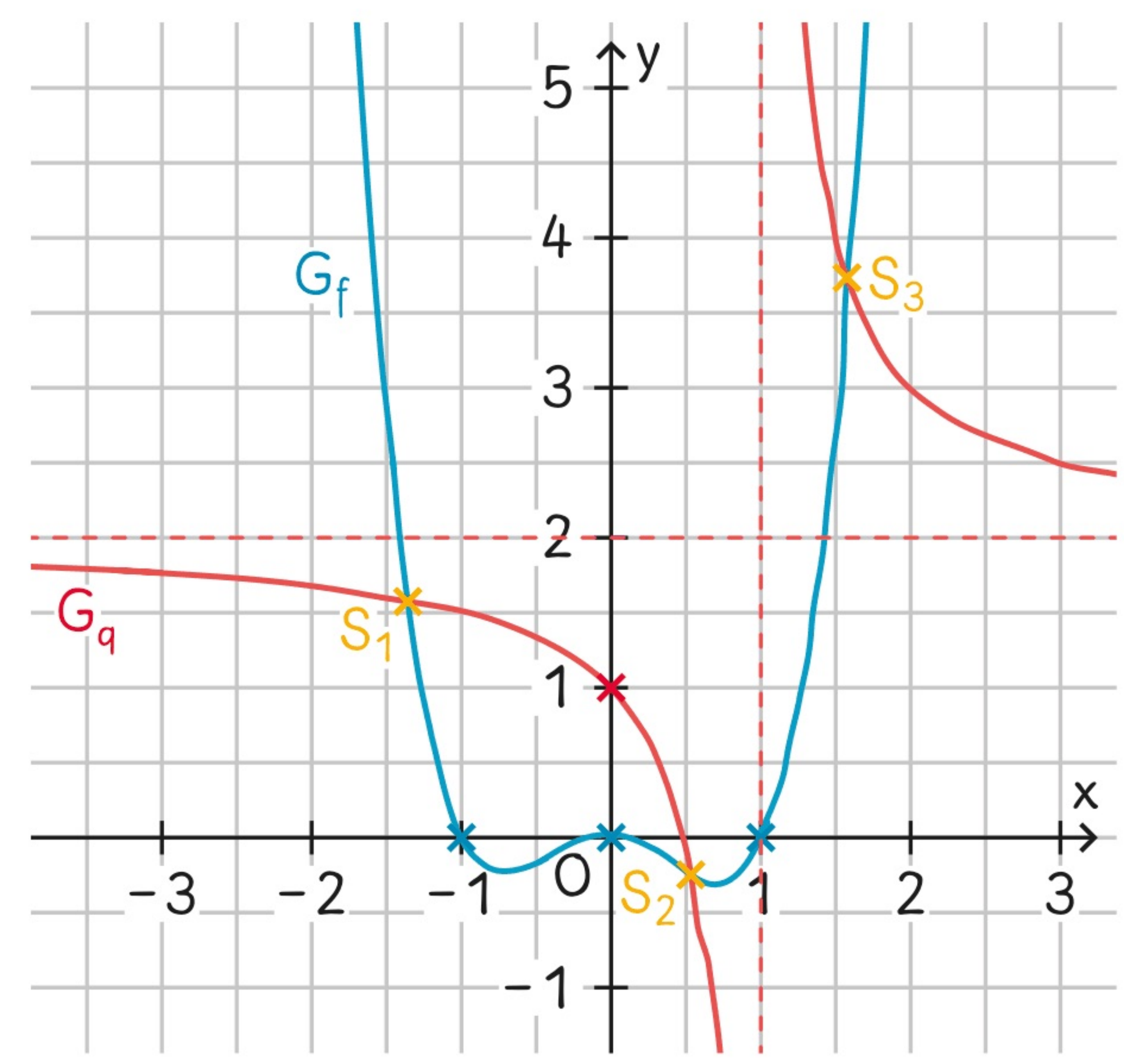
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Bei vielen Problemstellungen ist es hilfreich, eine gegebene Situation mithilfe einer geeigneten Figur oder Skizze grafisch zu veranschaulichen. Dadurch sieht man die Situation unter einem anderen Blickwinkel.

Aufgabe „Schnittpunkte von Funktionsgraphen"

Gegeben ist die in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ definierte Funktion $q: x \mapsto \frac{1}{x-1} + 2$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto x^4 - x^2$.
Ermitteln Sie die Anzahl der Schnittpunkte der zu q und f gehörigen Graphen G_q und G_f.

Lösung



Auf der Grundlage der folgenden Überlegungen kann man eine aussagekräftige Skizze der Graphen G_q und G_f erstellen und sich somit die Situation veranschaulichen:
Die Funktion q ist elementar gebrochen-rational, ihr **Graph G_q** hat die Asymptoten mit den Gleichungen $x = 1$ und $y = 2$ und schneidet die y-Achse bei $q(0) = 1$.
Die Funktion f ist ganzrational und besitzt Grad 4. Mithilfe der Umformung $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$ kann man direkt auf ihre Nullstellen 0 (doppelt), −1 und 1 (jeweils einfach) schließen. Da der Koeffizient von x^4 positiv ist, ist der charakteristische **Verlauf von G_f** „von links oben nach rechts oben".

Antwort: Mithilfe der Skizze kann gefolgert werden, dass die Graphen G_q und G_f drei Schnittpunkte haben.

Aufgabe „Sportliche Kinogänger"

Von den 120 Personen der Jahrgangsstufe 11 sind $\frac{2}{5}$ Mitglied in einem Sportverein, 96 gehen nicht regelmäßig ins Kino. Fünf Prozent dieser 120 Jugendlichen gehen regelmäßig ins Kino und sind nicht Mitglied im Sportverein.
Aus den 120 Personen wird eine zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

S: „Die Person ist Mitglied im Sportverein."
K: „Die Person geht regelmäßig ins Kino."

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person regelmäßig ins Kino geht, wenn man weiß, dass sie Mitglied im Sportverein ist.

Lösung

Man kann sich die gegebene Situation mithilfe einer Vierfeldertafel oder eines Baumdiagramms strukturiert veranschaulichen und damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit ermitteln.

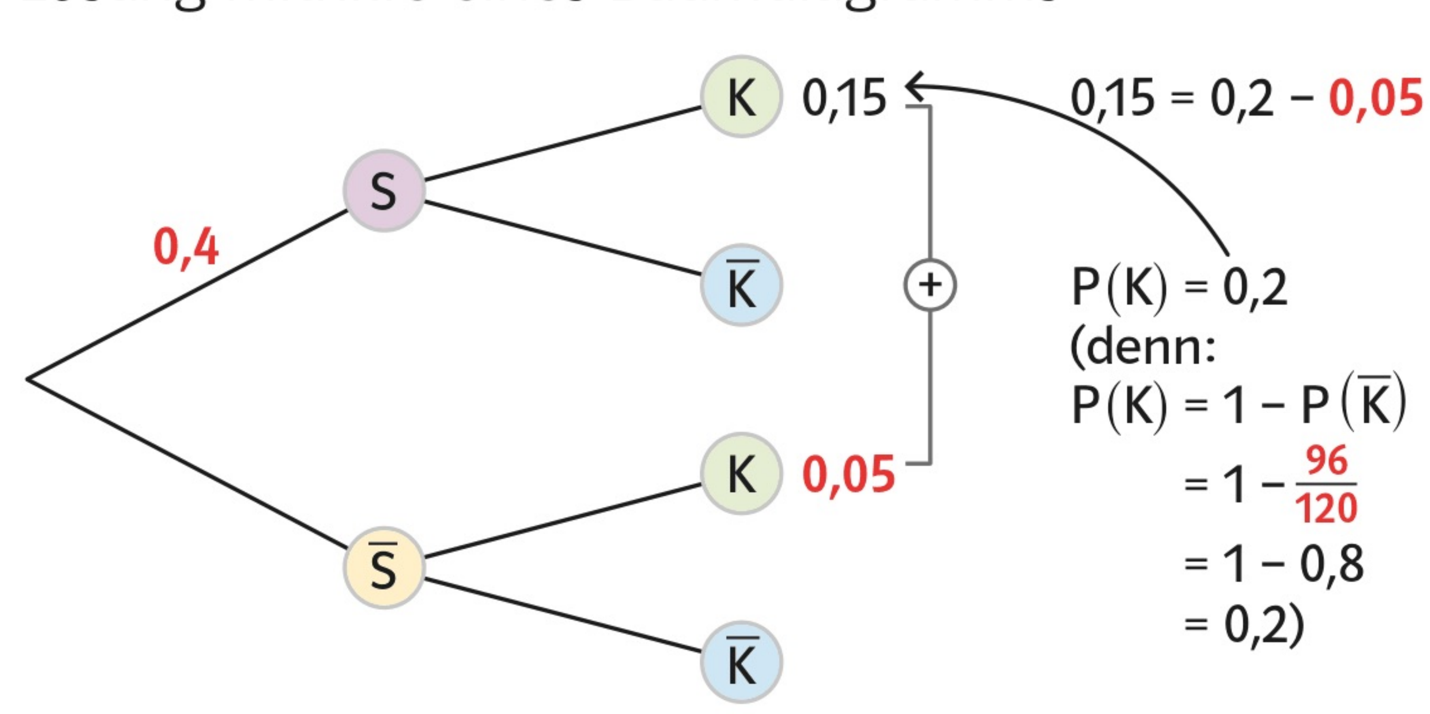
Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel
(Arbeiten mit Anzahlen oder Anteilen möglich):

	K	$\overline{K}$	
S	18 (≙ 0,15)		48 (≙ 0,4)
$\overline{S}$	6 (≙ 0,05)		
	24 (≙ 0,2)	96 (≙ 0,8)	120 (≙ 1)

$\Rightarrow P_S(K) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$ $\left(\text{bzw. } P_S(K) = \frac{0{,}15}{0{,}4} = \frac{3}{8}\right)$

Anmerkung: Die in der Vierfeldertafel bzw. im Baumdiagramm rot geschriebenen Werte basieren direkt auf der Angabe.

Lösung mithilfe eines Baumdiagramms:



$\Rightarrow P_S(K) = \frac{P(S \cap K)}{P(S)} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = \frac{3}{8}$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person regelmäßig ins Kino geht, wenn man weiß, dass sie Mitglied im Sportverein ist, beträgt $\frac{3}{8}$.

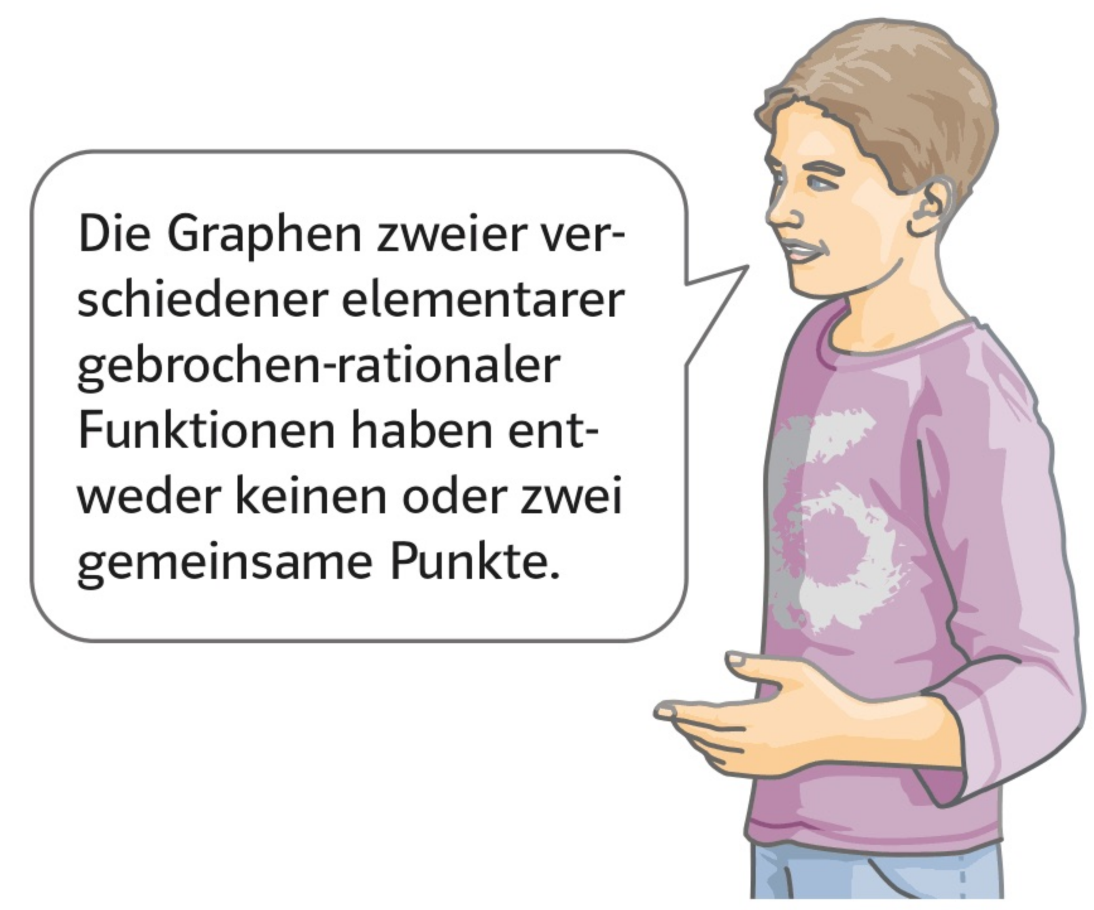
Betrachten von etwas Gegenteiligem

Manchmal ist es bei Problemstellungen einfacher, etwas Gegenteiliges zu betrachten:

- Bei Begründungen kann es von Vorteil sein, ein Gegenbeispiel zu finden (vgl. Aufgabe „Gegenbeispiel").
- Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist es manchmal einfacher, die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ des Gegenereignisses $\overline{A}$ zu bestimmen und den Zusammenhang $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ zu nutzen (vgl. Aufgabe „Gegenereignis").

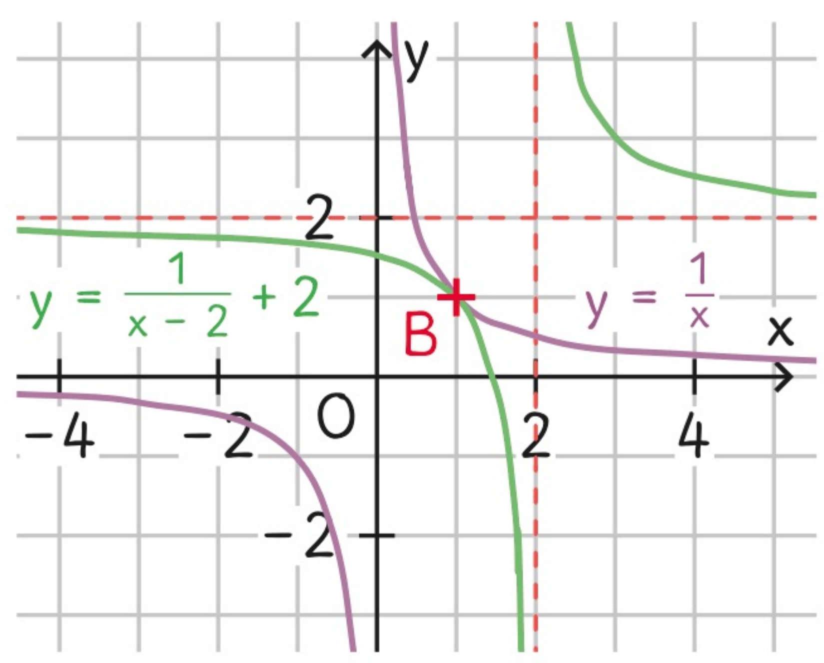
Aufgabe „Gegenbeispiel"

Beurteilen Sie, ob Linus mit seiner Aussage recht hat.



Lösung

Mithilfe einer Skizze ergibt sich die Idee, dass es Graphen von elementaren gebrochen-rationalen Funktionen geben könnte, die genau einen gemeinsamen Punkt (Berührpunkt) haben, z. B. die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x-2} + 2$.



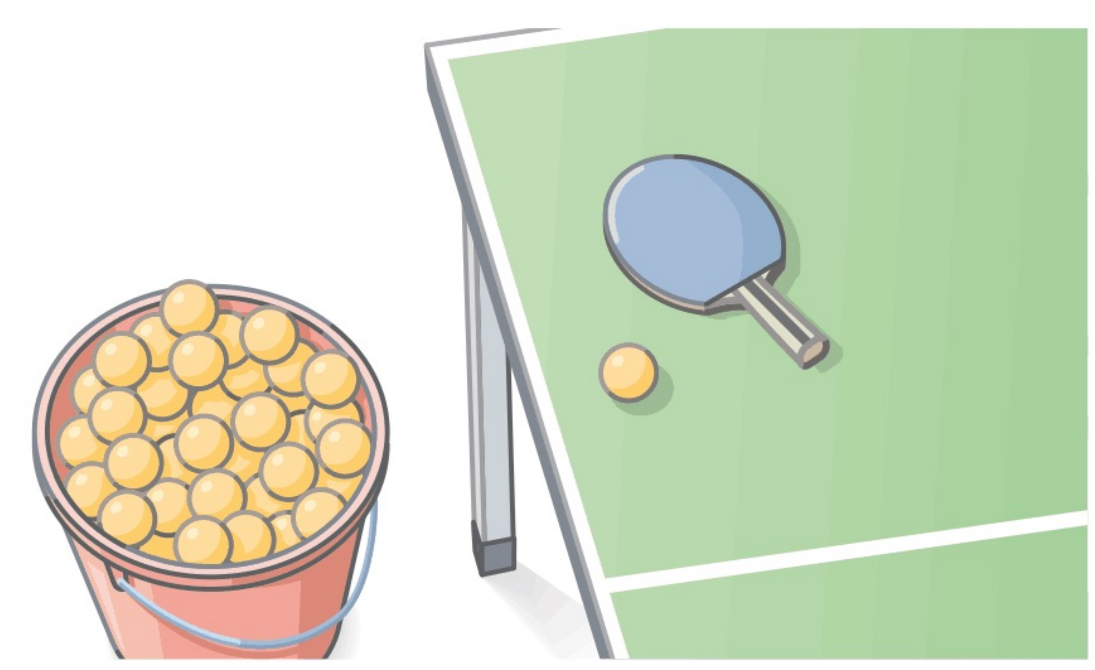
Durch Gleichsetzen der Funktionsterme und Auflösen nach x lässt sich die Vermutung bestätigen:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-2} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1 + 2x - 4}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = x + 2x^2 - 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Antwort: Die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x-2} + 2$ haben genau einen gemeinsamen Punkt $B(1|1)$. Dieses Gegenbeispiel zeigt, dass Linus nicht recht hat.

Aufgabe „Gegenereignis"

In einem Eimer befinden sich 105 äußerlich nicht unterscheidbare Tischtennisbälle der Hersteller A und B, wobei von Hersteller B doppelt so viele Bälle enthalten sind wie von Hersteller A. Von allen Bällen besitzen 40 % Premiumqualität, der Rest hat Standardqualität.
Nur jeder dritte der Bälle mit Premiumqualität stammt von Hersteller B.
Trainer Tim greift zufällig einen Ball aus dem Eimer heraus.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Ball von Hersteller A ist oder Premiumqualität hat.



Lösung

Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: „Der Ball ist von Hersteller A." mit $\overline{A} = B$
P: „Der Ball besitzt Premiumqualität."

	P	$\overline{P}$	
A			
$\overline{A}$	$\frac{1}{3} \cdot 42 = 14$	$70 - 14 = 56$	$\frac{2}{3} \cdot 105 = 70$
	$0{,}4 \cdot 105 = 42$		105

Mithilfe einer Vierfeldertafel kann man die im Aufgabentext gegebenen Informationen strukturiert darstellen und daraus die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A \cup P) = P(A \cap P) + P(A \cap \overline{P}) + P(\overline{A} \cap P)$ berechnen.
Statt dazu die drei Einzelwahrscheinlichkeiten $P(A \cap P)$, $P(A \cap \overline{P})$ und $P(\overline{A} \cap P)$ zu bestimmen und ihren Summenwert zu berechnen, ist es geschickter, auszunutzen, dass $\overline{A} \cap \overline{P}$ das Gegenereignis zu $A \cup P$ ist:

$$P(A \cup P) = 1 - P(\overline{A \cup P}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{P}) = 1 - \frac{56}{105} = \frac{7}{15}.$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der herausgegriffene Ball von Hersteller A ist oder Premiumqualität hat, beträgt $\frac{7}{15}$.

Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

Es gibt Problemstellungen, bei denen es möglich ist, gegebene Größen oder Informationen mithilfe von geeigneten Variablen so zueinander in Beziehung zu setzen, dass verschiedene Gleichungen aufgestellt werden können. Durch Lösen dieser Gleichungen gelangt man dann zur Lösung des gegebenen Problems.

Aufgabe

Bestimmen Sie den Term der gesuchten Funktion f (vgl. Plakat).

> GESUCHT: Funktion f
> (1) f ist ganzrational und hat Grad 4.
> (2) Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.
> (3) G_f ist symmetrisch bzgl. der y-Achse.
> (4) G_f schneidet die x-Achse viermal.
> (5) f hat die Nullstelle $x = 1$.
> (6) f hat die Wertemenge $\left[-\frac{27}{7}; +\infty\right[$.
> (7) G_f schneidet die y-Achse bei $y = 3$.
> (8) Es gilt $f(x) \geq f(2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Aus den Hinweisen (1) und (3) folgt für den Term von f:
$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aus (5) folgt $f(1) = 0$. $\quad\Leftrightarrow$ (I) $\quad a + b + c = 0$

Aus (7) folgt $f(0) = 3$. $\quad\Leftrightarrow$ (II) $\quad c = 3$

Aus (6) und (8) folgt $f(2) = -\frac{27}{7}$. $\quad\Leftrightarrow$ (III) $\quad 16a + 4b + c = -\frac{27}{7}$

(II) in (I) und (II) in (III):

(I) $\quad a + b + 3 = 0 \quad \Rightarrow b = -a - 3$

(III) $\quad 16a + 4b + 3 = -\frac{27}{7}$

$b = -a - 3$ in (III):

(III) $\quad 16a - 4a - 12 + 3 = -\frac{27}{7} \Leftrightarrow 12a - 9 = -\frac{27}{7} \Leftrightarrow 12a = \frac{36}{7} \Leftrightarrow a = \frac{3}{7} \Rightarrow b = -\frac{3}{7} - 3 = -\frac{24}{7}$

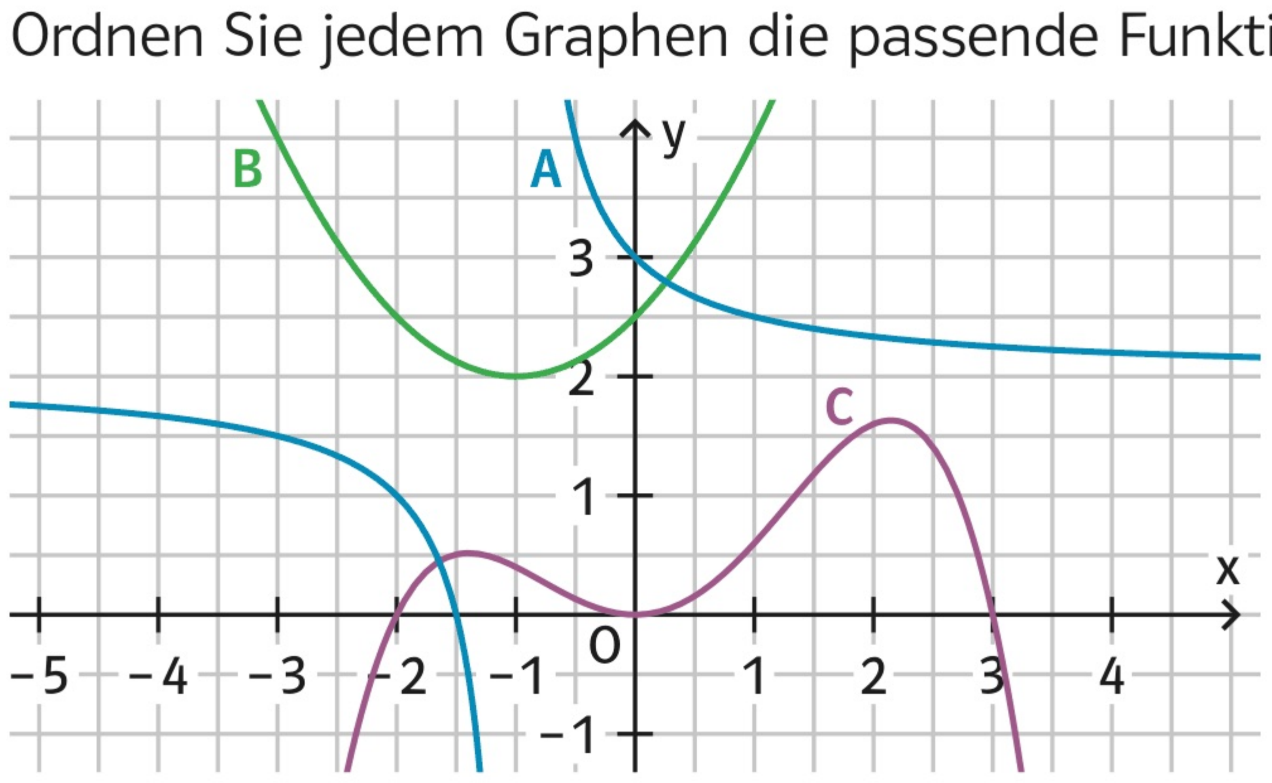
Antwort: Der Term der gesuchten Funktion f lautet $\frac{3}{7}x^4 - \frac{24}{7}x^2 + 3$.

Ausschlussprinzip

Muss man bei einer Problemstellung aus mehreren vorhandenen „Lösungen" die richtige auswählen, ist es oft sinnvoll (und einfacher) zu begründen, warum die „falschen Lösungen" nicht infrage kommen können.

Aufgabe

Zu jedem der in der Abbildung dargestellten Graphen gehört genau eine der auf den Kärtchen notierten Funktionen. Ordnen Sie jedem Graphen die passende Funktion begründet zu.



1 $\quad x \mapsto \frac{1}{x-1} + 2$

2 $\quad x \mapsto -0{,}1x^4 + 0{,}1x^3 + 0{,}6x^2$

3 $\quad x \mapsto (x+1)^2 + 1{,}5$

4 $\quad x \mapsto x(x+2)(x-3)$

5 $\quad x \mapsto \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{5}x^2$

6 $\quad x \mapsto \frac{1}{x+1} + 2$

7 $\quad x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$

8 $\quad x \mapsto \frac{1}{x+1} + 3$

Lösung

Bei A handelt es sich um den Graphen einer elementaren gebrochen-rationalen Funktion. Daher kommen für ihn nur die Funktionen 1, 6 und 8 infrage. Funktion 1 scheidet aus, da ihr Graph eine Asymptote mit der Gleichung $x = 1$ (statt $x = -1$) hat, und Funktion 8 scheidet aus, da ihr Graph die y-Achse bei $y = 4$ (statt bei $y = 3$) schneidet. Folglich gehört Funktion 6 zu Graph A.
Graph B ist eine Parabel. Somit sind nur die quadratischen Funktionen 3 und 7 möglich. Funktion 3 scheidet aus, da der Scheitel der zugehörigen Parabel bei $(-1|1{,}5)$ (statt bei $(-1|2)$) liegt. Also gehört Funktion 7 zu Graph B.
Für Graph C kommen schließlich nur noch die Funktionen 2, 4 und 5 infrage. Funktion 4 scheidet aus, da sie bei $x = 0$ keine doppelte Nullstelle besitzt, und Funktion 5 scheidet auch aus, da ihr Graph aufgrund des positiven Koeffizienten von x^4 den charakteristischen Verlauf „von links oben nach rechts oben" hat. Folglich gehört Funktion 2 zu Graph C.

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann lineare und quadratische Funktionen aufstellen und deren Graphen zeichnen.
2. Ich kann von einer gebrochen-rationalen Funktion der Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ die wesentlichen Eigenschaften angeben.
3. Ich kann von einer Potenzfunktion mit $f(x) = a\,x^n$ die wesentlichen Eigenschaften angeben.
4. Ich kann die wesentlichen Eigenschaften von einer ganzrationalen Funktion mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ angeben.
5. Ich kann von einer Exponentialfunktion mit $f(x) = b\,a^x$ die wesentlichen Eigenschaften angeben.
6. Ich kann von einer Sinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ die wesentlichen Eigenschaften angeben.

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen 9/10**
zu 2. **Grundwissen 7/8**
zu 3. **Grundwissen 9/10**
zu 4. **Grundwissen 9/10**
zu 5. **Grundwissen 9/10**
zu 6. **Grundwissen 9/10**

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

Lösungen | Seite 223

1 Lineare und quadratische Funktionen aufstellen und deren Graphen zeichnen

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm und die Nullstelle einer linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte $P(-2|3)$ und $Q(4|-1)$ geht.

b) Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = -x^2 + 2x + 3$. Ihr Graph wird mit Graph G_p bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von p mit den Koordinatenachsen, zeichnen Sie G_p und geben Sie das Monotonieverhalten von G_p an.

2 Eigenschaften von gebrochen-rationalen Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ angeben

Die gebrochen-rationale Funktion f hat den Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{x+2} + 3$.

a) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f und zeichnen Sie den Graphen von f.

3 Eigenschaften von Potenzfunktionen mit $f(x) = a\,x^n$ angeben

Gegeben ist die Potenzfunktion f mit $f(x) = -2x^n$. Geben Sie in Abhängigkeit von n das Monotonieverhalten und die Symmetrie des Graphen von f an.

4 Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ angeben

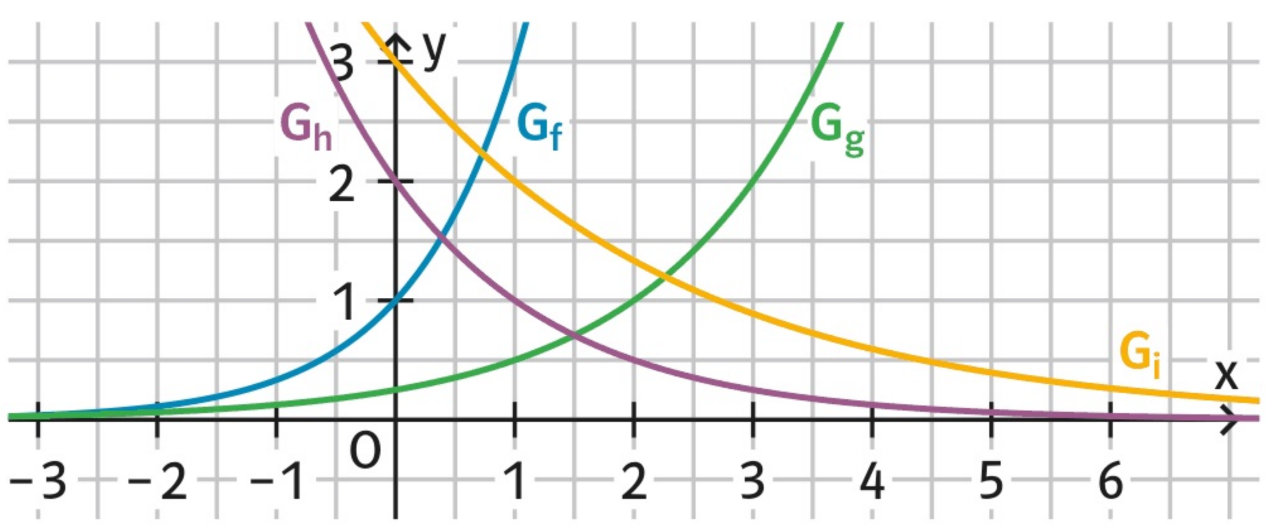
Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f\colon x \mapsto x^3 + x^2 - 2x$

b) $g\colon x \mapsto (x-1)^2 \cdot (x^2 - 1)$

5 Eigenschaften von Exponentialfunktionen mit $f(x) = b\,a^x$ angeben

Gegeben sind die Graphen der Exponentialfunktionen f, g, h und i. Bestimmen Sie jeweils den zugehörigen Funktionsterm.



6 Eigenschaften von Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ angeben

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto a \cdot \sin(b(x+c)) + d$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c, d \in \mathbb{R}$. Für jeden der vier Parameter ist in einer dynamischen Mathematiksoftware ein Schieberegler eingerichtet.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f für $a = 1{,}5$, $b = 2$, $c = 0$ und $d = -1$.

b) Die Schieberegler werden einzeln betätigt. Beschreiben Sie jeweils die Wirkung auf den Graphen von f.

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann Eigenschaften elementarer gebrochen-rationaler Funktionen bestimmen.
2. Ich kann quadratische Gleichungen lösen.
3. Ich kann die Koordinaten von Schnittpunkten zweier Funktionsgraphen bestimmen.
4. Ich kann Bruchgleichungen lösen.
5. Ich kann den charakteristischen Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion ermitteln.
6. Ich kann geeignete Software im Umgang mit Funktionen verwenden.

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen 7/8**
zu 2. **Grundwissen 9/10**
zu 3. **Grundwissen 9/10**
zu 4. **Grundwissen 7/8**
zu 5. **Grundwissen 9/10**
zu 6. **Grundwissen 9/10**

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

Lösungen | Seite 224

1 Eigenschaften elementarer einfacher gebrochen-rationaler Funktionen bestimmen

Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto \frac{2}{x}$, $g\colon x \mapsto \frac{2}{x} - 2$, $h\colon x \mapsto \frac{2}{x-3} + 1$ und $i\colon x \mapsto \frac{2}{x+2} - 1$.

a) Geben Sie zu jeder der Funktionen die Definitionsmenge an.
b) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Graphen der Funktionen f, g, h und i an.
c) Berechnen Sie $f(1)$, $g(1)$, $h(4)$ und $i(-1)$.
d) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen der Funktionen f, g, h und i unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

2 Quadratische Gleichungen lösen

Beurteilen Sie, ob die Funktion f Nullstellen besitzt, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
b) $f(x) = 2x^2 - 16x + 32$
c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 3{,}5$
d) $f(x) = 4x^2 - 12x + 28$
e) $f(x) = (x - 3{,}5)^2$
f) $f(x) = 12x^2 - 4x$
g) $f(x) = 4x^2 - 56$
h) $f(x) = (x - 3)^2 + 25$

3 Koordinaten von Schnittpunkten zweier Funktionsgraphen bestimmen

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{2}{x-4}$ und $g(x) = x + 2$.

4 Bruchgleichungen lösen

Lösen Sie die Bruchgleichung und interpretieren Sie Ihre Lösung grafisch.

a) $\frac{3}{4+x} = \frac{8}{x}$
b) $\frac{x-2}{2x+2} + 2 = 0$

5 Den charakteristischen Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion ermitteln

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto 0{,}25(x-2)^2(x+2)^2$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie ihre Vielfachheiten an.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse.
d) Ermitteln Sie das Verhalten von G_f im Unendlichen.
e) Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Erkenntnisse den Graphen in ein Koordinatensystem und geben Sie die Wertemenge von f an. Überprüfen Sie Ihre Skizze mithilfe eines Funktionenplotters.

6 Geeignete Software im Umgang mit Funktionen verwenden

Zeichnen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware und unter Einsatz von Schiebereglern den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{x-k} + l$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ sowie den Graphen der Funktion $g\colon x \mapsto -x + 5$. Ermitteln sie dann drei Wertepaare $(k; l)$, sodass G_f und G_g genau einen Schnittpunkt haben.

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann mit Brüchen, Dezimalzahlen und Prozentzahlen rechnen.	☺	😐	☹
2. Ich kann Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten angeben.	☺	😐	☹
3. Ich kann Vierfeldertafeln zur Veranschaulichung von verknüpften Ereignissen nutzen.	☺	😐	☹
4. Ich kann Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Baumdiagrammen berechnen.	☺	😐	☹

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen 5/6, 7/8**
zu 2. **Grundwissen 7/8**
zu 3. **Grundwissen 9/10**
zu 4. **Grundwissen 9/10**

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

Lösungen | Seite 225

1 Mit Brüchen, Dezimalzahlen und Prozentzahlen rechnen

a) Berechnen Sie den Wert des Terms ohne Taschenrechner. Geben Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch, als Dezimalzahl und in Prozent an.
(1) $\frac{1}{4} + 0{,}2 + 40\,\%$ (2) $20\,\% \cdot 40\,\%$ (3) $\frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}15}$ (4) $1 - \frac{1}{4} \cdot 10\,\% \cdot 0{,}6$

b) Steffi mixt eine Apfelsaftschorle aus 60 % Apfelsaft und 40 % Mineralwasser. Der Apfelsaft hat einen Zuckergehalt von 12 %. Berechnen Sie den Zuckergehalt der gemixten Apfelsaftschorle in Prozent.

c) Björn möchte in einem Internetshop einen Artikel für 60 € kaufen. Innerhalb einer dreitägigen Sonderaktion senkt der Internetshop die Preise für jeden Artikel um 15 %. Björn hat noch einen 10-€-Gutschein für diesen Shop. Berechnen Sie, wie viel Prozent Björn spart, wenn er den Artikel im Aktionszeitraum kauft und dabei auch den Gutschein einsetzt.

2 Ergebnismengen und Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten angeben

In einer Urne befinden sich 25 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 25 beschriftet sind. Die Zahlen von 1 bis 9 sind schwarz aufgedruckt, die Zahlen von 10 bis 19 blau und die Zahlen von 20 bis 25 rot. Achim zieht eine Kugel.

a) Geben Sie eine Ergebnismenge an,
(1) für die die Laplace-Annahme erfüllt ist, (2) die nur nach den Farben unterscheidet.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (in Prozent) dafür, dass Achim
(1) eine Zahl zieht, die durch 6 teilbar ist, (2) eine einstellige Zahl zieht,
(3) keine blaue Zahl zieht.

3 Vierfeldertafeln nutzen

In der Klasse 11a befinden sich 28 Schülerinnen und Schüler. Für die Oberstufenkurse haben zwölf Französisch und acht Spanisch gewählt. Zehn Schülerinnen und Schüler haben keine der beiden Sprachen gewählt. Eine Person der Klasse 11a wird zufällig ausgewählt. Die Ereignisse S: „Die ausgewählte Person hat Spanisch gewählt“ und F: „Die ausgewählte Person hat Französisch gewählt“ werden betrachtet. Erstellen Sie eine zur Situation passende Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten und ermitteln sie die Wahrscheinlichkeit (in Prozent) dafür, dass die zufällig ausgewählte Person

a) Spanisch und Französisch gewählt hat,

b) entweder Spanisch oder Französisch, aber nicht beide Sprachen gewählt hat.

4 Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms berechnen

Aus einer Urne mit sechs roten und vier blauen Kugeln werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das an den Ästen und unten mit passenden Wahrscheinlichkeiten beschriftet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) genau eine blaue Kugel gezogen wird, **b)** mindestens eine rote Kugel gezogen wird.

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann Terme umformen.
2. Ich kann die Gleichung einer Geraden bestimmen.
3. Ich kann Grenzwerte bestimmen.
4. Ich kann Funktionen auf Stetigkeit untersuchen.
5. Ich kann Steigungen und die Größe eines Steigungswinkels berechnen.

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen 7/8, 9/10**
zu 2. **Grundwissen 7/8**
zu 3. **Beispiel 1,** Seite 9
Beispiel 2, Seite 49
zu 4. **Beispiel 1,** Seite 28
zu 5. **Grundwissen 9/10**

Lösungen | Seite 225

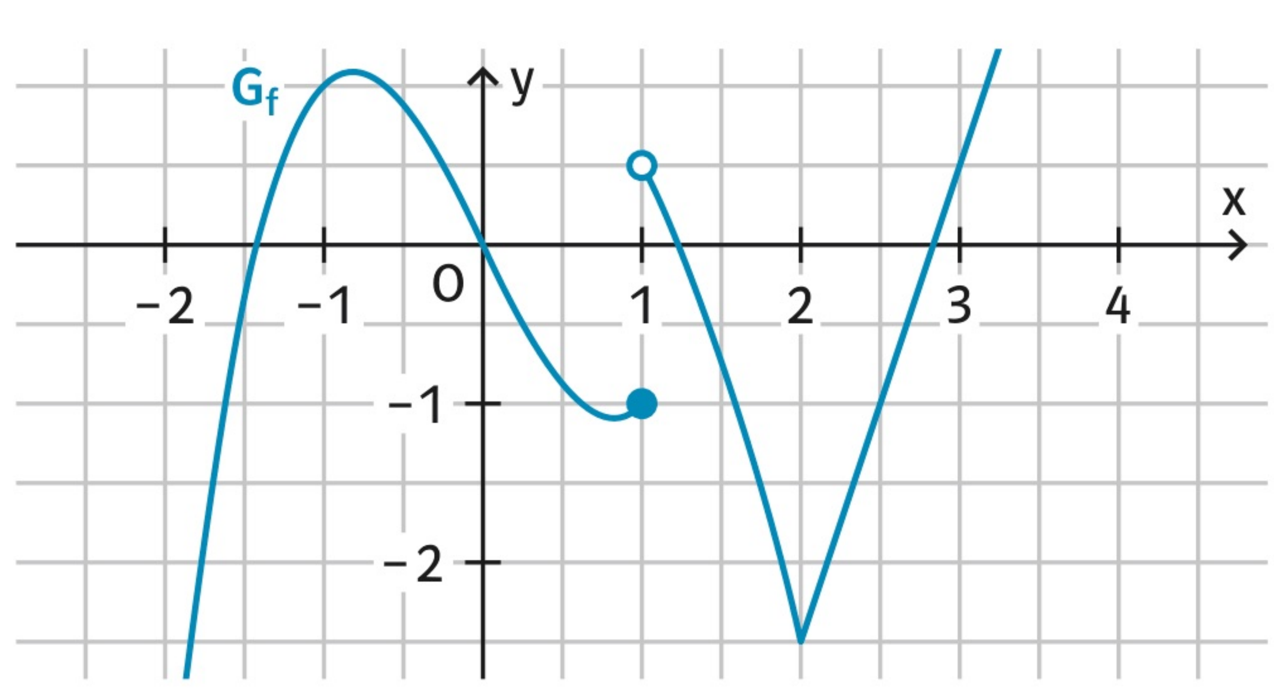
Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

1 Terme umformen
Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.
a) $2(x-3) - x(2+x) - x^2$
b) $-(x-2)^2 - 2(x^2-3)$
c) $\frac{x^3 - 2x^2 + 5x}{x} - 5 + x$
d) $\frac{x^2-9}{x-3} - \frac{2x^2-8x}{x-4}$

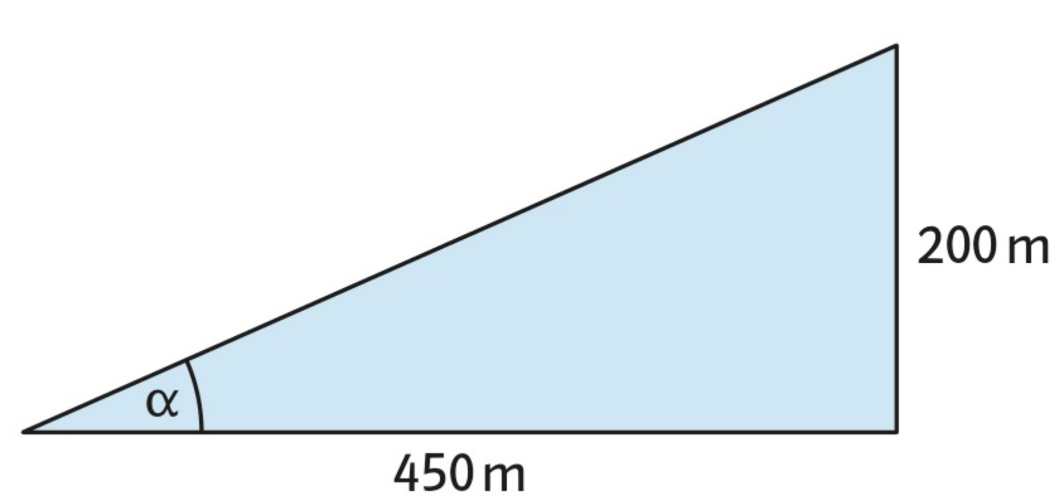
2 Geradengleichungen bestimmen
Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden, die die gegebenen Eigenschaften besitzt.
a) Die Gerade verläuft durch die Punkte $P(-1|3)$ und $Q(2|-5)$.
b) Die Gerade hat die Steigung $m = \frac{2}{3}$ und verläuft durch den Punkt $A(3|-1)$.
c) Die Gerade schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -1$ und hat den y-Achsenabschnitt $t = 3$.
d) Die Gerade verläuft parallel zur Geraden mit $y = -2x + 3$ und durch den Punkt $P(0|-1{,}5)$.

3 Grenzwerte bestimmen
Bestimmen Sie den Grenzwert.
a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 3x}{2x^2 - 4}$
b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2}$
c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x - \frac{1}{x}\right)$
d) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \left(\frac{1}{x-3} \cdot \frac{x}{x+2}\right)$

4 Funktionen auf Stetigkeit untersuchen
a) Erläutern Sie anhand des Graphen, ob die Funktion f an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ jeweils stetig ist.
b) Gegeben ist die Funktion
$$f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 3 & \text{für } x \le 2 \\ ax + a & \text{für } x > 2 \end{cases} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$
Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Funktion f stetig ist.



5 Steigung und die Größe eines Steigungswinkels bestimmen
Dargestellt ist ein Abschnitt einer geradlinig verlaufenden Straße. Bestimmen Sie die Steigung des Straßenabschnitts in Prozent und berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels α.



Check-in zu Kapitel V

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann Nullstellen von Funktionen bestimmen.
2. Ich kann Ableitungsregeln anwenden.
3. Ich kann Ableitungsfunktionen grafisch bestimmen.
4. Ich kann Graphen von Funktionen und ihrer Ableitungen zuordnen.
5. Ich kann Gleichungen von Tangenten an den Graphen einer Funktion ermitteln.

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen 9/10**
zu 2. **Beispiel 1,** Seite 124
zu 3. **Lehrtext,** Seite 117
zu 4. **Beispiel 2,** Seite 118
zu 5. **Beispiel 1,** Seite 128

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

Lösungen | Seite 226

1 Nullstellen bestimmen

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a) $f: x \mapsto 3x^3 + 6x^2 - 9x$

b) $f: x \mapsto (x^2 + 4)(x^2 - 3)$

c) $f: x \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 (x - 7)^3$

d) $f: x \mapsto 0{,}2x^4 - 0{,}4x^2 - 3$

2 Ableitungsregeln anwenden

Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x - 3$

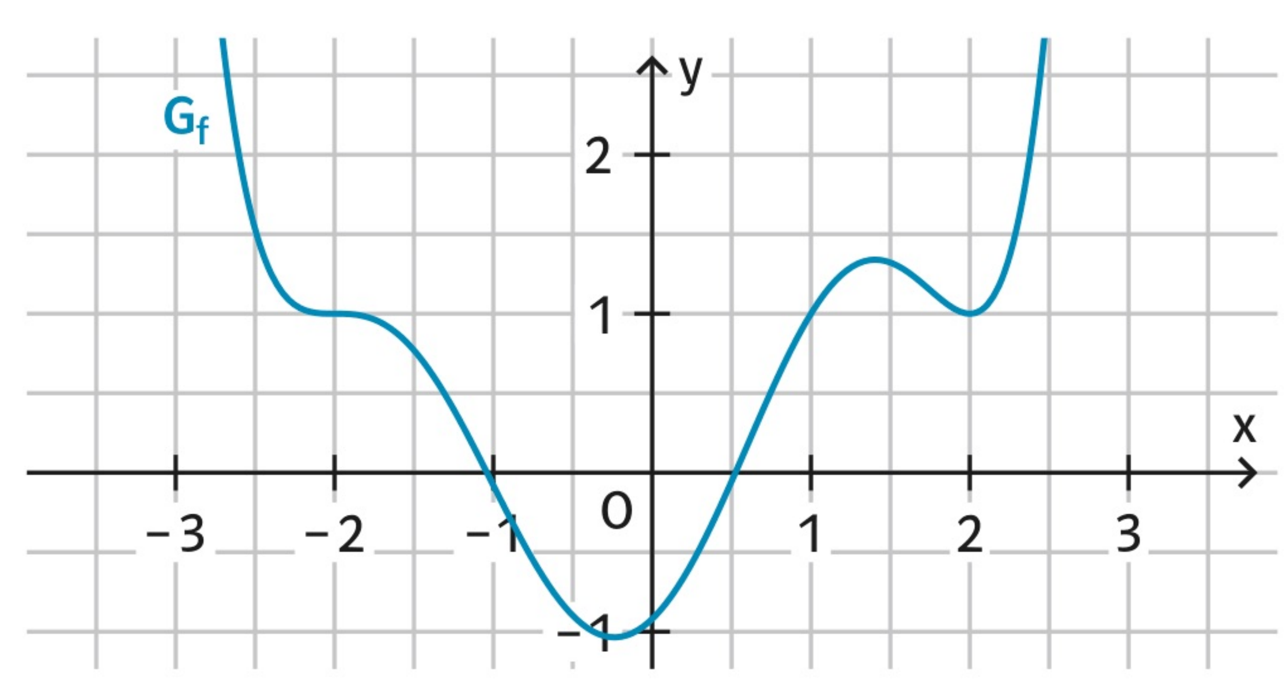
b) $f(t) = (2t - 3)^2$

c) $f(x) = x^2(3 - 5x^2)$

d) $f(x) = -0{,}5ax^3 + ax^2 - 3{,}5ax + a$

3 Ableitungsfunktionen grafisch bestimmen

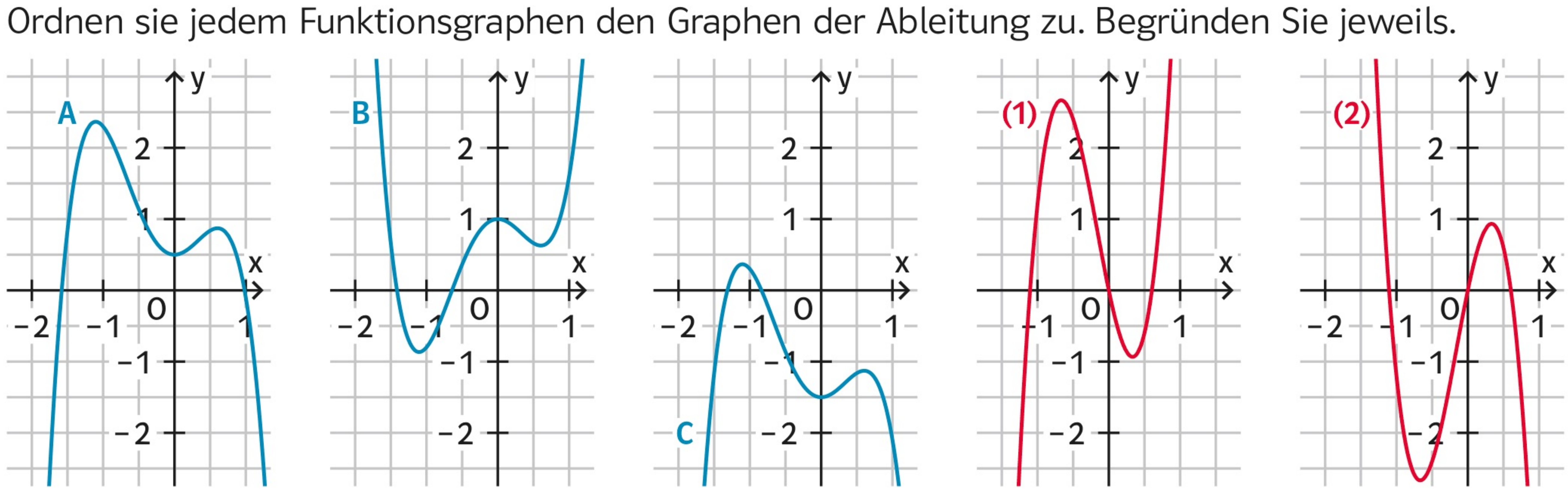
Übertragen Sie den Graphen der Funktion f in Ihr Heft und zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f ein.



4 Graphen von Funktionen und ihrer Ableitungen zuordnen

Die Abbildungen zeigen die Funktionsgraphen A, B und C sowie die Graphen zweier Ableitungsfunktionen ((1) und (2)).

Ordnen sie jedem Funktionsgraphen den Graphen der Ableitung zu. Begründen Sie jeweils.



5 Gleichungen von Tangenten an den Graphen einer Funktion ermitteln.

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^2 + 1$. Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f in den Punkten $A(-4\,|\,f(-4))$, $B(0\,|\,f(0))$ und $C(2\,|\,f(2))$.

b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einem Funktionenplotter.

I Spezielle Eigenschaften von Funktionen

Seite 10

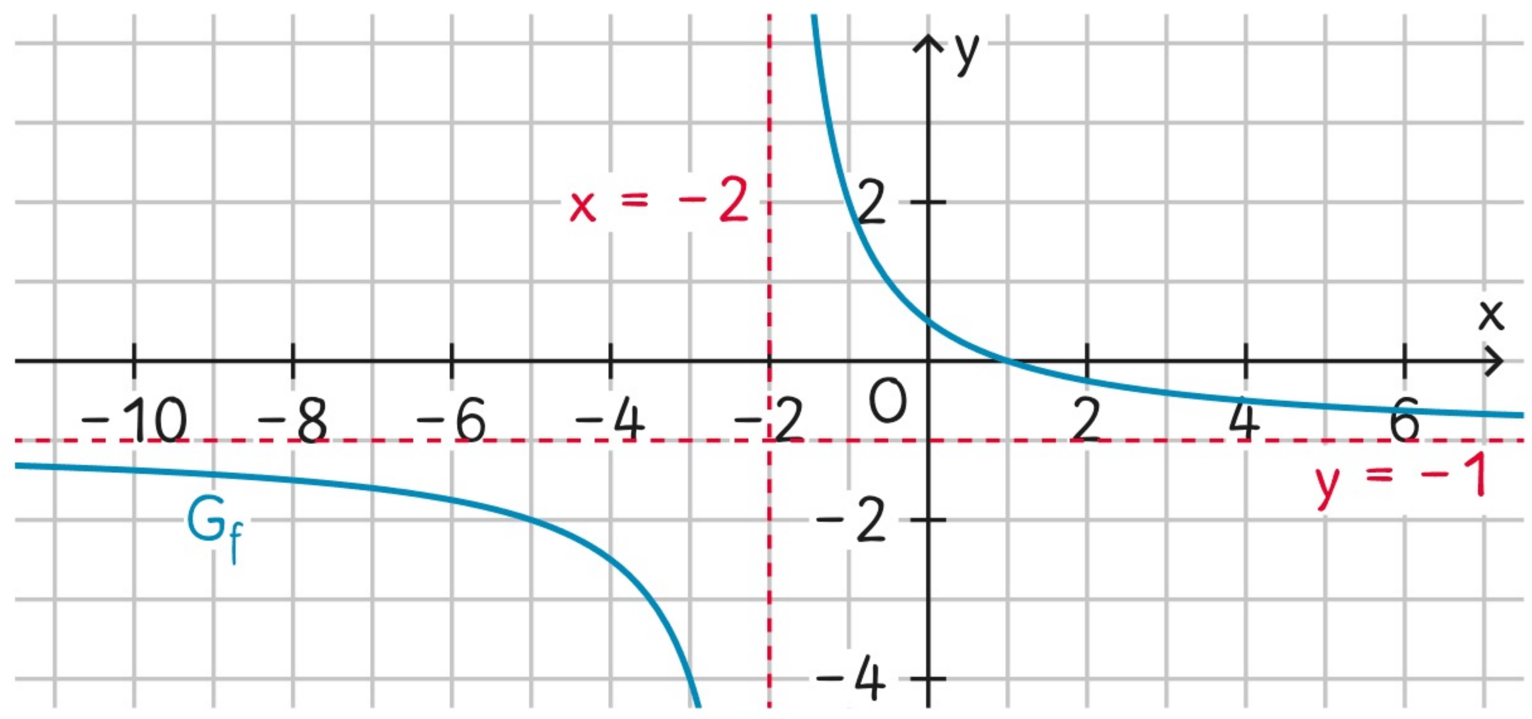
7

a) $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3}{x+2} - 1\right) = -1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{3}{x+2} - 1\right) = -1$

$f(0) = \frac{3}{0+2} - 1 = \frac{1}{2};\ S_y\left(0 \middle| \frac{1}{2}\right);\ f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - 1 = 0$

$\Rightarrow 3 = x + 2 \Rightarrow x = 1;\ f(1) = 0;\ S_x(1|0)$



b) (1) Es ist $f(10) = \frac{3}{10+2} - 1 = -0{,}75$.

Da $-0{,}75 \notin [-1{,}05; -0{,}95]$ gilt, liegt der Punkt $(10|f(10))$ nicht innerhalb des Streifens.

(2) Es ist $f(100) = \frac{3}{100+2} - 1 = -\frac{33}{34}$.

Da $-1{,}05 < -\frac{33}{34} < -0{,}95$ gilt, liegt der Punkt $(100|f(100))$ innerhalb des Streifens.

8

Individuelle Lösung, z. B.:
Ganzrationale Funktion: $f: x \mapsto x^2$.
Trigonometrische Funktion: $g: x \mapsto \sin(x)$.
Exponentialfunktion mit Basis größer als 1: $h: x \mapsto 2^x$.

Seite 11

17

a) G_f steigt. $f(x_0) = 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3^{x_0} = 0{,}01 \Leftrightarrow 3^{x_0} = 0{,}02$

$\Leftrightarrow x_0 = \log_3(0{,}02)$

Da $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ist und G_f steigt, bleibt G_f für $x < \log_3(0{,}02) \approx -3{,}56$ innerhalb des Streifens.

b) $2x_0 = 2\log_3(0{,}02)$

$f(2x_0) = \frac{1}{2} \cdot 3^{2\log_3(0{,}02)} = \frac{1}{2} \cdot 3^{\log_3(0{,}02)^2} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02^2 = \frac{1}{5000}$

Da $\frac{1}{5000} < 0{,}01 : 2 = \frac{1}{200}$ gilt, genügt die Verdopplung von x_0, damit für $x < 2x_0$ der Graph in einem Streifen mit halber Breite bleibt.

G 19

a) $f(x) = x(x - 5)$

b) $g(x) = (x - 2)(x - 3)$, da $x = 2$ und $x = 3$ Lösungen der Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ sind.

c) $h(x) = (x + 3)(x - 3)$; 3. binomische Formel

d) $k(x) = (x - 2)^2$; 2. binomische Formel

e) $p(x) = 2(x^2 - x - 12) = 2(x + 3)(x - 4)$, da $x = -3$ und $x = 4$ Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$ sind.

f) $q(x) = -4(x^2 - 4{,}5x + 2) = -4(x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, da $x = 4$ und $x = \frac{1}{2}$ Lösungen der Gleichung $x^2 - 4{,}5x + 2 = 0$ sind.

Seite 15

7

a) $a(-x) = ((-x)^2 - 1)2(-x) = -(x^2 - 1)2x = -a(x)$

Der Graph G_a ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) $b(-x) = -(-x)^7 + 2(-x)^3 + 1 = x^7 - 2x^3 + 1$

$-b(x) = -(-x^7 + 2x^3 + 1) = x^7 - 2x^3 - 1$

Da $b(-x) \neq b(x)$ und $b(-x) \neq -b(x)$ gilt, liegt keine Symmetrie des Graphen G_b bezüglich des Koordinatensystems vor.

c) $c(-x) = ((-x)^2 - 4)(1 - (-x))^2 = (x^2 - 4)(1 + x)^2$

$-c(x) = -(x^2 - 4)(1 - x)^2 = (4 - x^2)(1 - x)^2$

Da $c(-x) \neq c(x)$ und $c(-x) \neq -c(x)$ gilt, liegt keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems vor.

d) $d(-x) = \frac{3}{(-x)} = -\frac{3}{x} = -d(x)$

Der Graph G_d ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

e) $e(-x) = 2\sin(-x) = 2(-\sin(x)) = -e(x)$

Der Graph G_e ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

f) $f(-x) = \cos(-x) - 4 = \cos(x) - 4 = f(x)$

Der Graph G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Seite 16

16

a) Wenn $b = 0$ ist, dann ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse, da f eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich geraden Exponenten ist. Also ist G_f für $(a; 0)$ achsensymmetrisch zur y-Achse. Da ein konstanter Summand vorhanden ist, kann G_f auch für $a = 0$ nicht punktsymmetrisch zum Ursprung sein.

b) Wenn $b = 0$ ist, dann ist f unabhängig von der Wahl des Parameters a eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich ungeraden Exponenten. Also ist G_f für $(a; 0)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

Da x^3 die höchste Potenz des Funktionsterms ist, kann G_f bei keiner Wahl von a und b achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

c) Wenn $b = 0$ ist, dann ist G_f unabhängig von a punktsymmetrisch zum Ursprung. Also ist G_f für $(a; 0)$ punktsymmetrisch zum Ursprung. Wenn $b \neq 0$ ist, dann liegt keine Symmetrie bzgl. des Koordinatensystems vor, da eine gebrochen-rationale Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{x} + b$ höchstens punktsymmetrisch zum Ursprung sein kann.

d) Unabhängig vom Parameter a gilt: Wenn $b = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist, dann ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse. Also ist G_f für $(a; k\pi)$ achsensymmetrisch zur y-Achse. Wenn $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist, dann ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung. Also ist G_f für $\left(a; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

e) Wenn $a = -1$ ist, dann ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung, da f eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich ungeraden Exponenten ist. Also ist G_f für $(-1; b)$ punktsymmetrisch zum Ursprung. Wenn $a \neq -1$ ist, dann hat die Funktion gerade und ungerade Exponenten und somit ist ihr Graph weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

f) Wenn $b = -a$ ist, dann ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse, da f eine ganzrationale Funktion mit ausschließlich geraden Exponenten ist. Also ist G_f für $(a; -a)$ für alle Werte von a achsensymmetrisch zur y-Achse. Wenn $b \neq -a$ ist, dann hat die Funktion gerade und ungerade Exponenten und somit ist ihr Graph weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

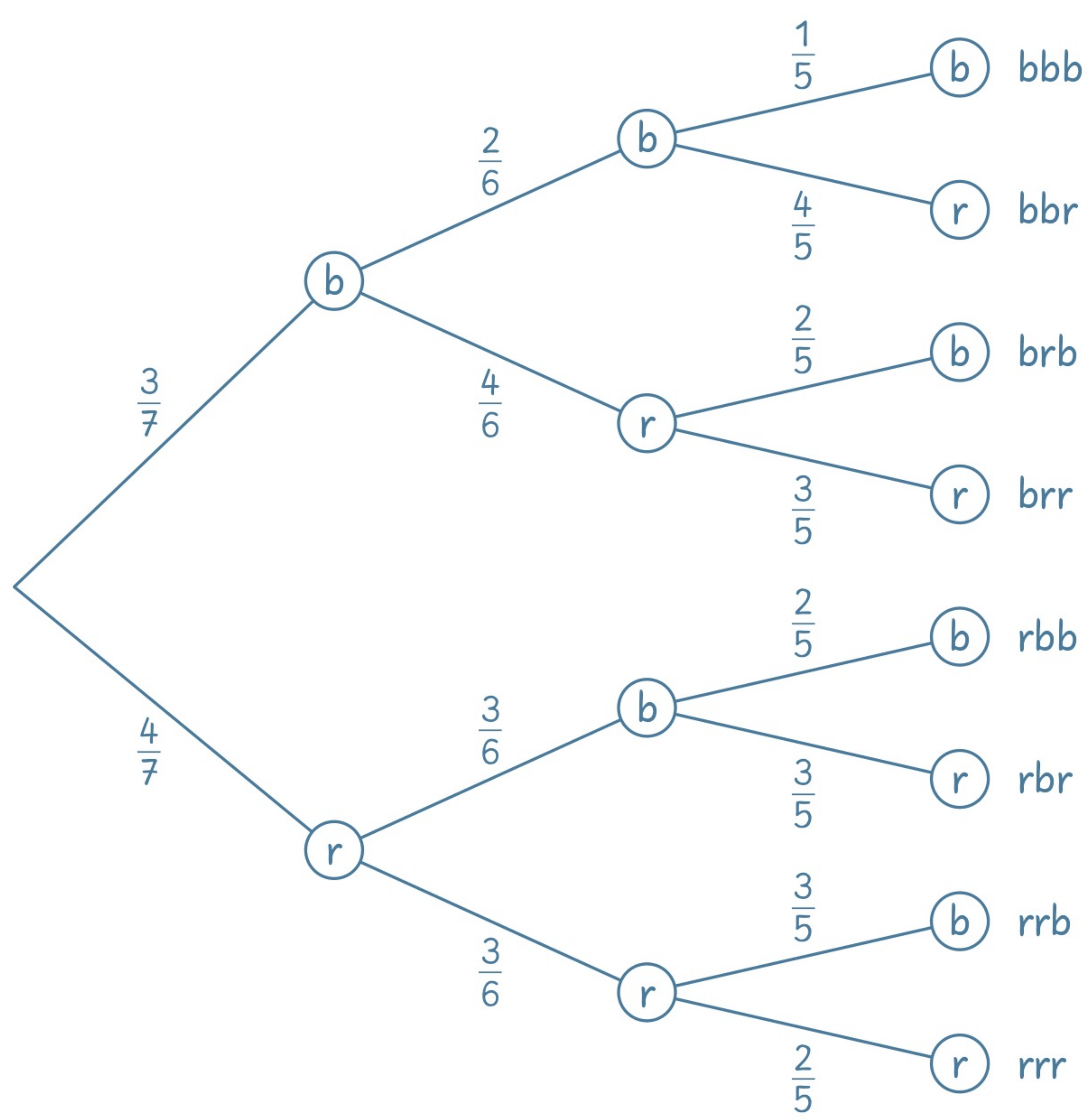
17

a) Wenn f eine ganzrationale Funktion ist und ihr Graph G_f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, dann liegt der Ursprung auf dem Graphen. Zu jeder Nullstelle x_0, die nicht im Ursprung liegt, gehört eine weitere Nullstelle $-x_0$. Somit treten die Nullstellen, mit Ausnahme der Nullstelle im Ursprung, immer paarweise auf. Zusammen mit der Nullstelle im Ursprung ergibt sich somit eine ungerade Anzahl an Nullstellen.

b) Beispiel für eine gerade Anzahl an Nullstellen: $f: x \mapsto x^2 - 1$.
Beispiel für eine ungerade Anzahl an Nullstellen: $f: x \mapsto x^2$.

G 19

a)

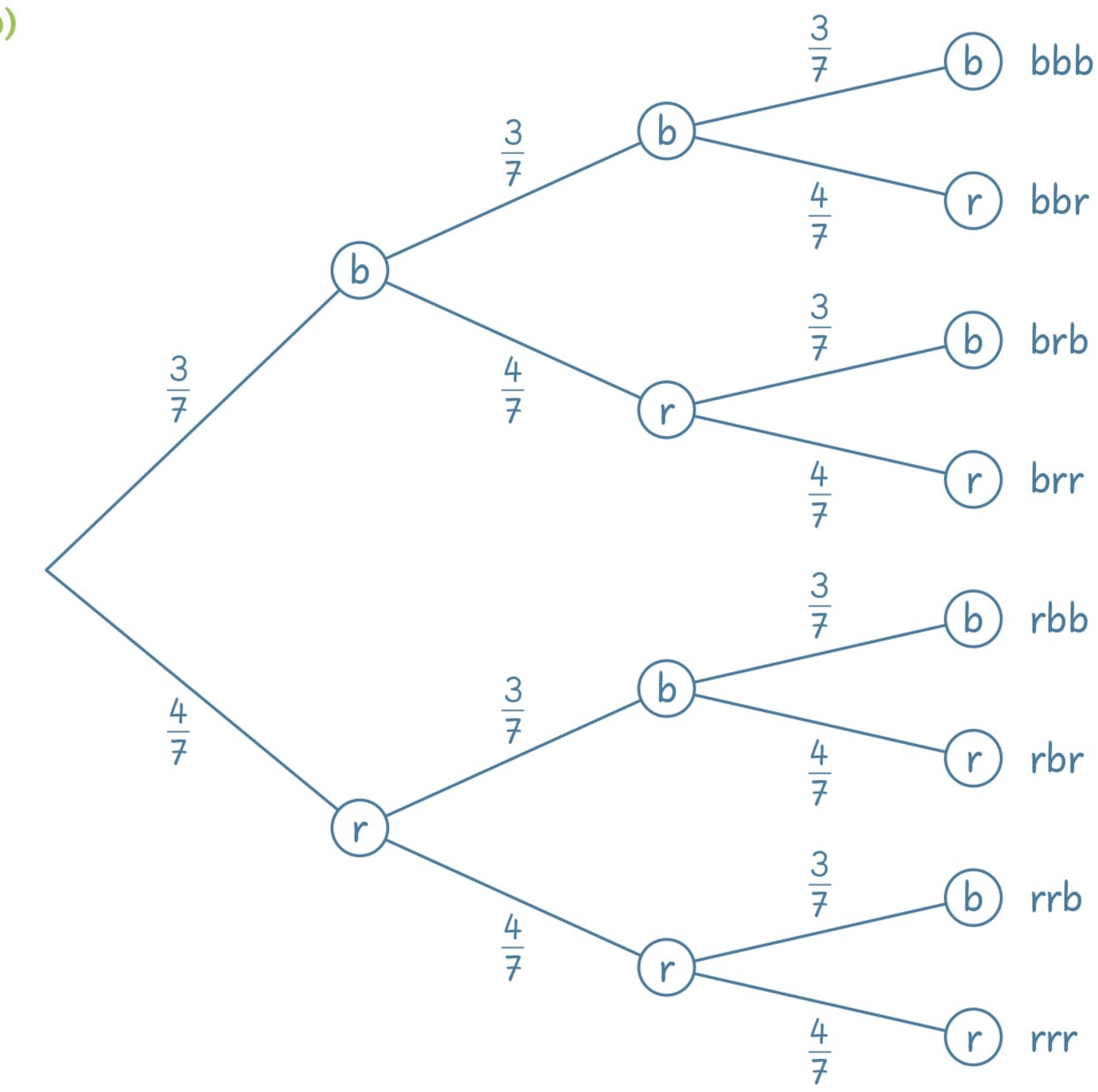


(1) $P(rrr) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$

(2) P(„Genau zwei blaue Kugeln.“) = P(bbr) + P(brb) + P(rbb)
$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$
$= \frac{12}{35}$

(3) $1 - P(rrr) = 1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$

b)



(1) $P(rrr) = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}$

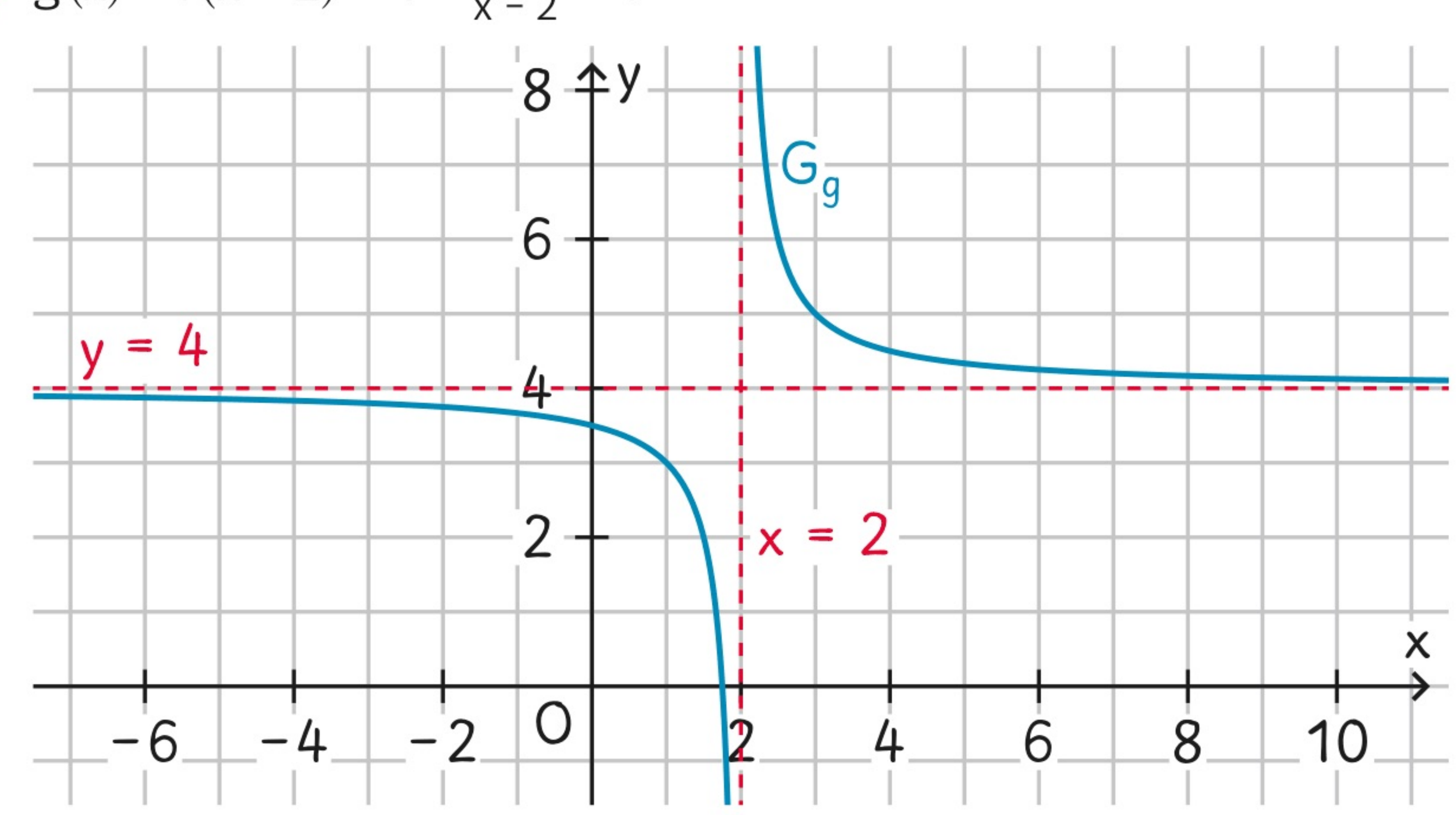
(2) P(„Genau zwei blaue Kugeln.“) = P(bbr) + P(brb) + P(rbb)
$= \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}\right) \cdot 3 = \frac{108}{343}$

(3) $1 - P(rrr) = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^3 = 1 - \frac{64}{343} = \frac{279}{343}$

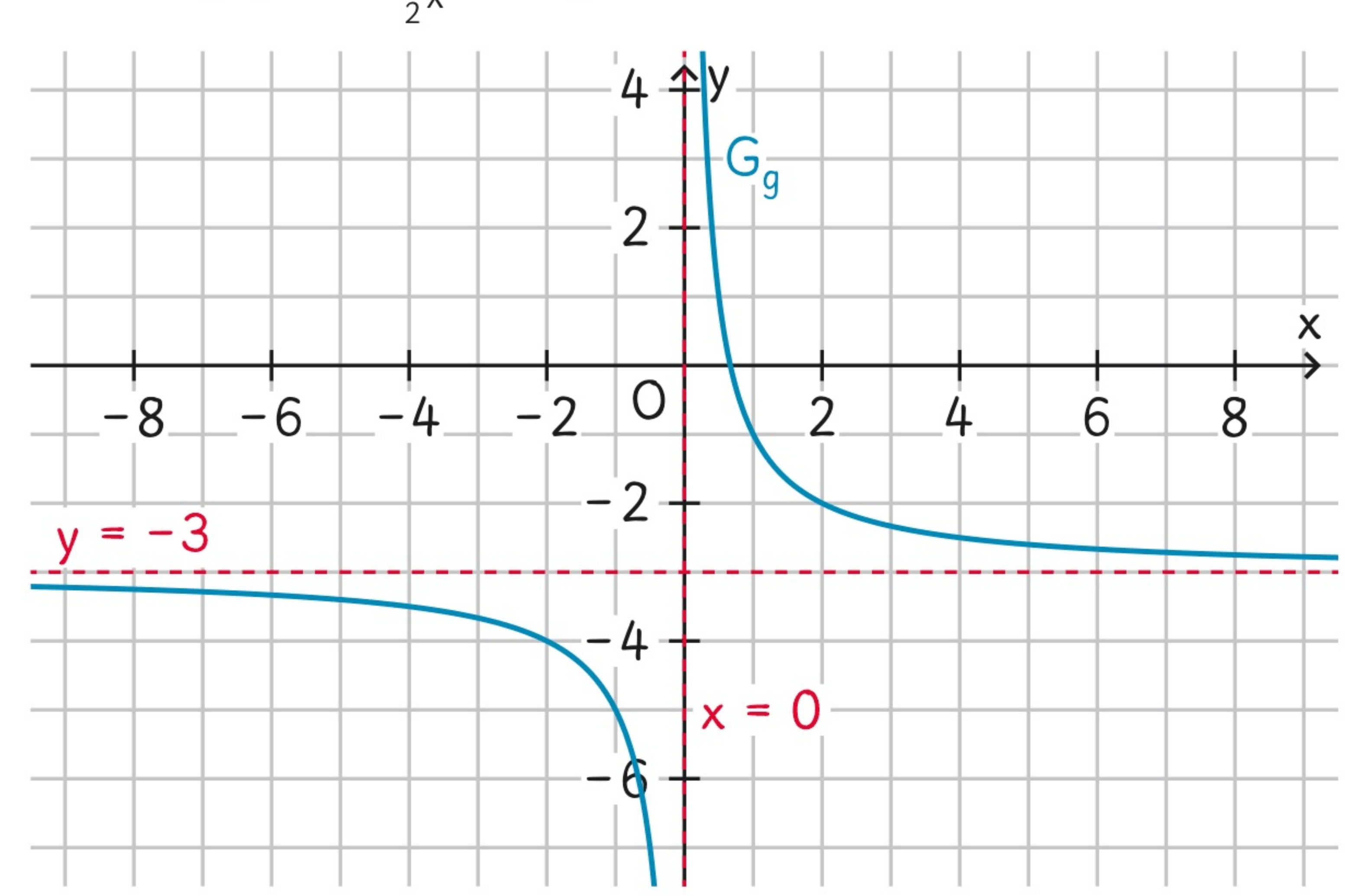
Seite 20

4

a) $g(x) = f(x - 2) + 4 = \frac{1}{x - 2} + 4$



b) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) - 3 = \frac{1}{\frac{1}{2}x} - 3 = \frac{2}{x} - 3$



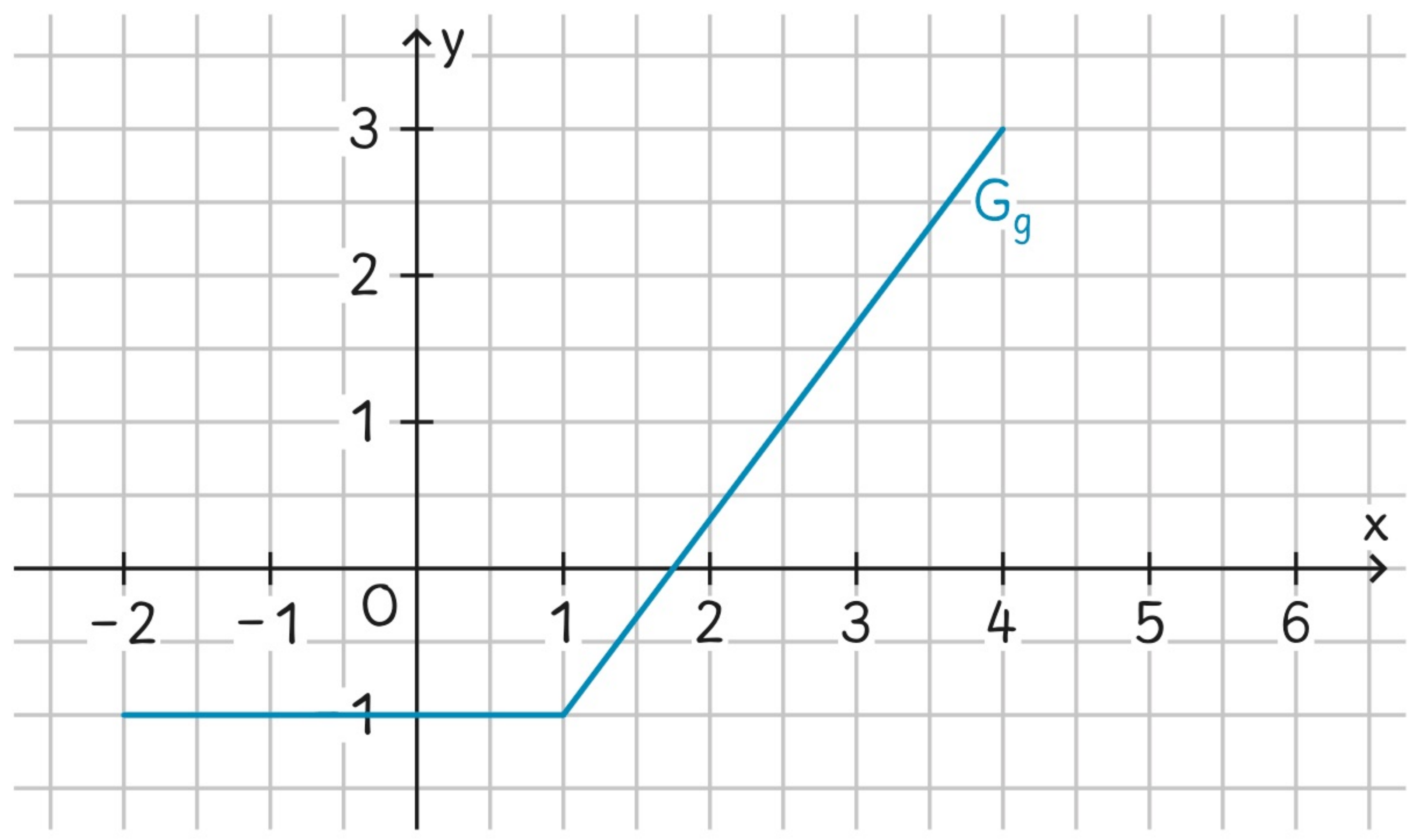
5

Individuelle Lösung, z. B.:
$g(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$h(x) = \sin(x + \pi) + 1$

Seite 21

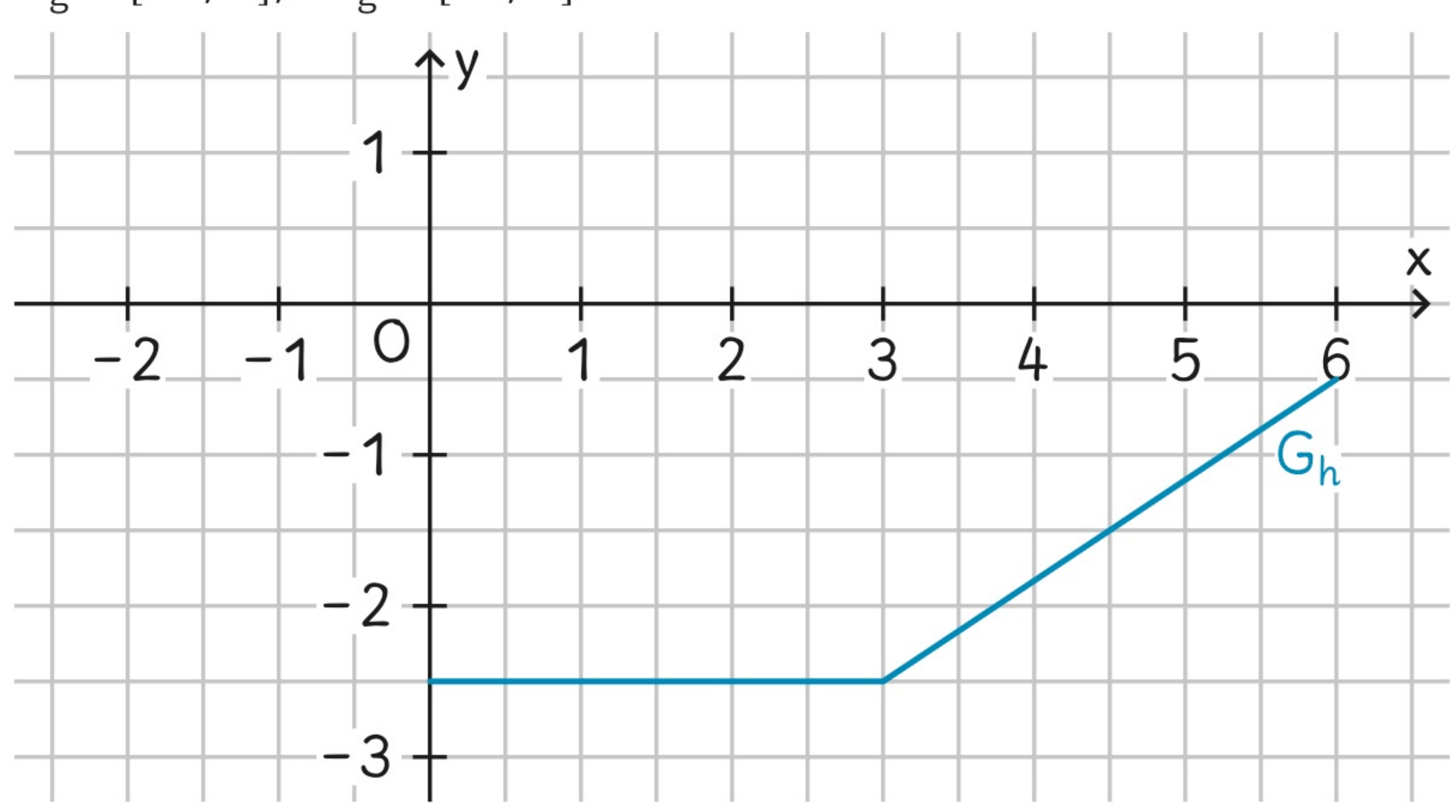
12

a)



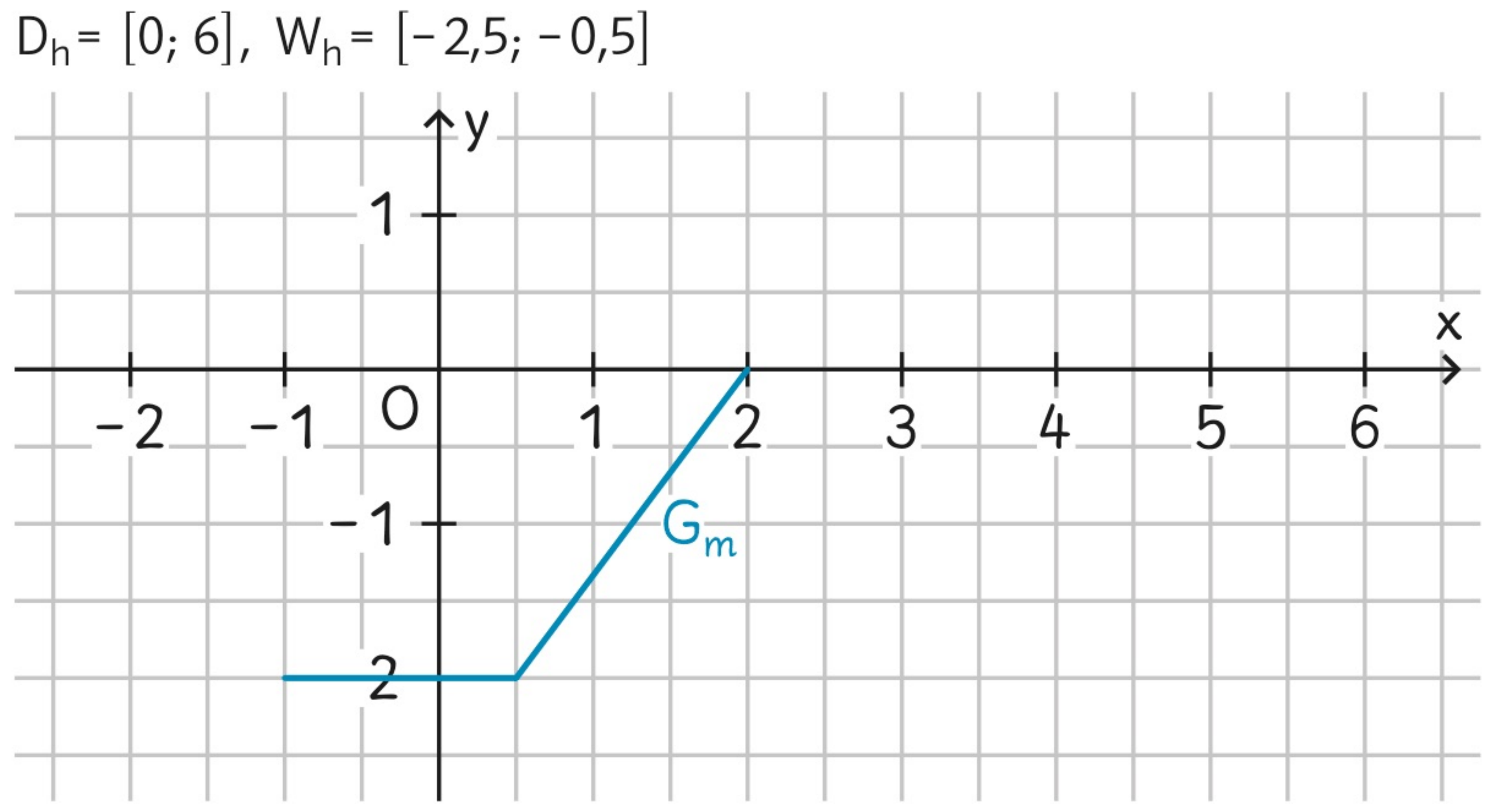
$D_g = [-2; 4]$, $W_g = [-1; 3]$

b)



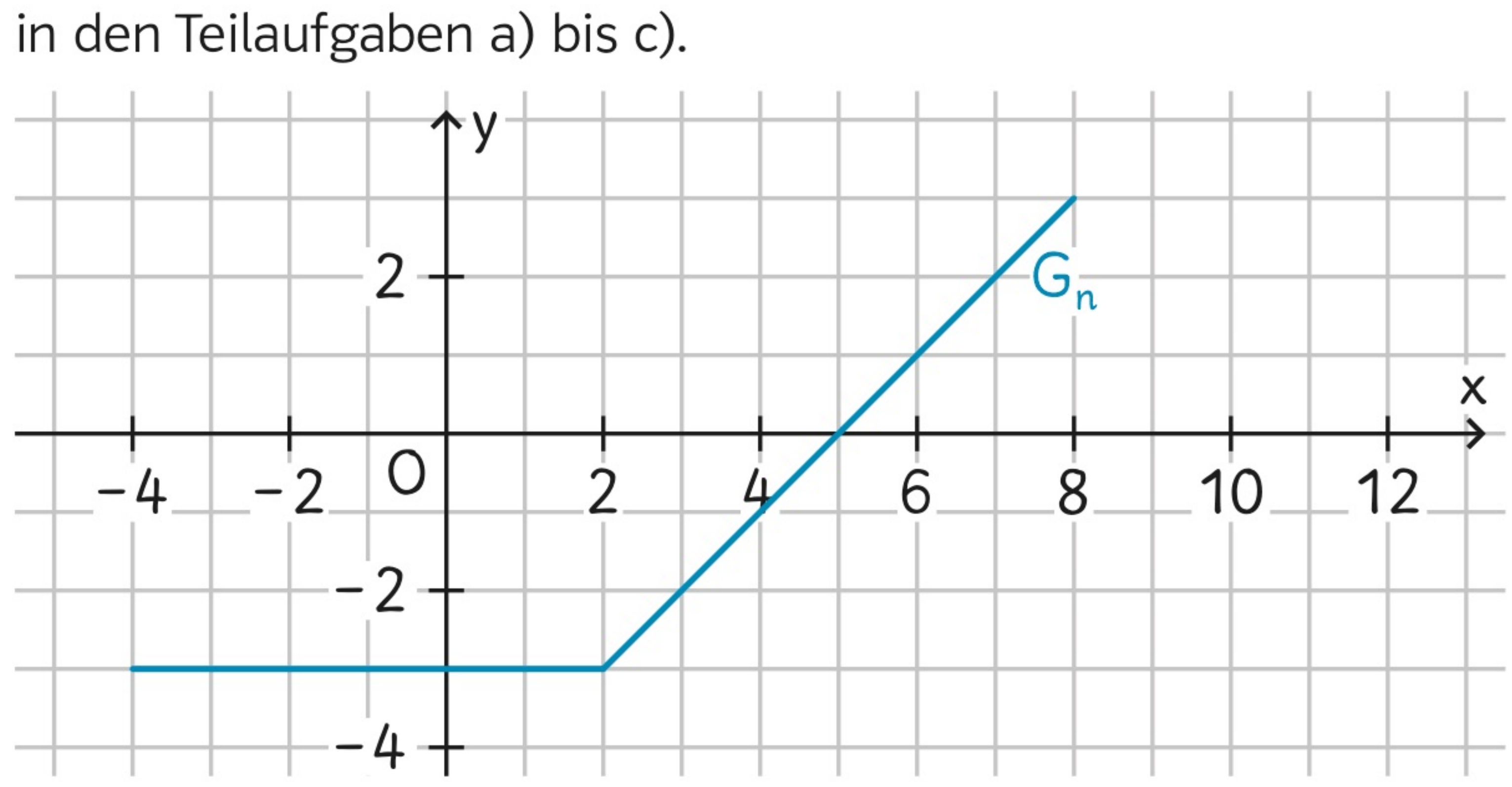
$D_h = [0; 6]$, $W_h = [-2{,}5; -0{,}5]$

c)



$D_m = [-1; 2]$, $W_m = [-2; 0]$

d) Hinweis: Bei Teilaufgabe d) sind die Achsen anders skaliert als in den Teilaufgaben a) bis c).



$D_n = [-4; 8]$, $W_n = [-3; 3]$

G 14

a) $\frac{5x-2}{2x+1} + \frac{2-4x}{2x+1} = \frac{(5x-2)+(2-4x)}{2x+1} = \frac{x}{2x+1}$

b) $\frac{2x^2-1}{x^2+1} + 3 = \frac{2x^2-1}{x^2+1} + \frac{3(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{5x^2+2}{x^2+1}$

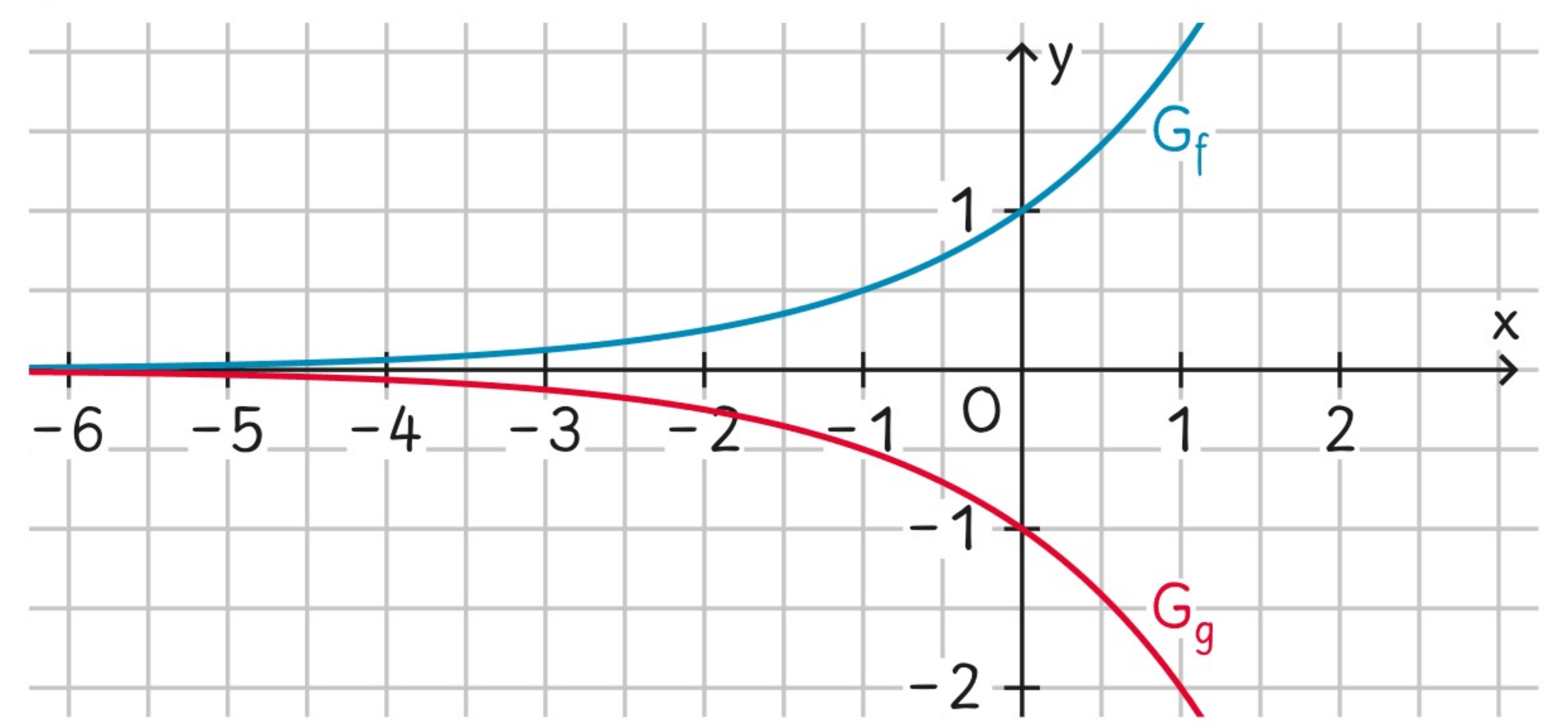
c) $4x + \frac{8x}{x-2} = \frac{4x(x-2)}{x-2} + \frac{8x}{x-2} = \frac{4x^2-8x+8x}{x-2} = \frac{4x^2}{x-2}$

d) $x - 1 - \frac{3}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2-1-3}{x+1} = \frac{x^2-4}{x+1}$

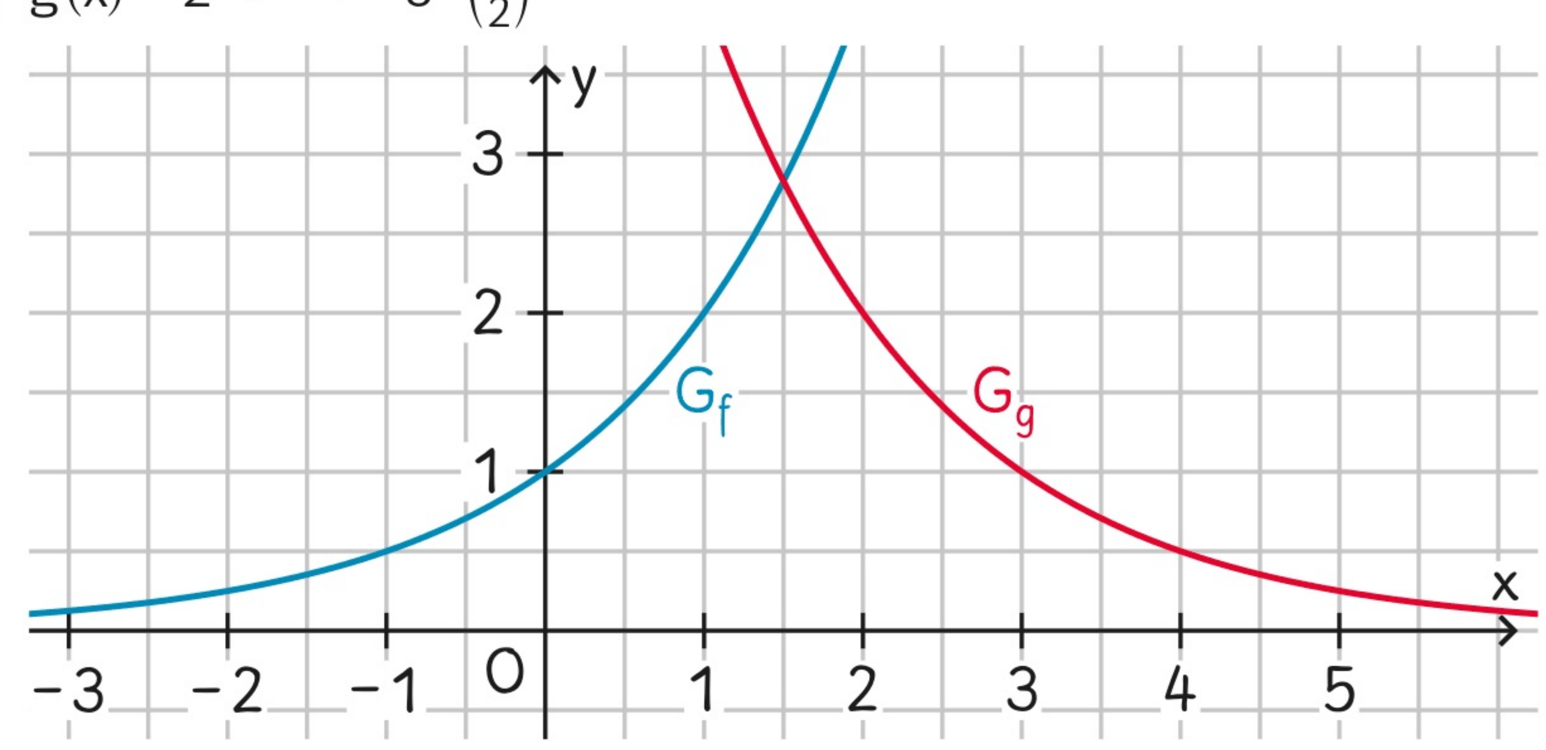
Seite 25

6

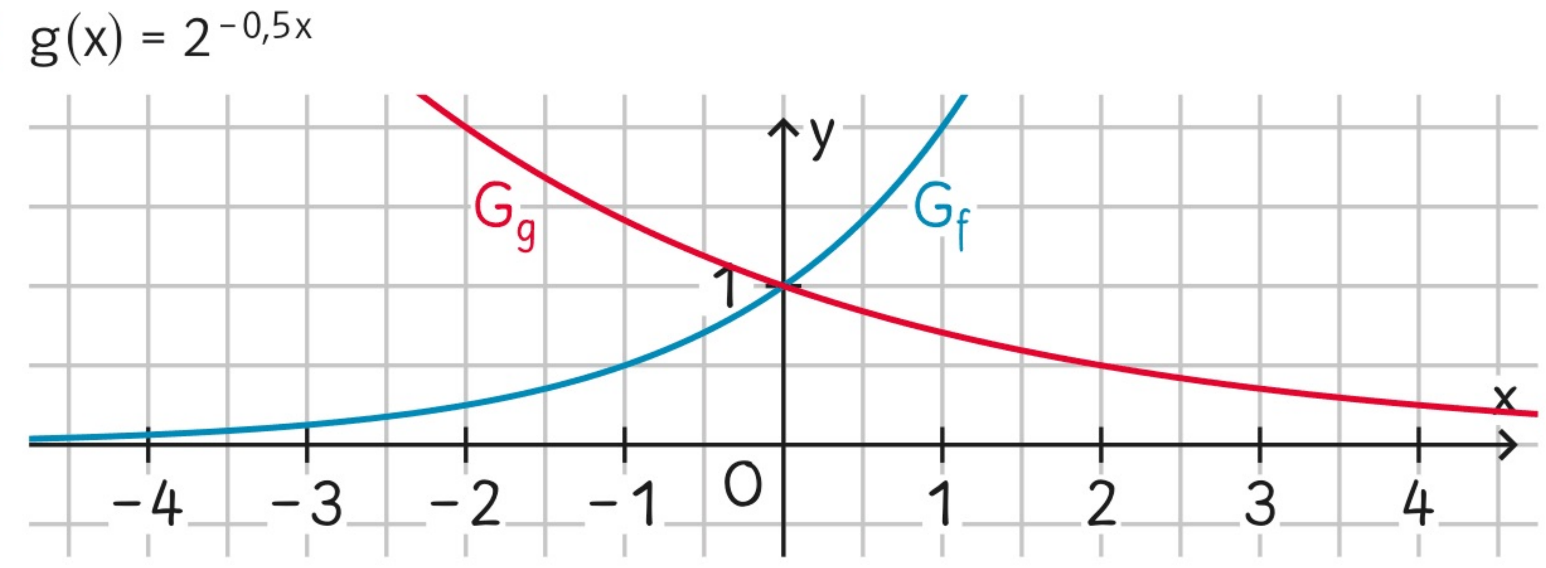
a) $g(x) = -2^x$



b) $g(x) = 2^{-(x-3)} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$



c) $g(x) = 2^{-0{,}5x}$



Seite 26

12

a) $g(x) = f(-(x-1))$
Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch eine Spiegelung an der y-Achse und anschließende Verschiebung um 1 in x-Richtung hervor.

b) $g(x) = -2f(x-3) + 1$
Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch eine Spiegelung an der x-Achse, eine Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, eine Verschiebung um 1 in y-Richtung und eine Verschiebung um 3 in x-Richtung hervor.

c) $g(x) = -f(0{,}5(x-2))$
Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch eine Spiegelung an der x-Achse, eine Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung und anschließende Verschiebung um 2 in x-Richtung hervor.

G 14

a) Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$a = \sqrt{(8\,\text{cm})^2 - (5\,\text{cm})^2} = \sqrt{39}\,\text{cm} \approx 6{,}2\,\text{cm}$.

b) $\gamma = 90°$; $\sin\beta = \frac{5}{8} = 0{,}625 \Rightarrow \beta \approx 38{,}68°$,
also $\alpha \approx 90° - 38{,}68° = 51{,}32°$.

Seite 29

6

a) Die Funktion f ist an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ jeweils unstetig, da der Graph dort jeweils einen Sprung macht.

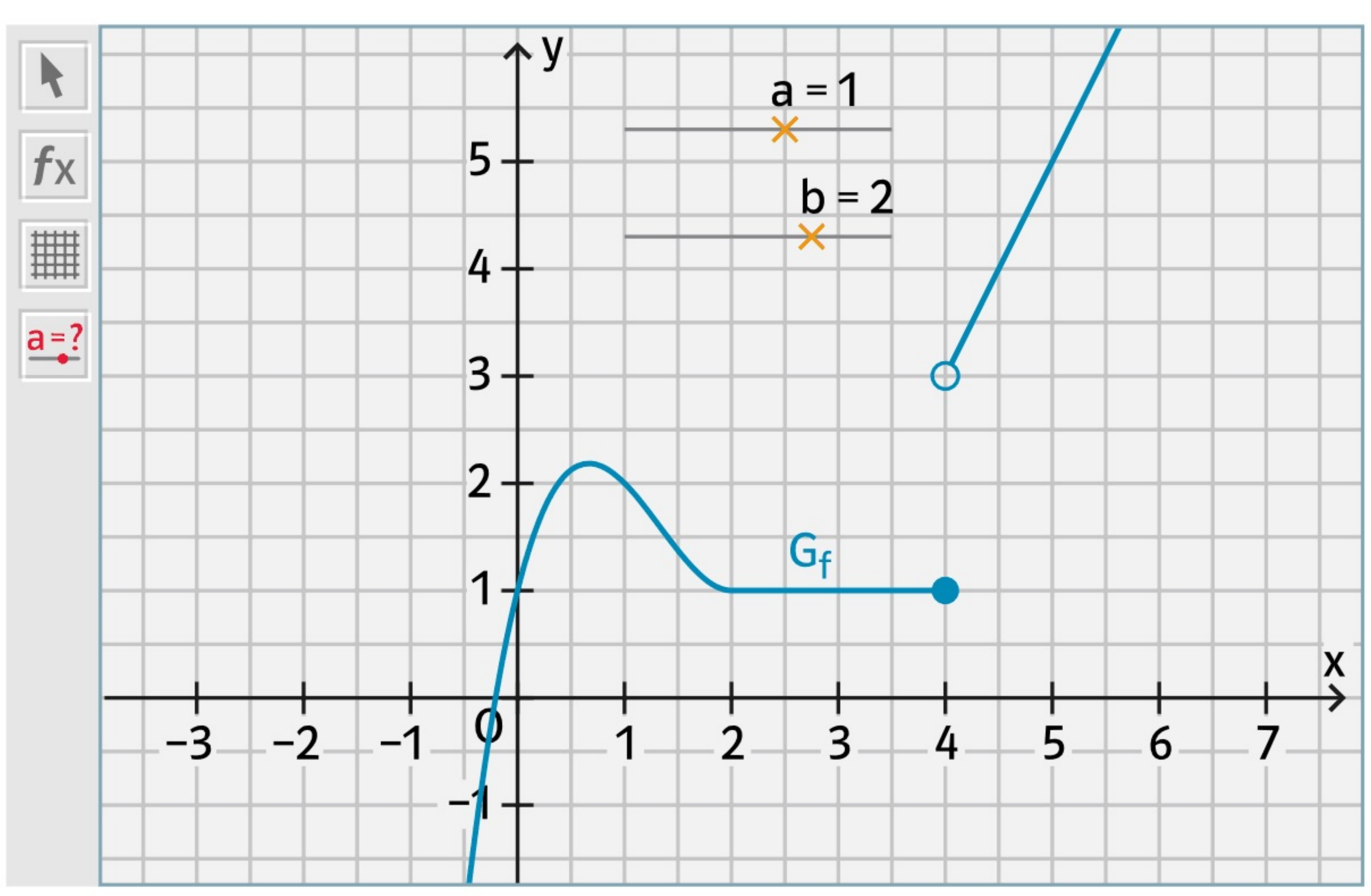
b) Die Funktion f ist an der Stelle $x = -1$ unstetig, da der Graph dort einen Sprung macht.
Die Funktion f ist an der Stelle $x = 1$ stetig, da kein Sprung im Graphen vorhanden ist.

c) Die Funktion f ist an der Stelle $x = -1$ unstetig, da der Graph dort einen Sprung macht.
Die Funktion f ist an der Stelle $x = 1$ stetig, da kein Sprung im Graphen vorhanden ist.

Seite 30

11

a)



b) $f(4) = 1$
Der Wert von $bx - 1 - 2b$ an der Stelle $x = 4$
ist $4b - 1 - 2b = 2b - 1$.
Wenn $2b - 1 = 1$ ist, dann ist f stetig an der Stelle $x = 4$.
Also ist $b = 1$.

c) $f(2) = a(2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2) + 1 = 1$
$f(2)$ ist unabhängig von a und stimmt mit dem Wert überein, den $f(x)$ für $2 < x \leq 4$ annimmt. Daher ist f an der Stelle $x = 2$ unabhängig von a stetig.

G 13

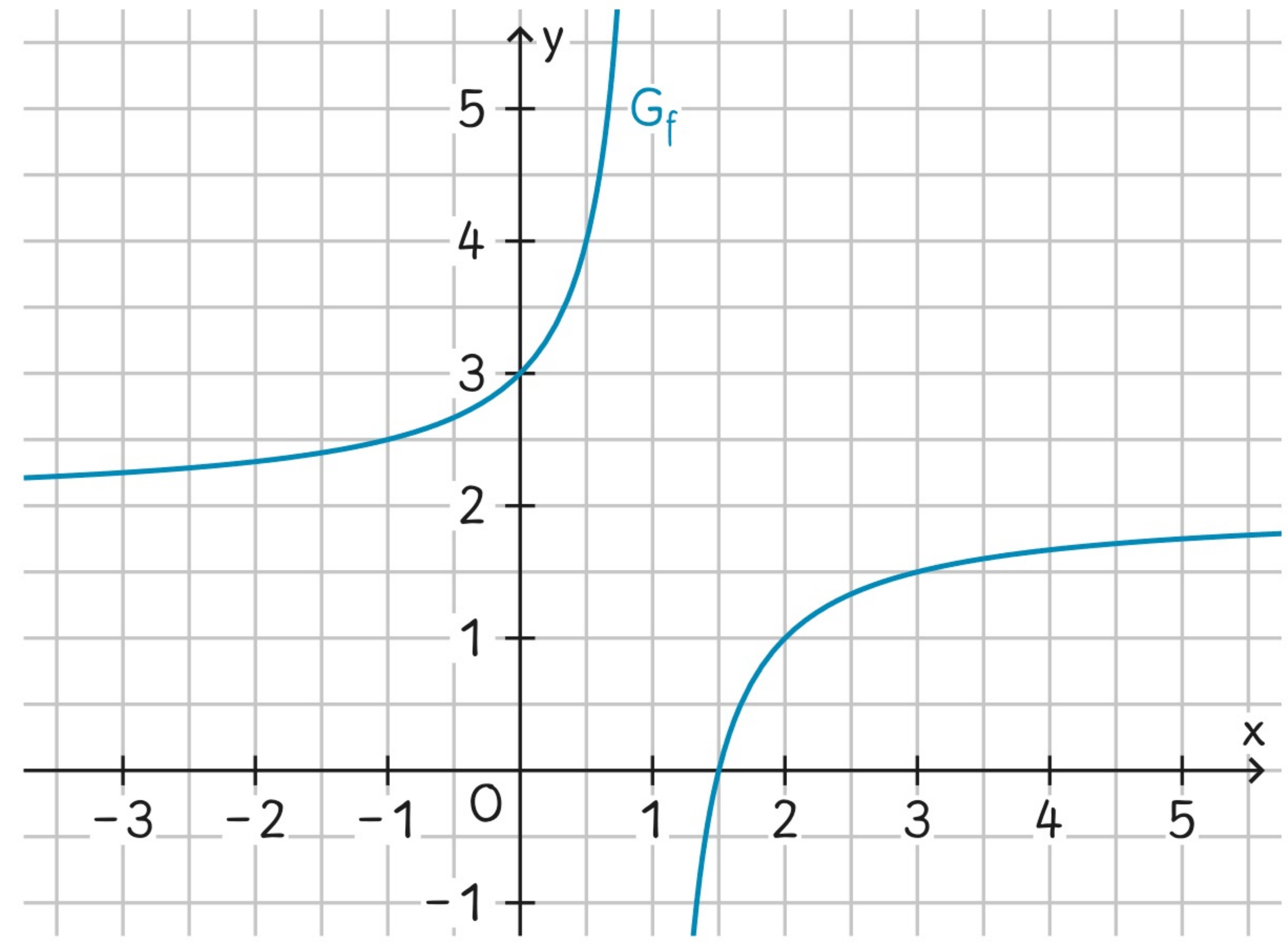
a) $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V_Z = \pi r^2 h$
$V_K = V_Z \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{4}{3} r = h \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{h}{r}$
Die Zylinderhöhe h ist um $\frac{1}{3}$ größer als der Kugelradius r, d.h., h ist um ca. 33,3 % größer als r.

b) $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V_Z = \pi R^2 r$
$V_K = V_Z \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 r \Rightarrow \frac{4}{3} r^2 = R^2 \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{R}{r}$
$\Rightarrow 1{,}155 \approx \frac{R}{r}$
Der Zylinderradius R ist etwa 15,5 % größer als der Kugelradius r.

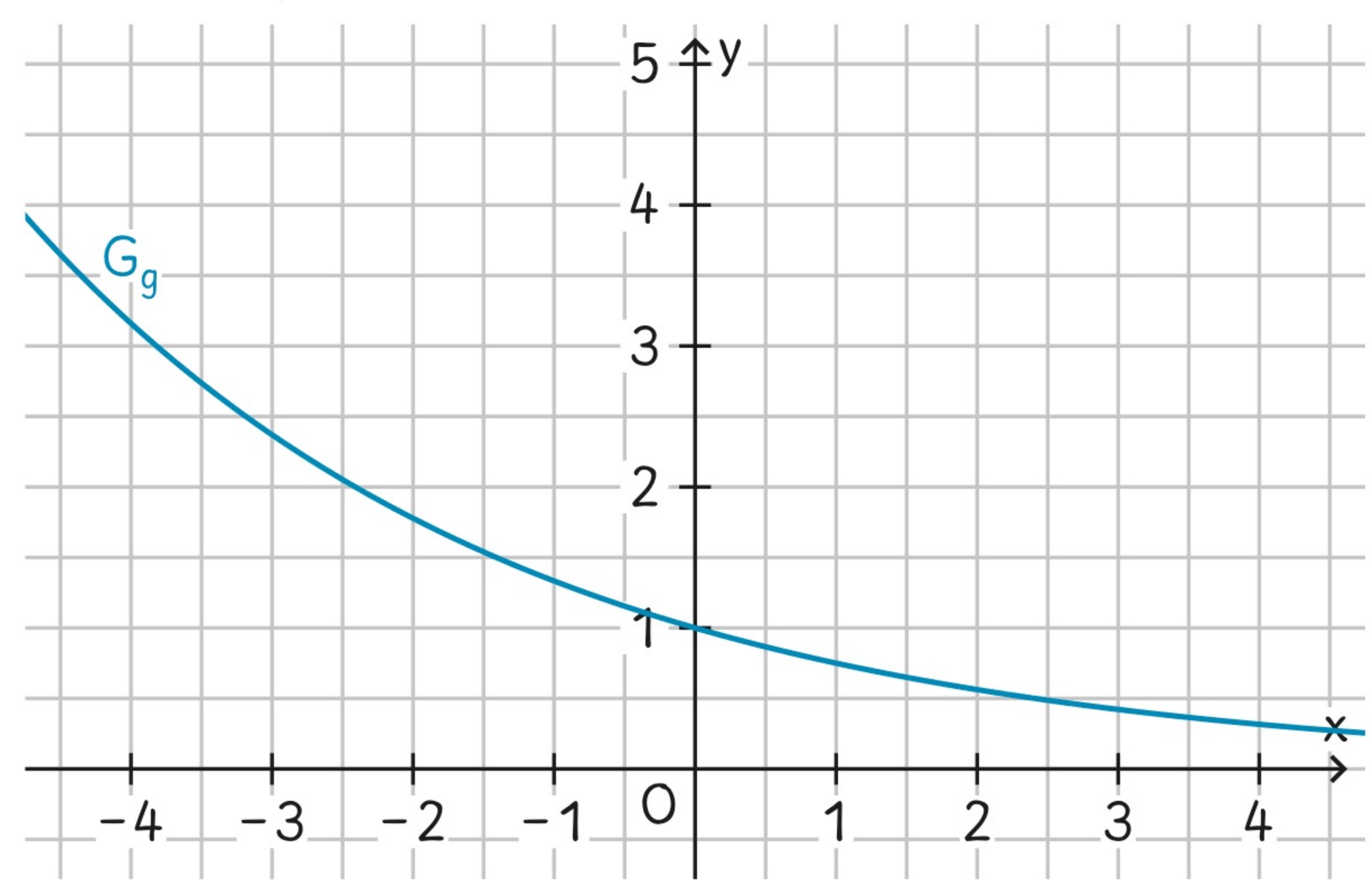
Seite 37

1

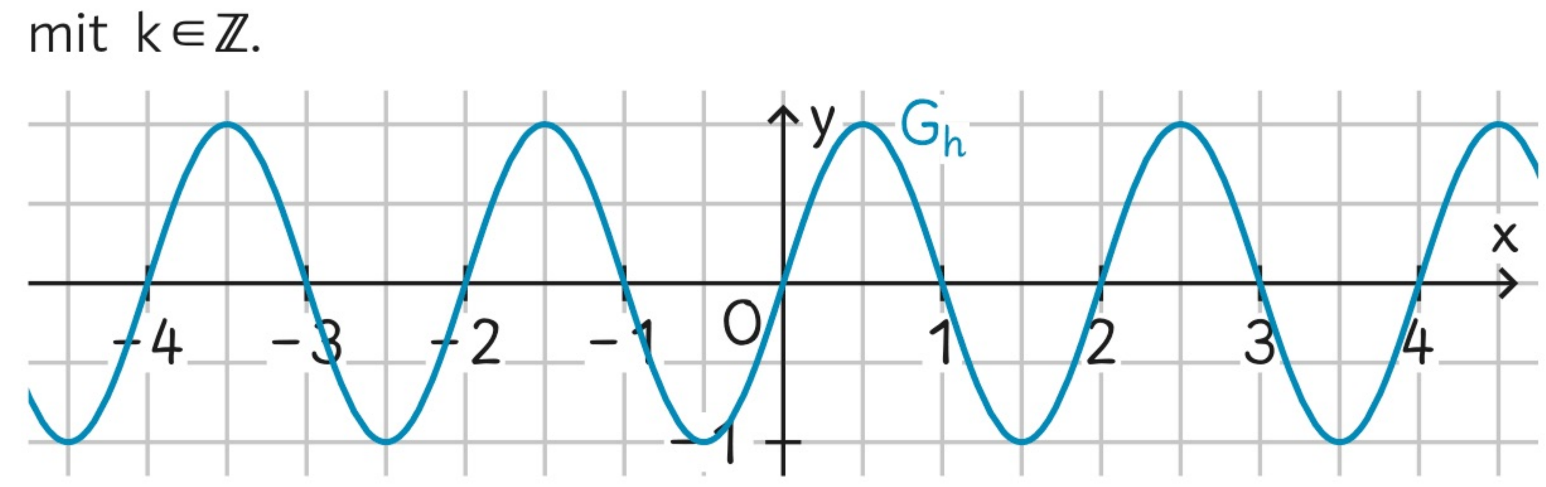
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $S_y(0\,|\,3)$; $S_x(1{,}5\,|\,0)$.



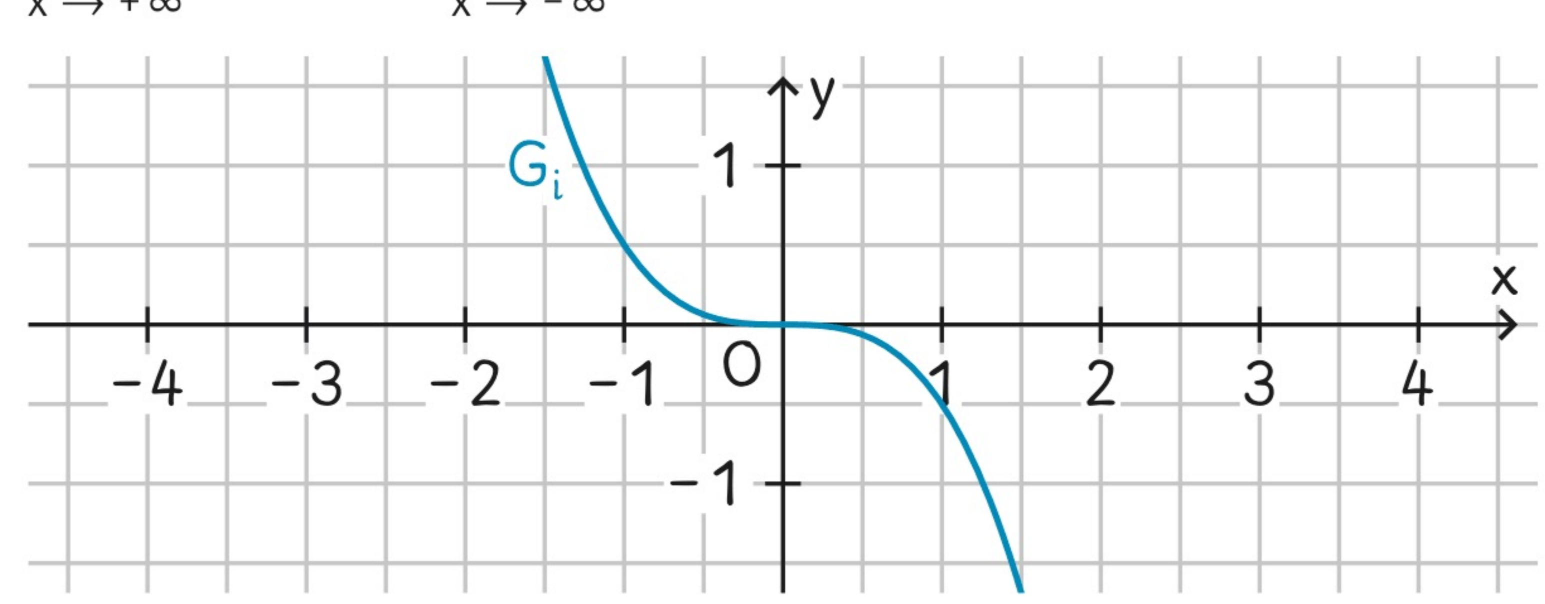
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$; $S_y(0\,|\,1)$;
kein Schnittpunkt mit der x-Achse.



c) Es existiert kein Grenzwert für $x \to \pm\infty$; $S_y(0\,|\,0)$; $S_x(k\,|\,0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = +\infty$; $S_y(0\,|\,0) = S_x(0\,|\,0)$.



2

Verschiebung von G_f um -5 in x-Richtung, anschließend Verschiebung um $+3$ in y-Richtung.
Mit $f\colon x \mapsto \frac{-2}{x-1}$ folgt $g(x) = \frac{-2}{(x+5)-1} + 3 = \frac{-2}{x+4} + 3$.

3

$g(x) = 2f(x) + 3$

$h(x) = 2(f(x) + 3) = 2f(x) + 6 = g(x) + 3$

Die Funktionsterme unterscheiden sich durch die additive Konstante 3.

4

a) $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -f(x)$. Also ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung. Alternative Begründung: $f(x)$ ist ein Polynom mit ausschließlich ungeraden Exponenten.

b) $g(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 - (-x)^2 - 1 = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1 = g(x)$. Also ist G_g achsensymmetrisch zur y-Achse. Alternative Begründung: $g(x)$ ist ein Polynom mit ausschließlich geraden Exponenten.

c) $h(-x) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi(-x)\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = h(x)$. Also ist G_h achsensymmetrisch zur y-Achse.

d) $i(-x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \neq i(x)$ und $i(-x) \neq -i(x)$. Also ist bezüglich des Koordinatensystems keine Symmetrie vorhanden.

e) $k(-x) = ((-x)^2 - 1)((-x)^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = k(x)$. Also ist G_k achsensymmetrisch zur y-Achse.

f) $l(x) = -x(x + 1)^2 = -x^3 - 2x^2 - x$. Also ist G_l weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da das Polynom gerade und ungerade Exponenten enthält.

5

a) G_f wird an der y-Achse gespiegelt und anschließend um -2 in y-Richtung verschoben.
$g(x) = f(-x) - 2$

b) G_f wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt, an der x-Achse gespiegelt und anschließend um 1 in y-Richtung verschoben.
$g(x) = -2f(x) + 1$

c) G_f wird mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung gestreckt, an der x-Achse gespiegelt und anschließend um 3 in y-Richtung verschoben.
$g(x) = -f(2x) + 3$

6

Es ist $-(-1) - 2 = -1$. Also muss für die Stetigkeit $g(-1) = -1$ gelten.

a) $g(x) = mx + t$
(I): $g(-1) = -1$: $m \cdot (-1) + t = -1$
(II): $g(1) = 0$: $m \cdot 1 + t = 0$
Daraus folgt $m = 0{,}5$ und $t = -0{,}5$, also $g(x) = 0{,}5x - 0{,}5$.

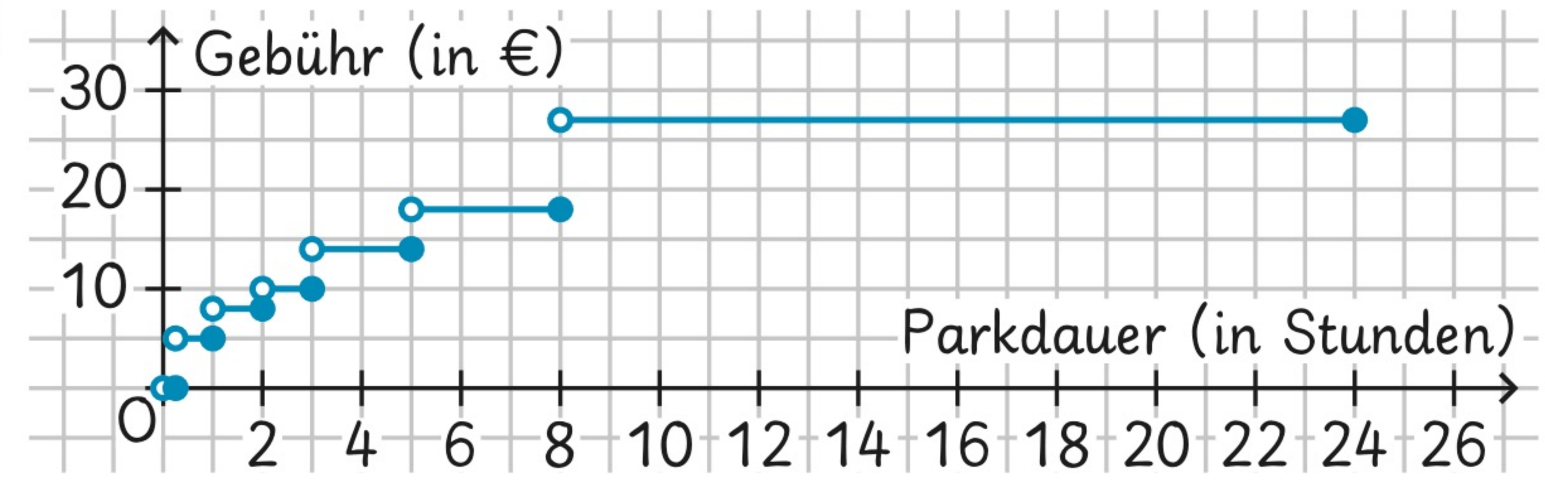
b) $g(x) = a(x - 1)^2$
$g(-1) = -1$: $a \cdot ((-1) - 1)^2 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$, also $g(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2$.

c) Eine weitere Nullstelle des Polynoms kann frei gewählt werden, z. B. $x = 0$.
$g(x) = ax(x - 1)^2$
$g(-1) = -1$: $a \cdot (-1)(-1 - 1)^2 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$,
also $g(x) = \frac{1}{4}x(x - 1)^2$.

7

a) Parken von 7:14 Uhr bis 19:07 Uhr ergibt eine Parkdauer von 11 Stunden und 53 Minuten. Also beträgt die Parkgebühr 27,00 €.

b)



An den durch die Tabelle vorgegebenen Parkdauern macht der Funktionsgraph Sprünge. Somit ist die zugehörige Funktion an diesen Stellen unstetig.

II Gebrochen-rationale Funktionen

Seite 41

5

Maximale Definitionsmenge: $x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = -3$

$\Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-3; -1\}$.

Nullstelle von f: $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1{,}5$.

6

a) Definitionsmenge von f: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$.
Definitionsmenge von g: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
$\Rightarrow D_f \neq D_g$. Die Aussage ist also falsch.

b) Die Aussage ist wahr. Die Nullstellen der Funktion f kann man bestimmen, indem man ihren Funktionsterm $f(x)$ gleich null setzt. Werden dann beide Seiten der Gleichung mit $(x^2 - 1) \neq 0$ multipliziert, erhält man die Gleichung $3x - 1 = 0$, die gelöst werden muss.

Seite 42

12

a) Individuelle Lösung, z. B. $f: x \mapsto \frac{(x - 2)^2}{x(x - 5)}$.

b) Individuelle Lösung, z. B. $f: x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 6}$.

13

$g(x) = \frac{3}{x - 2} + 2x - 1 = \frac{3}{x - 2} + \frac{2x(x - 2)}{x - 2} - \frac{x - 2}{x - 2} = \frac{3 + 2x^2 - 4x - x + 2}{x - 2}$

$= \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 2} = h(x)$

$\Rightarrow$ g und h sind identisch.

Definitionsmenge: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Nullstellen: $2x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{4}$.

Da der Radikand negativ ist, hat g keine Nullstellen.

G 15

a) $x^2 \cdot (2 + x^2 - 4x) = 2x^2 + x^4 - 4x^3 = x^4 - 4x^3 + 2x^2$

b) $x^4 \cdot \left(-\frac{3}{x} + 2 + \frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3x^4}{x} + 2x^4 + \frac{x^4}{x^3} = 2x^4 - 3x^3 + x$

c) $x^3 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{3x^2} + x^{-3}\right) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3x^3}{3x^2} + 1 = \frac{1}{2}x^4 - x + 1$

G 16

a) $5x^2 - 4x + 6 = x^2\left(5 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = 5x^2 - \frac{4x^2}{x} + \frac{6x^2}{x^2} = 5x^2 - 4x + 6$

b) $5x^2 + x^3 - x + 1 = x^3\left(\frac{5}{x} + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \frac{5x^3}{x} + x^3 - \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^3}{x^3}$

$= 5x^2 + x^3 - x + 1$

c) $3x - \frac{3}{2}x^2 - 7 + 0{,}25x^3 = x^3\left(\frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{x^3} + 0{,}25\right)$

$= \frac{3x^3}{x^2} - \frac{3x^3}{2x} - \frac{7x^3}{x^3} + 0{,}25x^3$

$= 3x - \frac{3}{2}x^2 - 7 + 0{,}25x^3$

Seite 45

5

a) Ausschließlich bei $g(x) = \frac{10x - 6}{5x^2 - 6}$ gilt $z < n$. Daher hat nur G_g die x-Achse als Asymptote. Damit ist Aussage wahr.

b) Die Aussage ist falsch. Bei $h(x) = \frac{0{,}1x^2 + 3x - 0{,}5}{24x - 12}$ gilt $z = n + 1$, weshalb G_h eine schräge Asymptote hat.

c) Die Aussage ist falsch. Zwar konvergiert die Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ gegen 2 und die Funktion g für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ gegen 0, aber die Funktion h divergiert für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$, da $z > n$ bei $h(x)$ gilt.

d) G_f hat die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 2$ und keine senkrechte Asymptote; G_h hat eine schräge Asymptote und eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0{,}5$. Damit ist die Aussage widerlegt.

Seite 47

17

a) Die Gleichung $2{,}25 + 2x^2 = 0$ ist nicht lösbar:

$2{,}25 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{2{,}25}{2} < 0$ Widerspruch!

Damit hat G_f keine senkrechte Asymptote.

b) $f(-x) = \frac{5(-x)^2 - 11{,}25}{2{,}25 + 2(-x)^2} = \frac{5x^2 - 11{,}25}{2{,}25 + 2x^2} = f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) Nullstellen: $5x^2 - 11{,}25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{11{,}25}{5} = 2{,}25$

$\Rightarrow x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = -1{,}5$.

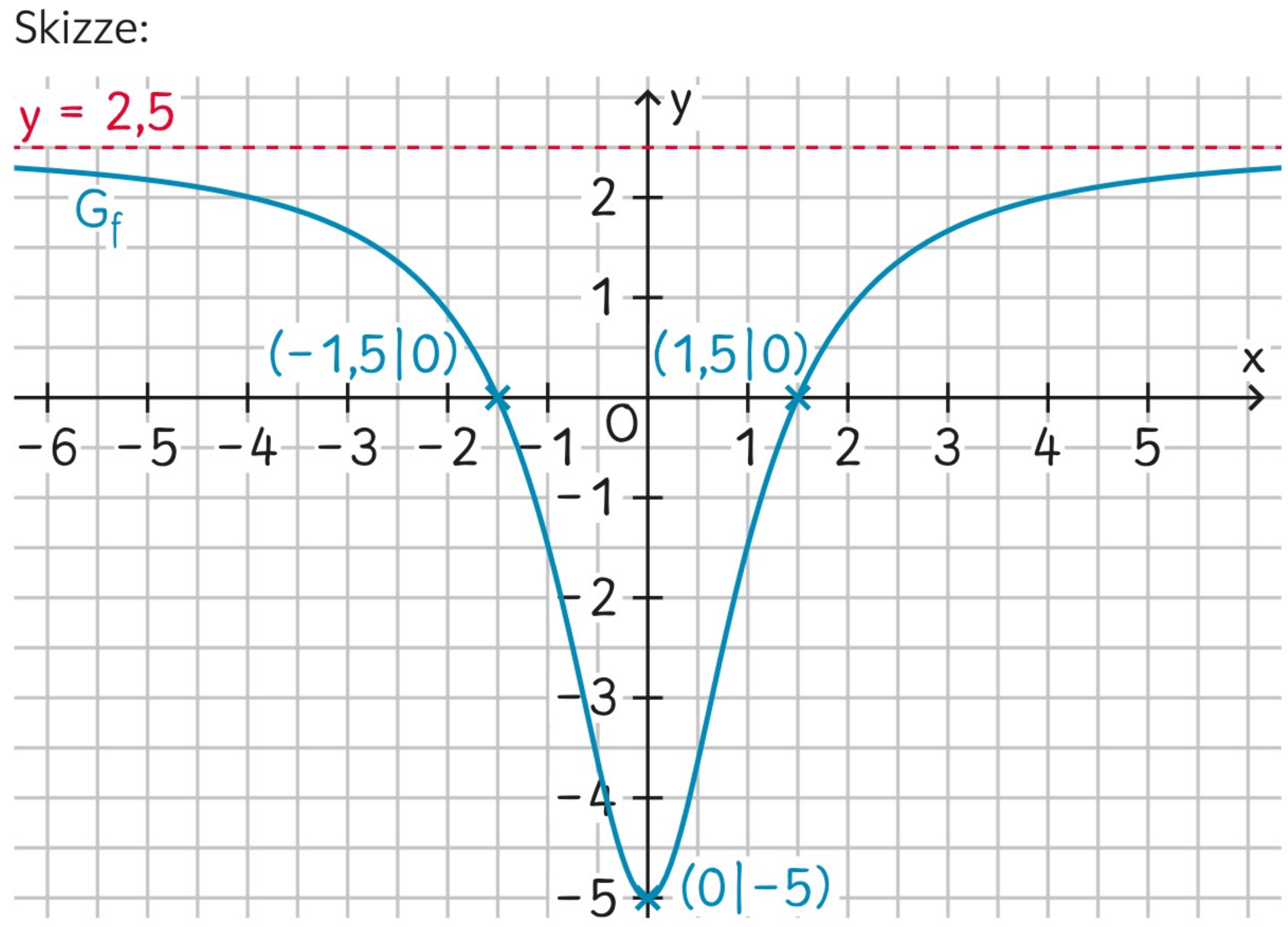
$\Rightarrow$ Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse: $S_1(1{,}5\,|\,0)$ und $S_2(-1{,}5\,|\,0)$.

Aus $f(0) = \frac{5 \cdot 0^2 - 11{,}25}{2{,}25 + 2 \cdot 0^2} = -5$ folgt $S_y(0\,|\,-5)$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 11{,}25}{2{,}25 + 2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(5 - \frac{11{,}25}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2{,}25}{x^2} + 2\right)} = \frac{5 - 0}{0 + 2} = 2{,}5$

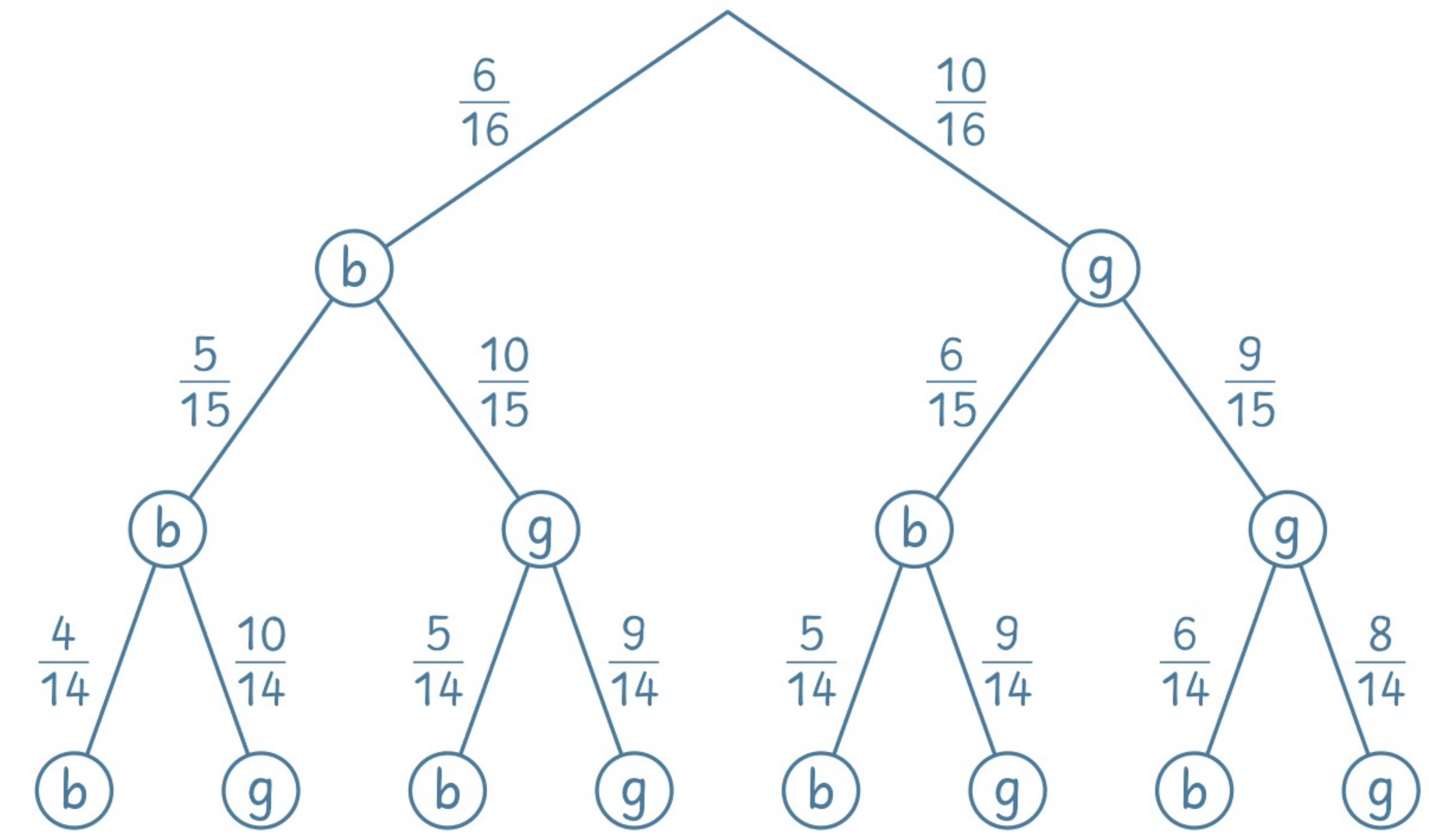
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 11{,}25}{2{,}25 + 2x^2} = 2{,}5$ (aufgrund der Achsensymmetrie von G_f)

e) Skizze:



G 19

a) b: „Die gezogene Kugel ist blau."
g: „Die gezogene Kugel ist grün."



b) P(„Genau eine grüne Kugel.") = P(bgb) + P(bbg) + P(gbb)

$= \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14}$

$= \frac{900}{3360} = \frac{15}{56}$

P(„Mindestens eine blaue Kugel.") = 1 − P(„Keine blaue Kugel.")

$= 1 - P(ggg) = 1 - \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14}$

$= 1 - \frac{720}{3360} = \frac{11}{14}$

Seite 50

5

a) $x = 5$: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel ($x = 5$ ist doppelte Nullstelle des Nenners).

b) $x = 0$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel ($x = 0$ ist einfache Nullstelle des Nenners).

$x = 8$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel ($x = 8$ ist einfache Nullstelle des Nenners).

c) $x = 2$: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel ($x = 2$ ist doppelte Nullstelle des Nenners).

d) Nullstellen des Nenners: $x^2 + 5x - 14 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = -7$.

Polstellen und ihre Art:

$x = 2$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel ($x = 2$ ist einfache Nullstelle des Nenners).

$x = -7$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel ($x = -7$ ist einfache Nullstelle des Nenners).

Seite 51

13

Individuelle Lösung, z. B.: $f(x) = \frac{2x^2}{(x + 1)^2}$.

14

a) Nullstellen des Nenners: $2x^2 - 12x + 18 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm 0}{4} \Rightarrow x_{1,2} = 3.$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 + 9}{2 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 18} = 0{,}5$

Nullstellen von f: $4^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{9}{4} < 0$ Widerspruch!

$\Rightarrow$ f hat keine Nullstellen.

b) Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 9}{2x^2 - 12x + 18} = \frac{4}{2} = 2$ (da $z = n$)

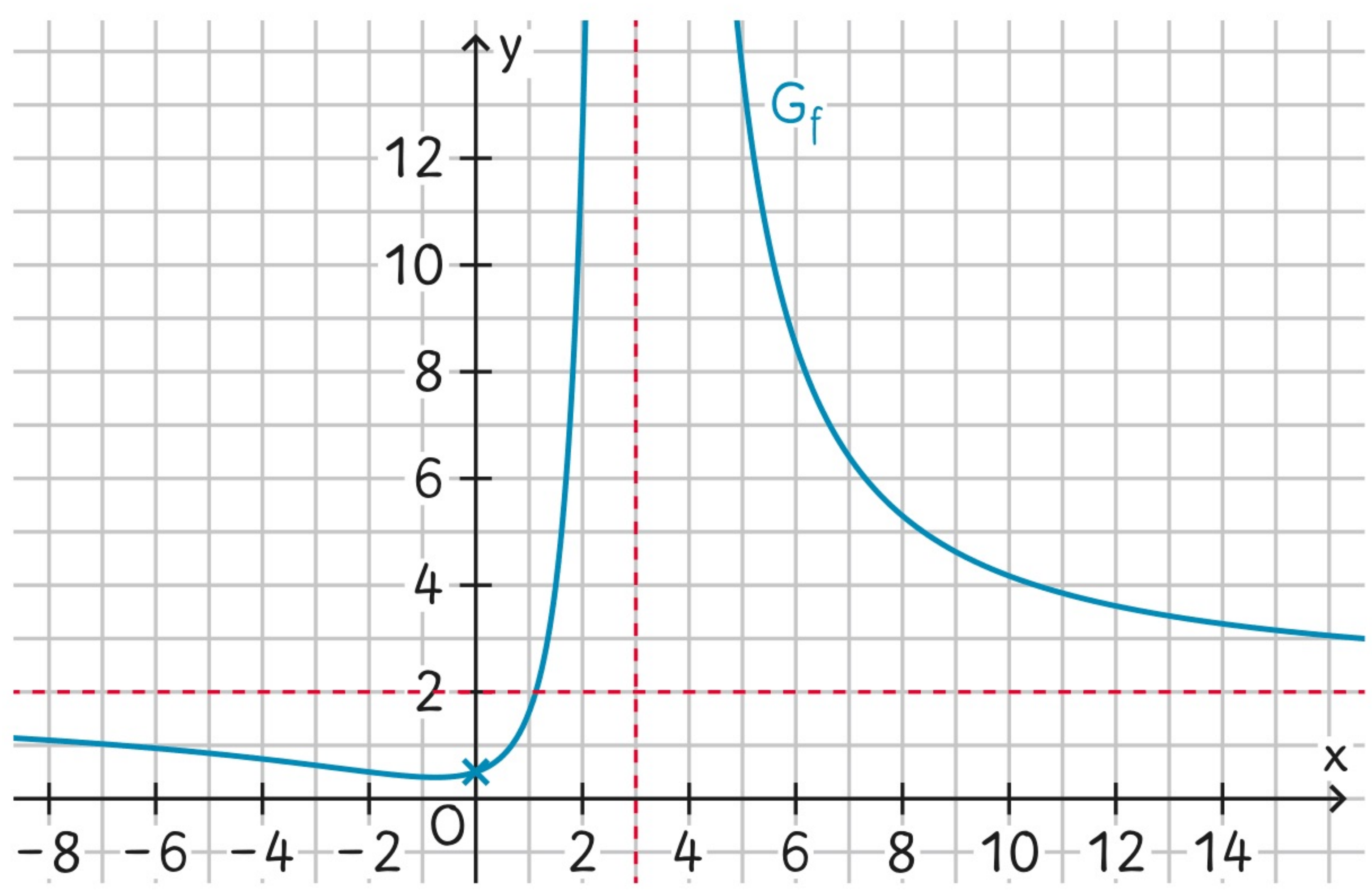
und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 9}{2x^2 - 12x + 18} = 2.$

Verhalten in der Umgebung von $x = 3$:

$f(x) = \frac{4x^2 + 9}{2x^2 - 12x + 18} = \frac{4x^2 + 9}{2(x-3)^2} = \frac{4x^2 + 9}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)^2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \underbrace{\frac{4x^2 + 9}{2}}_{\to 22{,}5} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\to 0^+} = +\infty \quad \to +\infty$

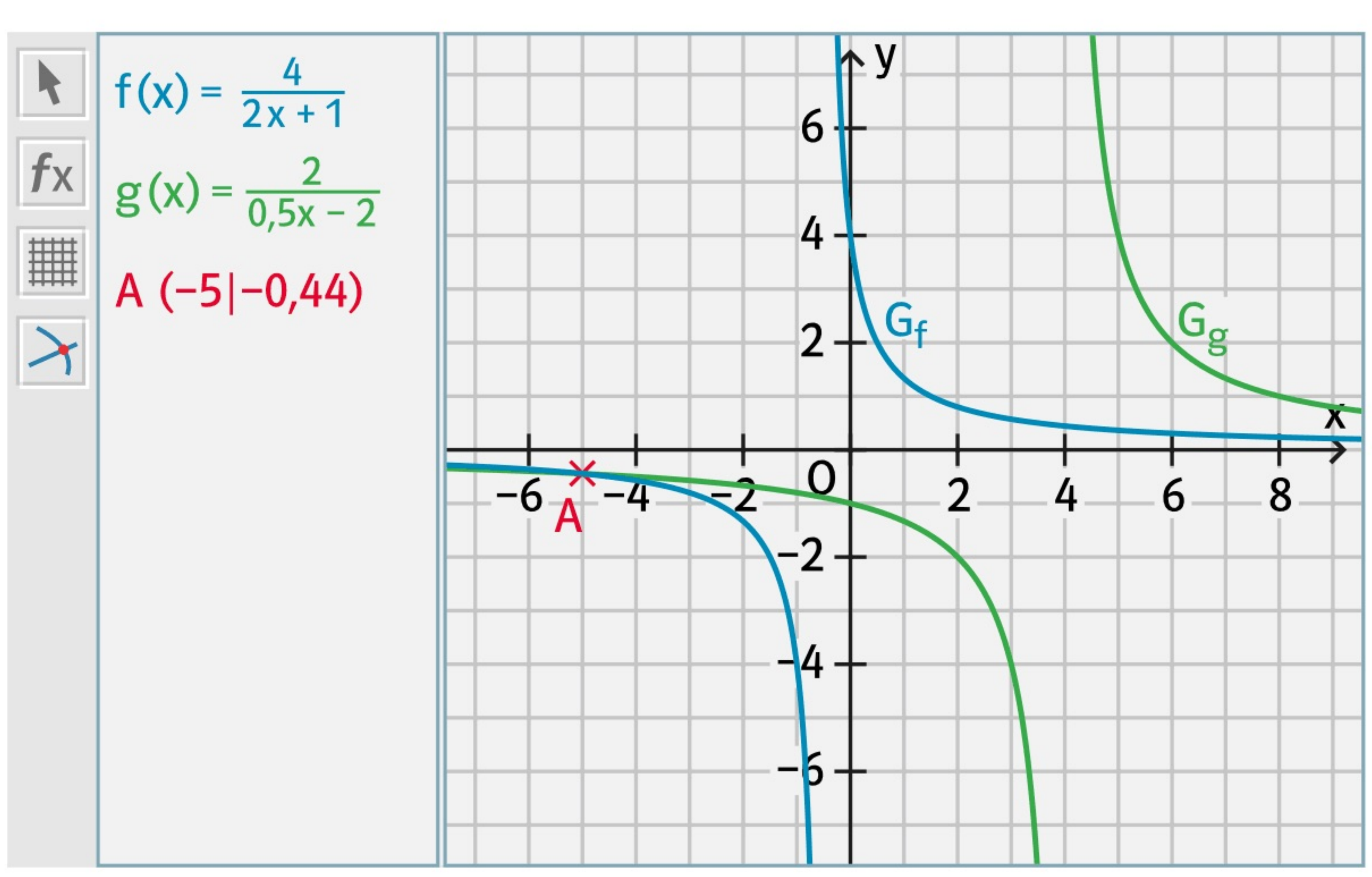
$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$ (da $x = 3$ eine doppelte Nullstelle des Nenners ist, ist $x = 3$ eine Polstelle von f ohne Vorzeichenwechsel).



G 16

a) $\frac{4}{2x+1} = \frac{2}{0{,}5x - 2} \Leftrightarrow 4(0{,}5x - 2) = 2(2x + 1) \Leftrightarrow 2x - 8 = 4x + 2$

$\Leftrightarrow -2x = 10 \Leftrightarrow x = -5$

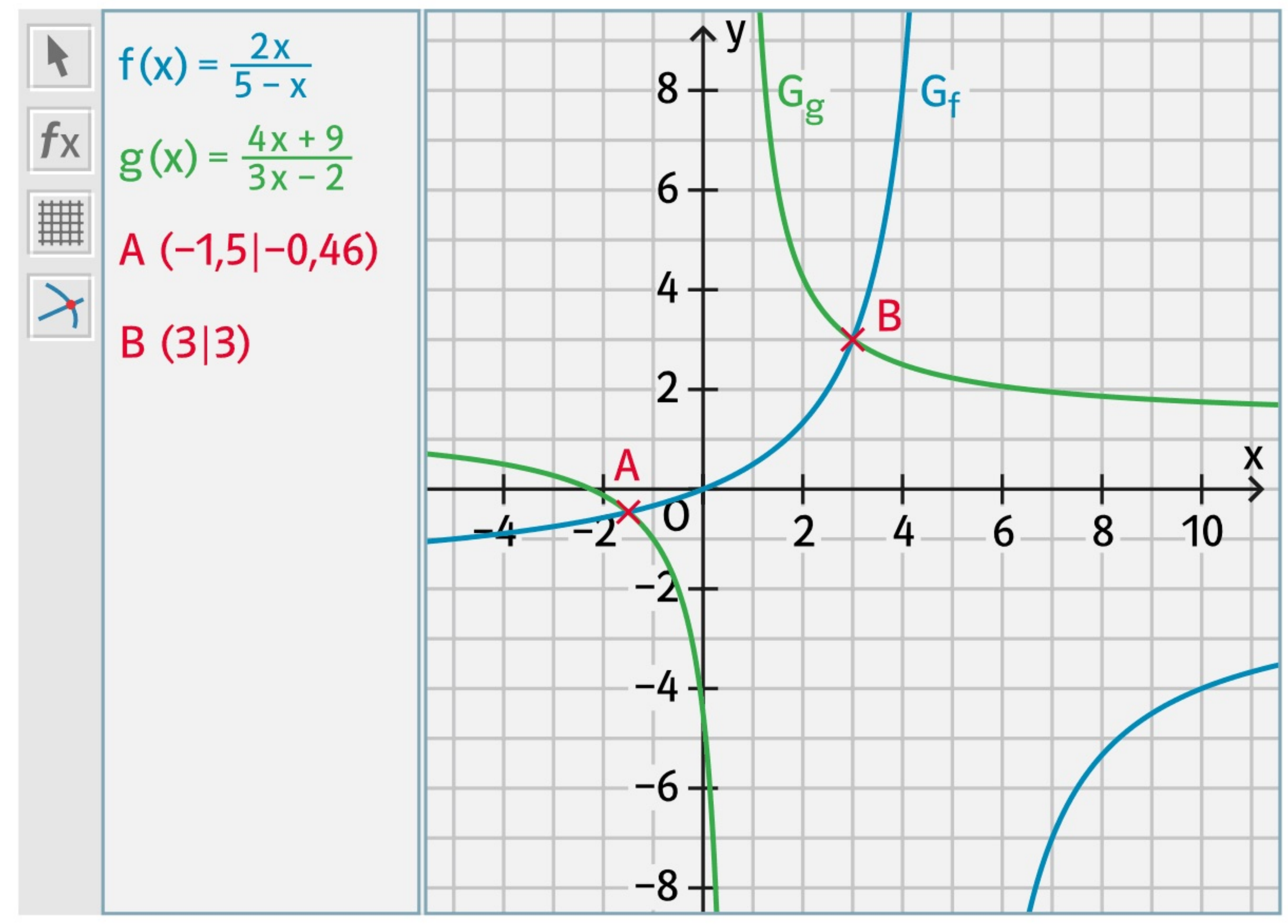


b) $\frac{2x}{5-x} = \frac{4x+9}{3x-2} \Leftrightarrow 2x(3x - 2) = (4x + 9)(5 - x)$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 4x = 20x - 4x^2 + 45 - 9x \Leftrightarrow 10x^2 - 15x - 45 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{4}$

$\Rightarrow x_1 = 3$ und $x_2 = -1{,}5$

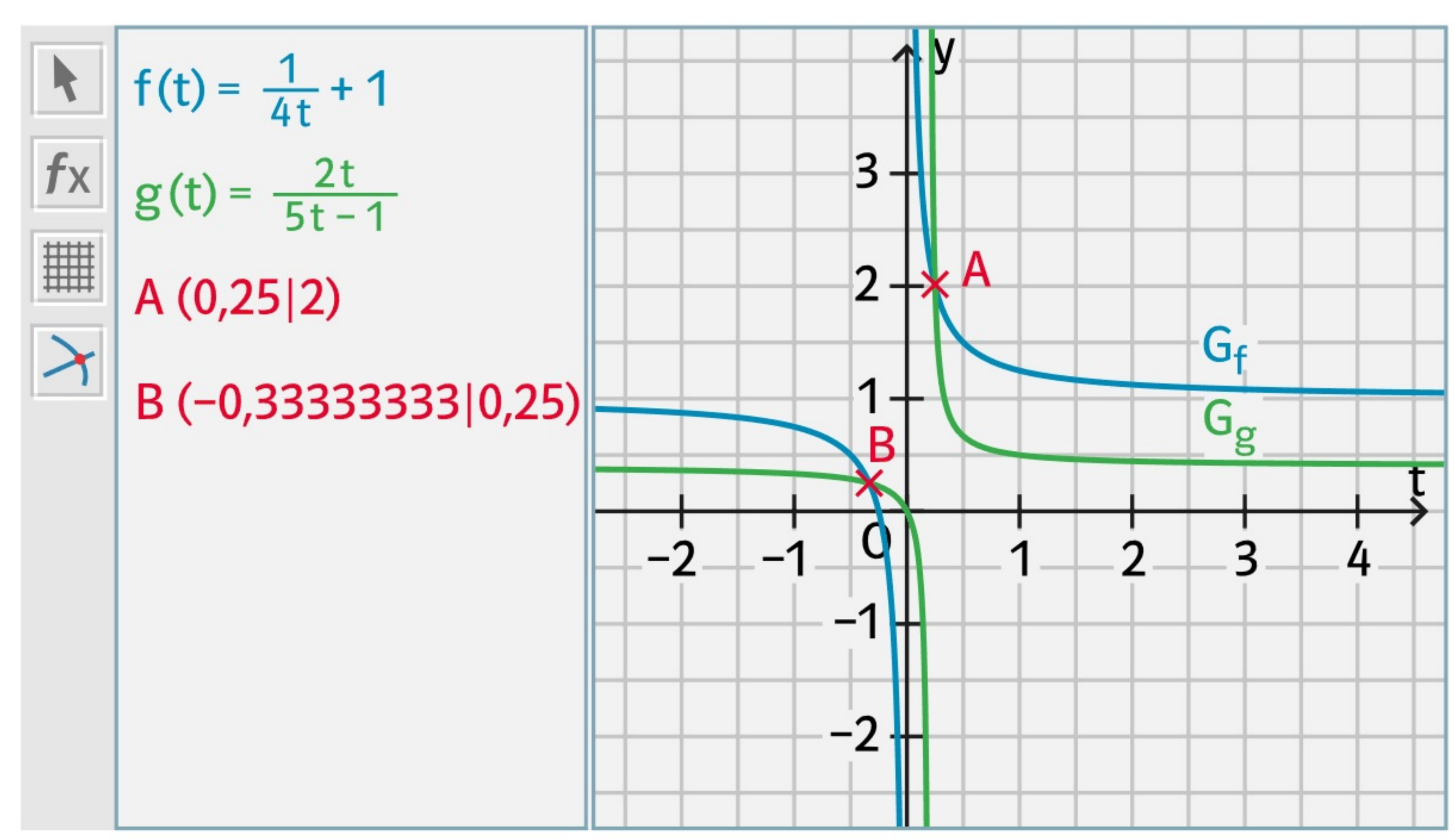


c) $\frac{1}{4t} + 1 = \frac{2t}{5t-1} \Leftrightarrow \frac{1}{4t} + \frac{4t}{4t} = \frac{2t}{5t-1} \Leftrightarrow \frac{1+4t}{4t} = \frac{2t}{5t-1}$

$\Leftrightarrow (1 + 4t)(5t - 1) = 8t^2 \Leftrightarrow 5t - 1 + 20t^2 - 4t = 8t^2$

$\Leftrightarrow 12t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1)}}{2 \cdot 12} = \frac{-1 \pm 7}{24}$

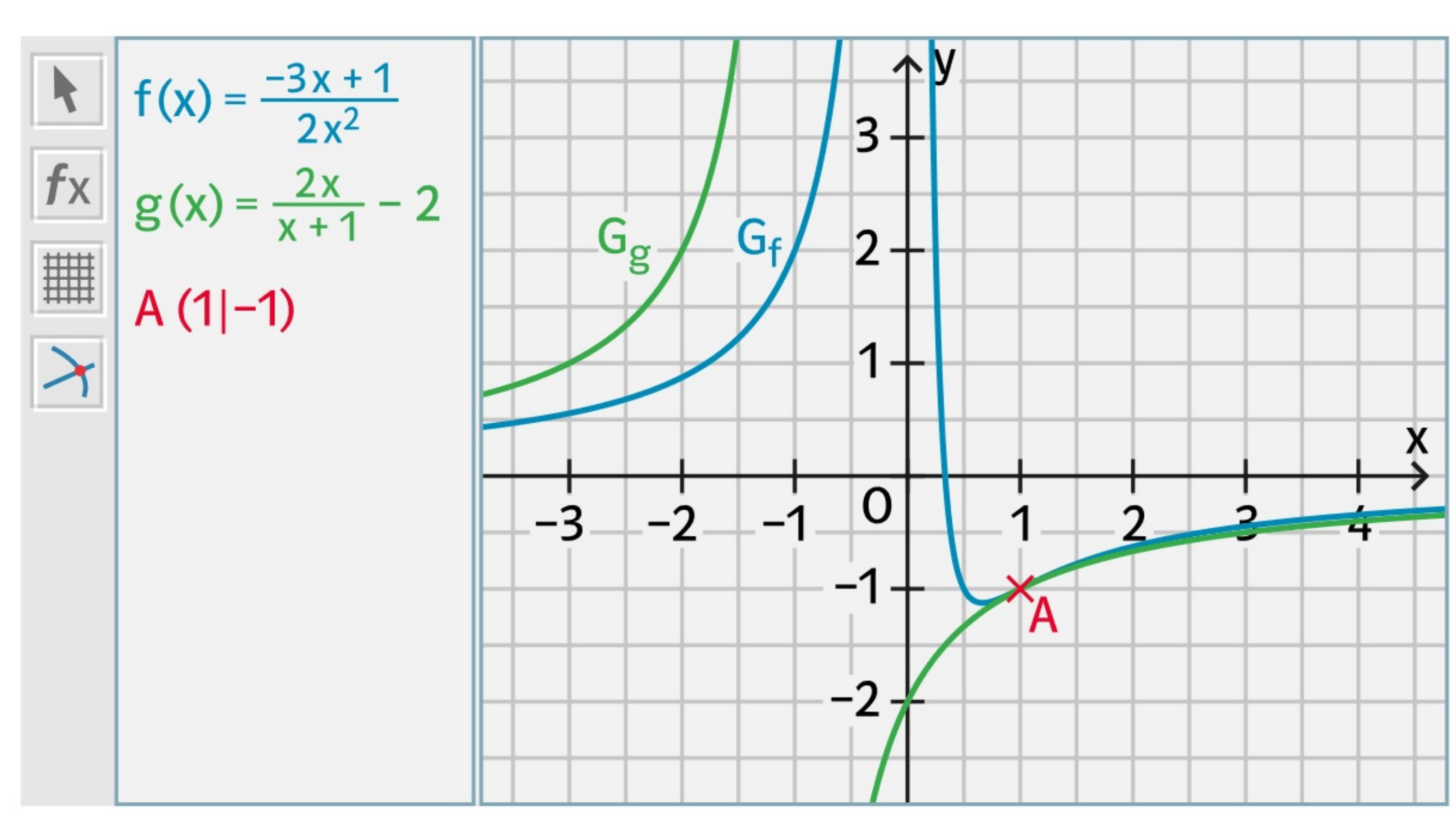
$\Rightarrow t_1 = 0{,}25$ und $t_2 = -\frac{1}{3}$



d) $\frac{-3x+1}{2x^2} = \frac{2x}{x+1} - 2 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{2x^2} = \frac{2x}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{2x^2} = \frac{-2}{x+1}$

$\Leftrightarrow (-3x + 1)(x + 1) = -4x^2 \Leftrightarrow -3x^2 - 3x + x + 1 = -4x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$



Seite 55

9

a) Definitionsmenge: $(2x - 5)(2x + 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 2{,}5$
und $x_2 = -2{,}5 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-2{,}5; 2{,}5\}$.
Gleichungen der senkrechten Asymptoten:
$x = 2{,}5$ und $x = -2{,}5$.
Gleichung der waagerechten Asymptote:
$f(x) = \frac{4x^2 + 4}{(2x - 5)(2x + 5)} = \frac{4x^2 + 4}{4x^2 - 25} \Rightarrow y = \frac{4}{4} = 1$ (da $z = n$).

b) $4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$ Widerspruch!
$\Rightarrow$ f hat keine Nullstellen.

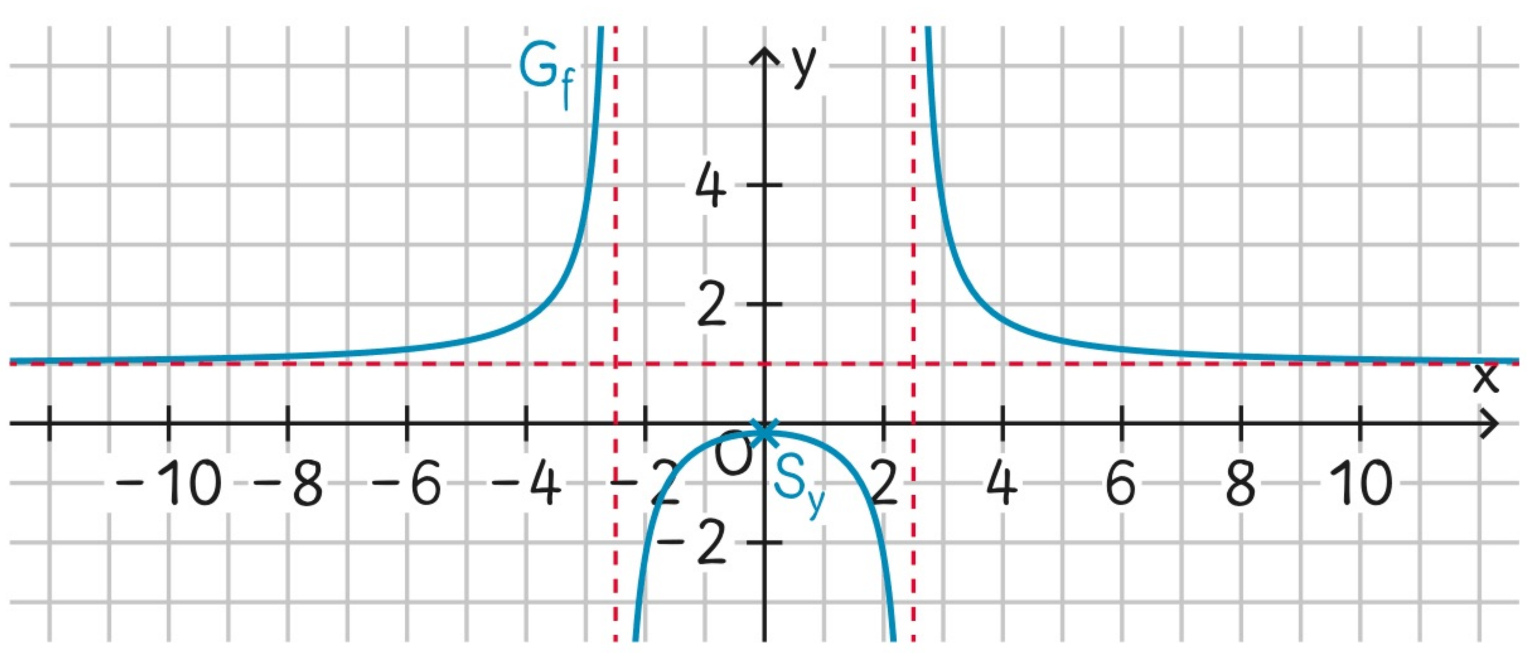
c) $f(x) = \frac{4x^2 + 4}{(2x - 5)(2x + 5)} = \frac{4x^2 + 4}{4x^2 - 25}$

$f(-x) = \frac{4(-x)^2 + 4}{4(-x)^2 - 25} = \frac{4x^2 + 4}{4x^2 - 25} = f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

d) $f(0) = -\frac{4}{25} = -0{,}16 \Rightarrow S_y(0\,|\,-0{,}16)$.

e) Skizze:



10

a) Individuelle Lösung, z.B.: $h(x) = \frac{x(x + 3)}{(x + 6)(x - 1)}$.

b) Individuelle Lösung, z.B.: $h(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$.

Seite 57

20

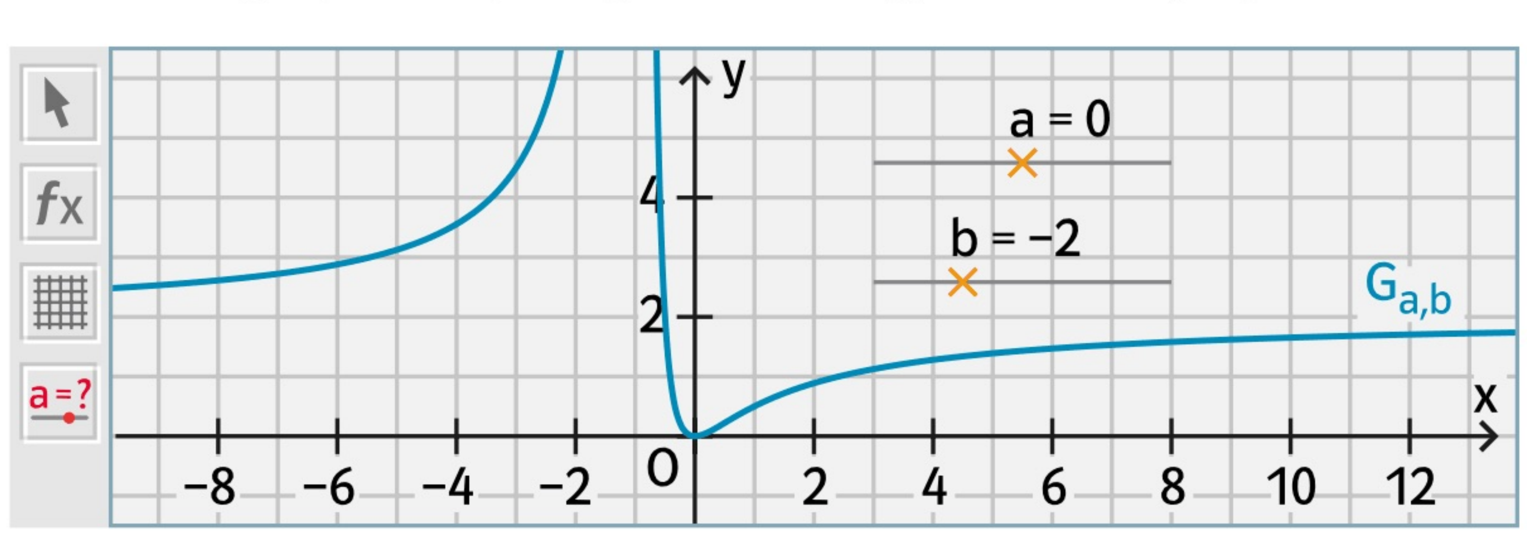
a) $4x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{a}{4} < 0$ Widerspruch!

b) Für $a < 0$ sowie $a \neq -4$ und $b \neq \pm\sqrt{-a}$ hat die Funktion $f_{a,b}$ zwei Nullstellen.

c) Nullstellen des Nenners: $2x - b = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{b}{2}$
und $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1$.
Gleichungen der senkrechten Asymptoten: $x = \frac{b}{2}$ und $x = -1$.

d) $f_{a,b}(x) = \frac{4x^2 + a}{(2x - b)(x + 1)} = \frac{4x^2 + a}{2x^2 + 2x - bx - b}$
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = \frac{4}{2} = 2$ (da $z = n$).
Da diese Gleichung unabhängig von a und b ist, haben alle Funktionsgraphen G_f die gleiche waagerechte Asymptote.

e)



21

Definitionsmenge:
$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 3$
und $x_2 = -2 \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 3\}$.
Symmetrieeigenschaften von G_g:

$g(x) = -\frac{(x - 5)(x + 6) + 25}{x^2 - x - 6} = -\frac{x^2 + 6x - 5x - 30 + 25}{x^2 - x - 6} = -\frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x - 6}$

$g(-x) = -\frac{(-x)^2 + (-x) - 5}{(-x)^2 - (-x) - 6} = -\frac{x^2 - x - 5}{x^2 + x - 6} \neq g(x)$

$\Rightarrow$ G_g ist nicht symmetrisch zur y-Achse.

$g(-x) = -\frac{x^2 - x - 5}{x^2 + x - 6} \neq -g(x)$

$\Rightarrow$ G_g ist nicht symmetrisch zum Ursprung.

Nullstellen:
$(x - 5)(x + 6) + 25 = x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$
$= \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \approx 1{,}8$ und $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \approx -2{,}8$.

Schnittpunkt von G_g mit der y-Achse: $g(0) = -\frac{5}{6} \Rightarrow S_y\left(0\,\middle|\,-\frac{5}{6}\right)$.

Verhalten von g an den Rändern des Definitionsbereiches:

$g(x) = -\frac{(x - 5)(x + 6) + 25}{x^2 - x - 6} = -\frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x - 6} = -\frac{x^2 + x - 5}{(x + 2)(x - 3)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x - 6}\right) = -\frac{1}{1} = -1$ (da $z = n$) bzw.

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-\frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x - 6}\right) = -1$

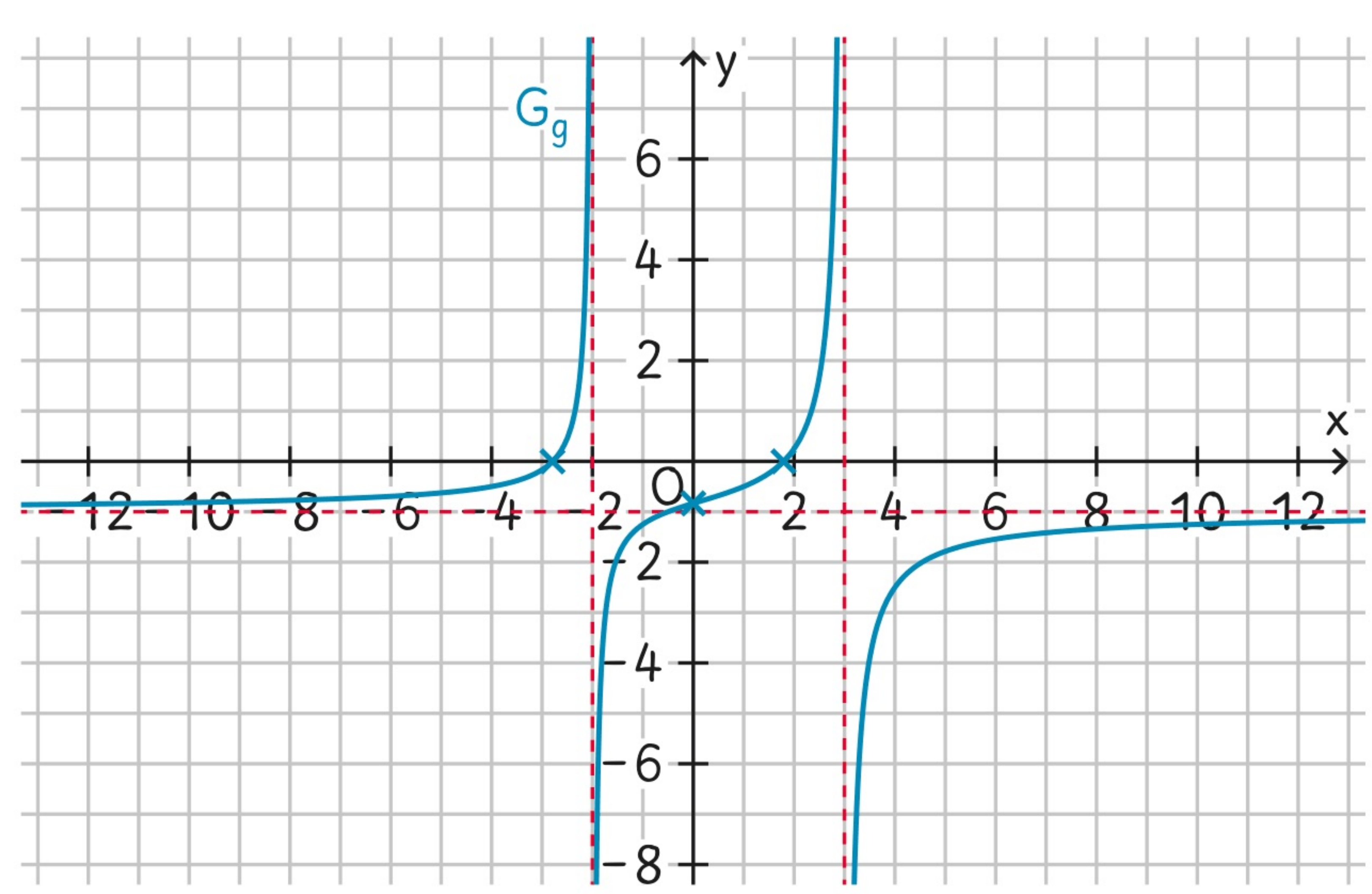
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}}\left(-\frac{x^2 + x - 5}{(x + 2)(x - 3)}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}}\left(\left(-\frac{1}{x + 2}\right) \cdot \frac{x^2 + x - 5}{x - 3}\right) = +\infty$
($x + 2 \to 0^-$; $-\frac{1}{x+2} \to +\infty$; $\frac{x^2 + x - 5}{x - 3} \to \frac{3}{5}$)

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}}\left(-\frac{x^2 + x - 5}{(x + 2)(x - 3)}\right) = -\infty$ (da $x = -2$ eine einfache Nullstelle des Nenners ist)

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}}\left(-\frac{x^2 + x - 5}{(x + 2)(x - 3)}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}}\left(\left(-\frac{x^2 + x - 5}{x + 2}\right) \cdot \frac{1}{x - 3}\right) = +\infty$
($-\frac{x^2 + x - 5}{x + 2} \to -\frac{7}{5}$; $x - 3 \to 0^-$; $\frac{1}{x-3} \to -\infty$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}}\left(-\frac{x^2 + x - 5}{(x + 2)(x - 3)}\right) = -\infty$ (da $x = 3$ eine einfache Nullstelle des Nenners ist)

Gleichungen der senkrechten Asymptoten: $x = -2$ und $x = 3$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = -1$.



G 23

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(30\,\text{cm})^3 = 36\,000\,\pi\,\text{cm}^3 = 36\,\pi\,\text{dm}^3 \approx 113{,}097\,\text{dm}^3$
$O = 4\pi(30\,\text{cm})^2 = 3600\,\pi\,\text{cm}^2 = 36\,\pi\,\text{dm}^2 \approx 113{,}097\,\text{dm}^2$

G 24

$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (5\,\text{cm})^2 \cdot 8\,\text{cm} = \frac{200}{3}\,\text{cm}^3 \approx 66{,}67\,\text{cm}^3$

Seite 60

10

a) $\frac{2x-4}{x+2} = 2x-4$

$\Leftrightarrow 2x-4 = (2x-4)(x+2)$

$\Leftrightarrow 2x-4 = 2x^2+4x-4x-8$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{1\pm3}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = -1$

$g(2) = 0$ und $g(-1) = -6 \Rightarrow S_1(2|0)$ und $S_2(-1|-6)$.

b) $-\frac{2}{(x+5)^2} - 1{,}5 = \frac{2}{x+3} - 1{,}5$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{(x+5)^2} = \frac{2}{x+3}$

$\Leftrightarrow -2(x+3) = 2(x+5)^2$

$\Leftrightarrow -2x-6 = 2x^2+20x+50$

$\Leftrightarrow 2x^2+22x+56 = 0$

$\Leftrightarrow x^2+11x+28 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot1\cdot28}}{2\cdot1} = \frac{-11\pm3}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -4$ und $x_2 = -7$

$g(-4) = -3{,}5$ und $g(-7) = -2 \Rightarrow S_1(-4|-3{,}5)$ und $S_2(-7|-2)$.

Seite 62

19

Schnittpunkte von G_f und G_g:

$\frac{2x-4+x^2}{9-3x^2} = \frac{-x-1}{3x+6}$

$\Leftrightarrow (2x-4+x^2)(3x+6) = (-x-1)(9-3x^2)$

$\Leftrightarrow 6x^2+12x-12x-24+3x^3+6x^2 = -9x+3x^3-9+3x^2$

$\Leftrightarrow 3x^3+12x^2-24 = 3x^3+3x^2-9x-9$

$\Leftrightarrow 9x^2+9x-15 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2+3x-5 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot3\cdot(-5)}}{2\cdot3} = \frac{-3\pm\sqrt{69}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{69}}{6} \approx 0{,}9$

und $x_2 = \frac{-3-\sqrt{69}}{6} \approx -1{,}9$

$\Rightarrow g\left(\frac{-3+\sqrt{69}}{6}\right) = \frac{7-\sqrt{69}}{6} \approx -0{,}2$ und $g\left(\frac{-3-\sqrt{69}}{6}\right) = \frac{7+\sqrt{69}}{6} \approx 2{,}6$

$\Rightarrow S_1(0{,}9|-0{,}2)$ und $S_2(-1{,}9|2{,}6)$.

Eigenschaften von f und G_f:

Definitionsmenge von f: $9-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_3 = \sqrt{3} \approx 1{,}7$

und $x_4 = -\sqrt{3} \approx -1{,}7 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

Nullstellen von f: $2x-4+x^2 = x^2+2x-4 = 0$

$\Rightarrow x_{5,6} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{2} \Rightarrow x_5 = -1+\sqrt{5} \approx 1{,}2$

und $x_6 = -1-\sqrt{5} \approx -3{,}2$.

Symmetrieverhalten von G_f: Aus der Lage der Nullstellen folgt, dass G_f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse: $f(0) = -\frac{4}{9} \Rightarrow S_y\left(0\middle|-\frac{4}{9}\right)$.

Verhalten von f im Unendlichen:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-4+x^2}{9-3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-4+x^2}{9-3x^2} = -\frac{1}{3}$ (da $z = n$).

Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücken:

$f(x) = \frac{2x-4+x^2}{9-3x^2} = \frac{2x-4+x^2}{-3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$

$\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{3}\\x<\sqrt{3}}} \frac{1}{x-\sqrt{3}} \cdot \frac{2x-4+x^2}{-3(x+\sqrt{3})} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{3}\\x>\sqrt{3}}} \frac{2x-4+x^2}{9-3x^2} = -\infty$ (da $\sqrt{3}$ eine einfache Nullstelle des Nenners ist)

$\lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}}} \frac{2x-4+x^2}{9-3x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}}} \frac{1}{x+\sqrt{3}} \cdot \frac{2x-4+x^2}{-3(x-\sqrt{3})} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{3}\\x>-\sqrt{3}}} \frac{2x-4+x^2}{9-3x^2} = -\infty$ (da $\sqrt{3}$ eine einfache Nullstelle des Nenners ist)

Eigenschaften von g und G_g:

Definitionsmenge von g: $3x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Nullstellen von g: $-x-1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Symmetrieverhalten von G_g: $g(-x) = \frac{-(-x)-1}{3(-x)+6} = \frac{x-1}{-3x+6} \neq g(x)$

und $g(-x) = \frac{x-1}{-3x+6} \neq -g(x)$.

Also ist G_f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Schnittpunkt von G_g mit der y-Achse: $g(0) = -\frac{1}{6} \Rightarrow S_y\left(0\middle|-\frac{1}{6}\right)$.

Verhalten von g im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{3x+6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{3x+6} = -\frac{1}{3}$

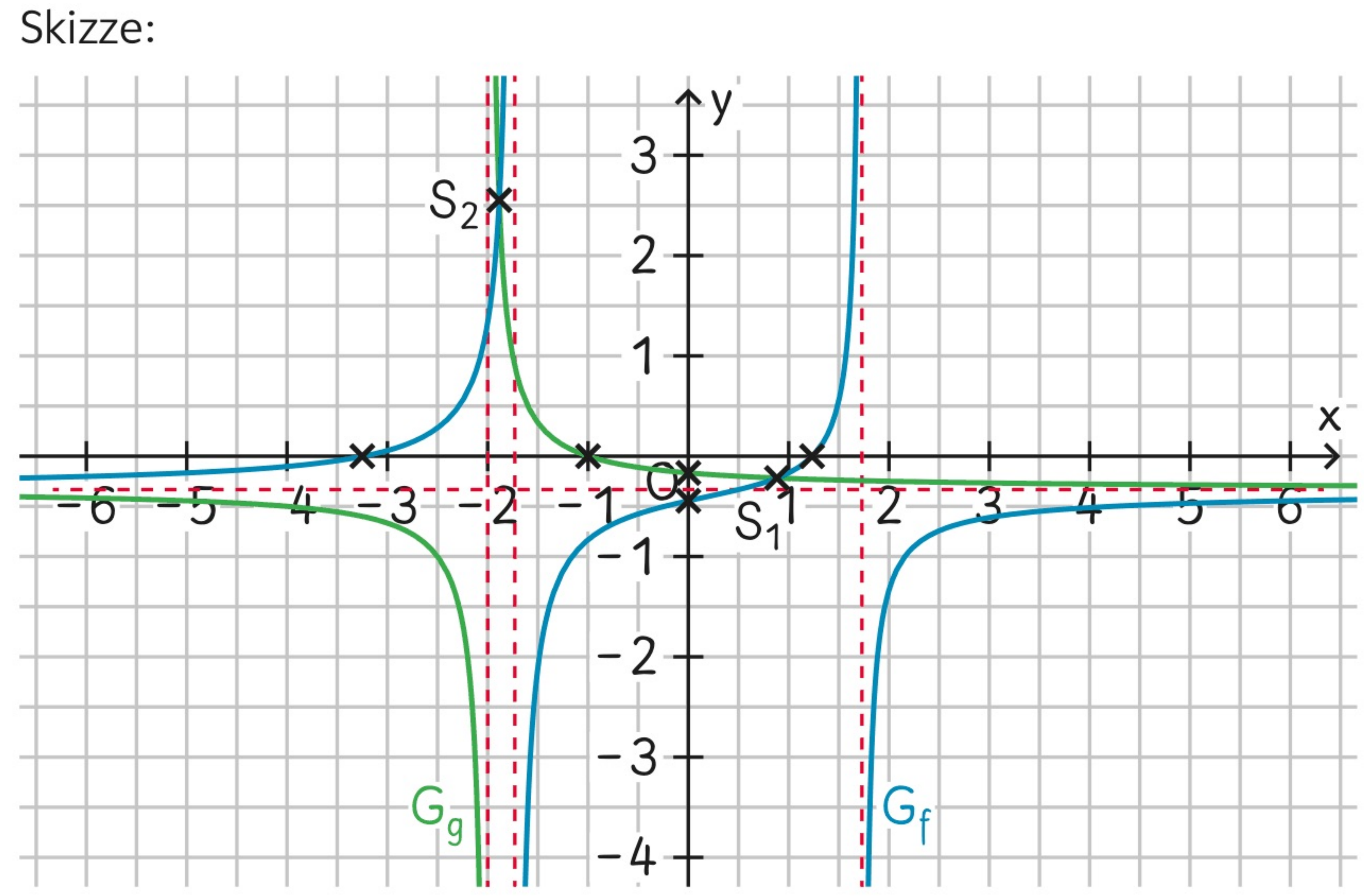
(da $z = n$).

Verhalten von g in der Umgebung der Definitionslücken:

$f(x) = \frac{-x-1}{3x+6} = \frac{-x-1}{3(x+2)}$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \frac{1}{x+2} \cdot \frac{-x-1}{3} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{-x-1}{3x+6} = +\infty$ (da -2 eine einfache Nullstelle des Nenners ist)

Skizze:



20

$\frac{x+6-a}{x+6} = 2x+1$

$\Leftrightarrow x+6-a = (2x+1)(x+6)$

$\Leftrightarrow x+6-a = 2x^2+13x+6$

$\Leftrightarrow 2x^2+12x+a = 0$

Diskriminante: $D = 12^2-4\cdot2\cdot a = 144-8a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{144}{8} = 18$.

Für $a = 18$ haben G_a und G_g genau einen Schnittpunkt.

G 22

$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot a\cdot b\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 5\,cm\cdot 6\,cm\cdot 8\,cm = 80\,cm^3$

$G = 5\,cm\cdot 6\,cm = 30\,cm^2$

$h_a = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+h^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2}cm\right)^2+(8\,cm)^2} = \sqrt{73}\,cm$

$h_b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}cm\right)^2+(8\,cm)^2} = \frac{\sqrt{281}}{2}cm$

$A_a = 0{,}5\cdot a\cdot h_a = 0{,}5\cdot 5\,cm\cdot\sqrt{73}\,cm = \frac{5\sqrt{73}}{2}cm^2$

$A_b = 0{,}5\cdot b\cdot h_b = 0{,}5\cdot 6\,cm\cdot\frac{\sqrt{281}}{2}cm = \frac{3\sqrt{281}}{2}cm^2$

$O = G+2\cdot A_a+2\cdot A_b = 30\,cm^2+2\cdot\frac{5\sqrt{73}}{2}cm^2+2\cdot\frac{3\sqrt{281}}{2}cm^2$

$\approx 123{,}01\,cm^2$

Seite 69

1

Definitionsbereich: $x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x_1 = 5$ und $x_2 = -5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5; 5\}$.

Symmetrieverhalten:

$f(-x) = \frac{20(-x)}{(-x)^2 - 25} = \frac{-20x}{x^2 - 25} = -\frac{20x}{x^2 - 25} = -f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist symmetrisch zum Ursprung.

Nullstelle: $x = 0$.

Gleichungen der Asymptoten: $x = -5$, $x = 5$ und $y = 0$ (da $z < n$).

2

$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist symmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$

$\left(\text{Alternativ: } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (da } z = n).\right)$

$f(x) = 0{,}96 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0{,}96$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0{,}96(x^2 + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0{,}96x^2 + 0{,}96$

$\Leftrightarrow 0{,}04x^2 = 1{,}96$

$\Leftrightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x_1 = -7$ und $x_2 = 7$

Für $x_1 = -7$ und $x_2 = 7$ gilt $f(x) = 0{,}96$.

3

Individuelle Lösung, z.B. $f(x) = \frac{3x(x - 2)}{(x + 4)^2}$.

4

a) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\frac{x^2}{x - 1} = 0 \Rightarrow x = 0$

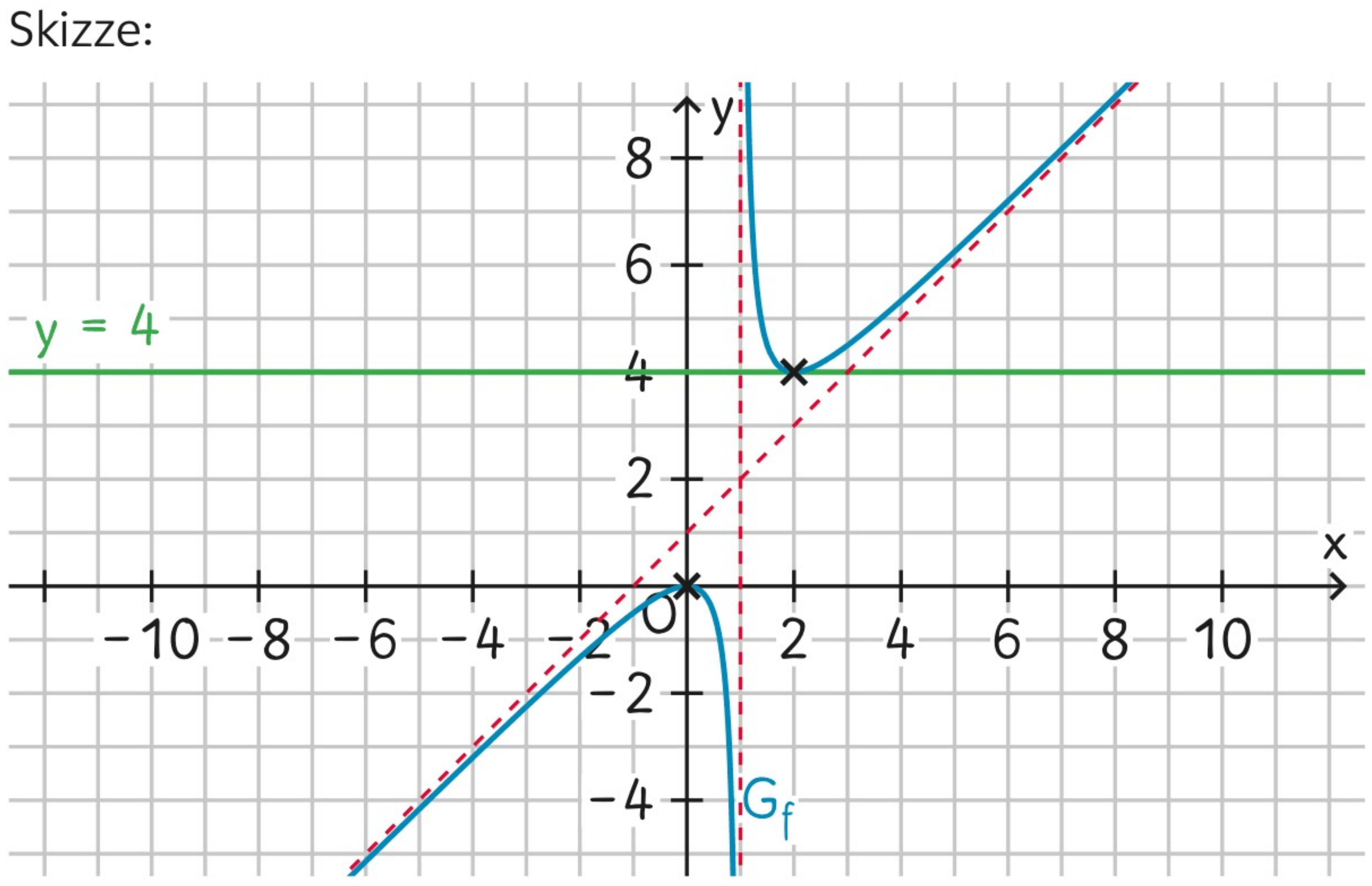
$f(0) = 0$

$\Rightarrow S_x(0|0) = S_y(0|0)$

b) $x + 1 + \frac{1}{x - 1} = \frac{x(x - 1) + (x - 1) + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - x + x - 1 + 1}{x - 1} = \frac{x^2}{x - 1} = f(x)$

c) Gleichung der schrägen Asymptote: $y = x + 1$.
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 1$.
Da $x = 1$ eine einfache Nullstelle des Nenners ist, ist $x = 1$ eine Polstelle von f mit Vorzeichenwechsel.

d) Skizze:



Wertemenge: $W = \mathbb{R}\setminus]0; 4[$.

e) G_f ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(1|2)$.

5

a) $D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 4\}$ und $W = \mathbb{R}$

b) Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 0$.
Gleichungen der senkrechten Asymptoten: $x = -2$ und $x = 4$.

c) $f(x) = \frac{a(x - 1)}{(x + 2)(x - 4)}$

$A(0|1{,}25)$ in $f(x)$ einsetzen: $1{,}25 = \frac{a(0 - 1)}{(0 + 2)(0 - 4)} \Leftrightarrow 1{,}25 = \frac{-a}{-8}$

$\Leftrightarrow a = 10 \Rightarrow f(x) = \frac{10(x - 1)}{(x + 2)(x - 4)}$

6

a) Nullstellen: $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5x}{(x - 3)(x + 5)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} \frac{-5x}{(x - 3)(x + 5)} = \lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} \frac{1}{x + 5} \cdot \frac{-5x}{x - 3} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{-5x}{(x - 3)(x + 5)} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x - 3} \cdot \frac{-5x}{x + 5} = +\infty$

$\Rightarrow W = \mathbb{R}$

b) Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Es gibt keine senkrechten Asymptoten.

Nullstellen: $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (doppelt).

Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 4$.

Schnittpunkte von G_h und seiner waagerechten Asymptote:

$\frac{4x^2}{x^2 + 4} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 = 4x^2 + 16 \Leftrightarrow 0 = 16$

Es gibt keine Schnittpunkte.

$\Rightarrow W = [0; 4[$

7

a) Nullstellen von g: $2x + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2}$.

Nullstellen von f: $\frac{6x + 9 - 2a}{2x + b} = 0 \Leftrightarrow 6x + 9 - 2a = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2a - 9}{6} = \frac{1}{3}a - \frac{3}{2}$.

b) $2x + 1 = \frac{6x + 9 - 2}{2x + 1}$

$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 6x + 9 - 2$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 6x + 7$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4}$

$\Rightarrow x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = -1$

$\Rightarrow y_1 = g(1{,}5) = 4$ und $y_2 = g(-1) = -1$

$\Rightarrow S_1(1{,}5|4)$ und $S_2(-1|-1)$

Bedeutung der Schnittpunkte von G_g und G_h für die Funktion $f(x) = g(x) - h(x)$:

Für die Schnittstellen der Schnittpunkte S_1 und S_2 gilt $f(1{,}5) = f(-1) = 0$. Sie sind die einzigen Nullstellen von f.

c) $2x + 3 = \frac{6x + 9 - 2a}{2x + 3}$

$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 = 6x + 9 - 2a$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 6x + 9 - 2a$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 6x + 2a = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + a = 0$

Diskriminante:

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot a = 0 \Leftrightarrow 9 - 8a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{8} = 1{,}125$

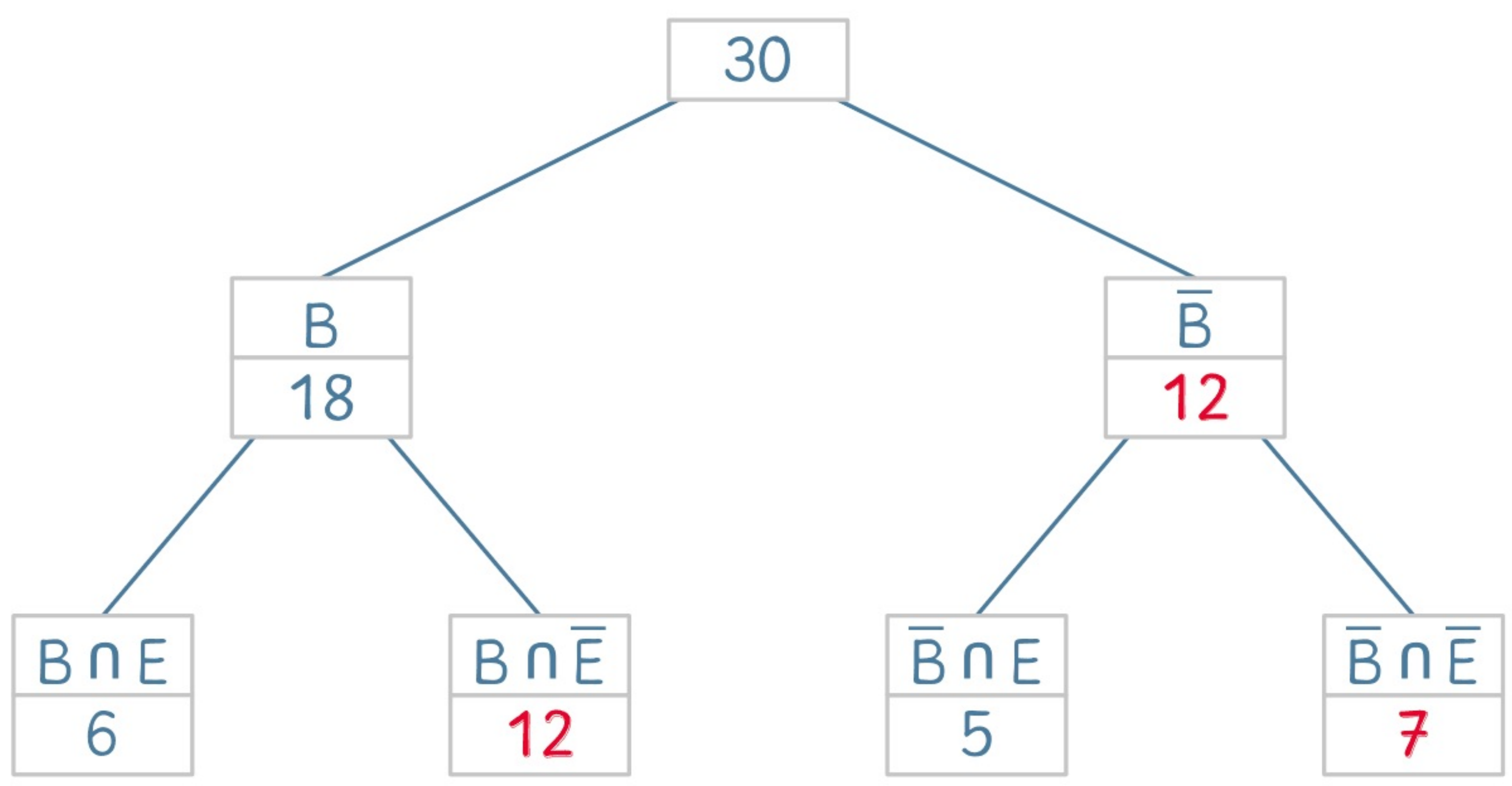
Für $a = \frac{9}{8} = 1{,}125$ haben die Graphen G_g und G_h genau einen Punkt gemeinsam.

III Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seite 75

5

a)



b) (1) $P(\overline{E}) = \frac{12+7}{30} = \frac{19}{30}$

(2) $P(B \cap \overline{E}) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

(3) $P_B(\overline{E}) = \frac{P(B \cap \overline{E})}{P(B)} = \frac{\frac{12}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ oder direkt

$P_B(\overline{E}) = \frac{|B \cap \overline{E}|}{|B|} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

6

a)

	B	$\overline{B}$	
W	3	9	12
$\overline{W}$	6	9	15
	9	18	27

b) $P(B \cap W) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

$P(\overline{B} \cup \overline{W}) = P(\overline{B} \cap \overline{W}) + P(B \cap \overline{W}) + P(\overline{B} \cap W)$

$= \frac{9}{27} + \frac{6}{27} + \frac{9}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$ oder

$P(\overline{B} \cup \overline{W}) = 1 - P(B \cap W) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$P_W(B) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{\frac{3}{27}}{\frac{12}{27}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ oder direkt $P_W(B) = \frac{|B \cap W|}{|W|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$P_{\overline{W}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{W})}{P(\overline{W})} = \frac{\frac{6}{27}}{\frac{15}{27}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ oder direkt $P_{\overline{W}}(B) = \frac{|B \cap \overline{W}|}{|\overline{W}|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Seite 77

15

Ereignisse:

A: „Man erhält ein Auto mit Mängeln."

M: „Man erhält ein Auto, das an einem Montag produziert worden ist."

Tag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
Autos mit Mängeln (A)	20	8	8	8	8
Autos ohne Mängel ($\overline{A}$)	180	192	192	192	192

a) $P(A) = \frac{20 + 4 \cdot 8}{5 \cdot 200} = \frac{52}{1000} = 5{,}2\,\%$

b) $P_M(A) = \frac{|M \cap A|}{|M|} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10} = 10\,\%$

(schon im Aufgabentext enthalten)

c) $P_A(M) = \frac{|M \cap A|}{|A|} = \frac{20}{20 + 4 \cdot 8} = \frac{20}{52} = \frac{5}{13} \approx 38{,}5\,\%$

G 17

a) Exponentialgleichung

$2^x = 64$

$x = \log_2(64) = 6$

b) Potenzgleichung (lineare Gleichung)

$7t - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} + 3t \qquad | + \frac{7}{4} - 3t$

$4t = \frac{8}{4} \qquad | : 4$

$t = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

c) Potenzgleichung

$2x^5 + 6 = 4 \qquad | - 6$

$2x^5 = -2 \qquad | : 2$

$x^5 = -1$

$x = -\sqrt[5]{1} = -1$

d) Exponentialgleichung

$4 \cdot 6^x = 20 \qquad | : 4$

$6^x = 5$

$x = \log_6(5) \approx 0{,}898$

e) Potenzgleichung

$3t^4 = 243 \qquad | : 3$

$t^4 = 81$

$t_1 = \sqrt[4]{81} = 3,\ t_2 = -\sqrt[4]{81} = -3$

f) Potenzgleichung

$10 - \frac{1}{2}x^3 = -2 \qquad | - 10$

$-\frac{1}{2}x^3 = -12 \qquad | \cdot (-2)$

$x^3 = 24$

$x = \sqrt[3]{24} \approx 2{,}884$

g) Weder Exponentialgleichung noch Potenzgleichung

$x - 2 = 3x^{-1} \qquad | - 3x^{-1}$

$x - 2 - 3x^{-1} = 0 \qquad | \cdot x \ (x \neq 0)$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$

$x_1 = 1 - 2 = -1,\ x_2 = 1 + 2 = 3$

h) Exponentialgleichung

$3^{t+1} - 43 = 200 \qquad | + 43$

$3^{t+1} = 243$

$t + 1 = \log_3(243) = 5 \qquad | - 1$

$t = 4$

Seite 81

6

a)

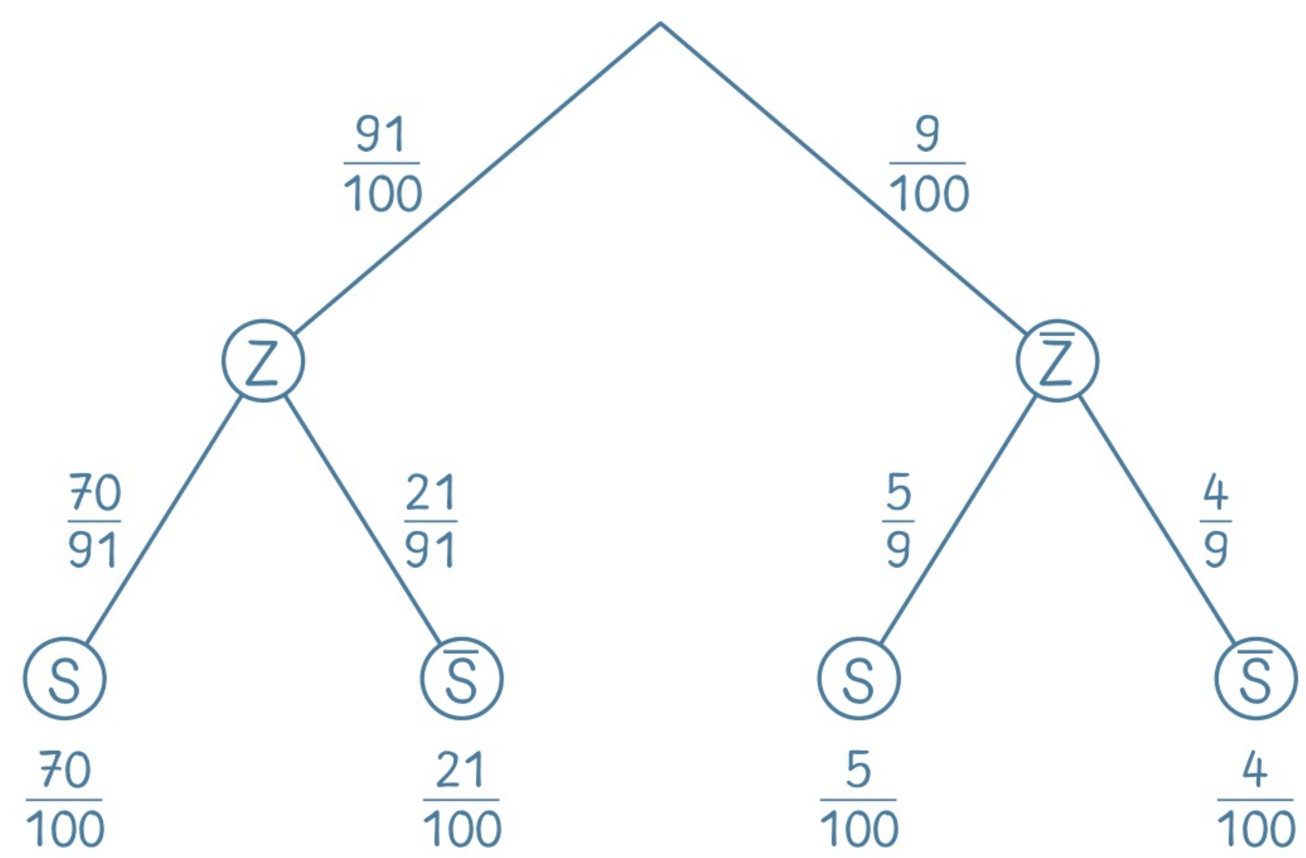
	Z	$\overline{Z}$	
S	**70**	5	75
$\overline{S}$	**21**	**4**	**25**
	91	9	100

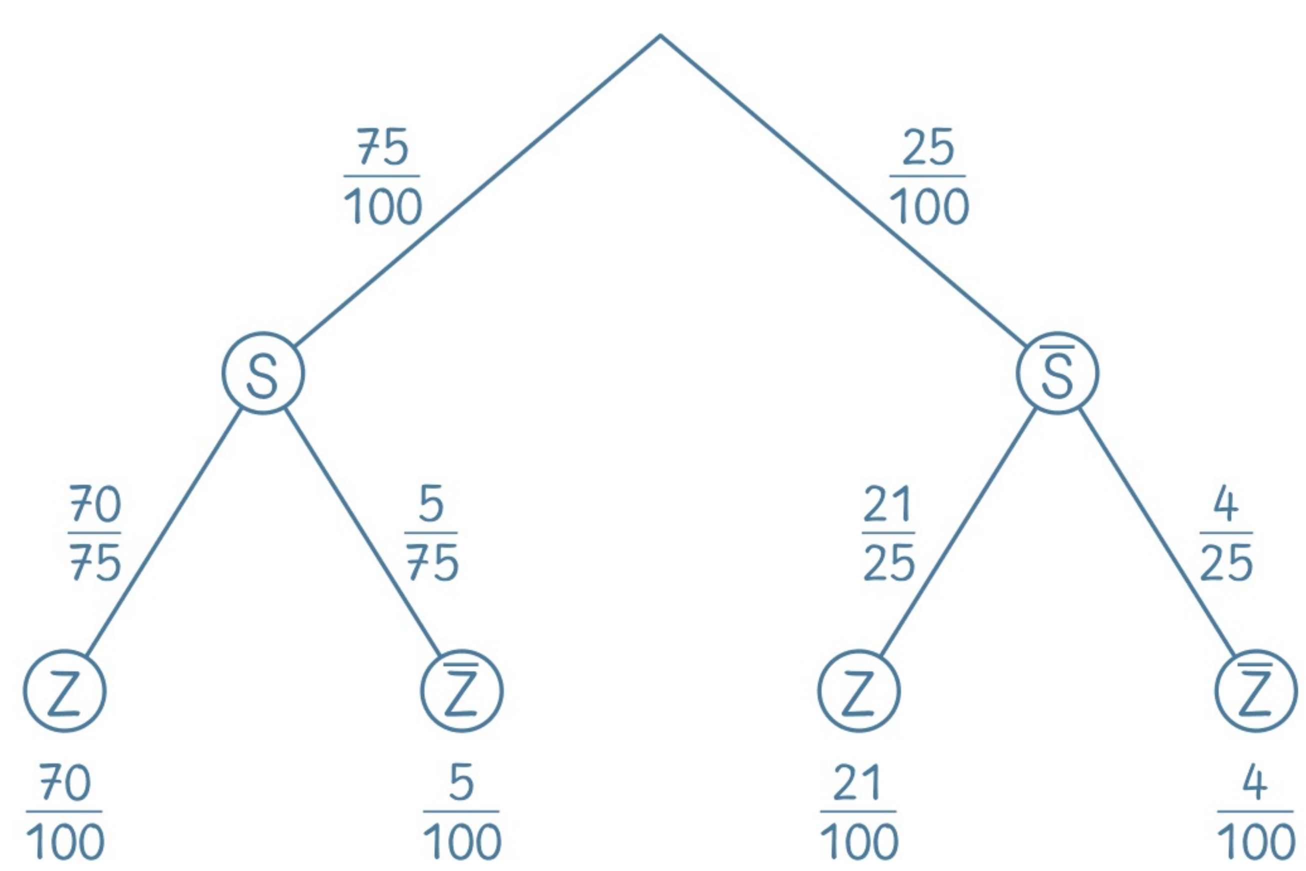
b) (1) $P(S \cap \overline{Z}) = \frac{5}{100} = 5\,\%$

(2) $P_S(\overline{Z}) = \frac{|S \cap \overline{Z}|}{|S|} = \frac{5}{75} = \frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6} = 6{,}\overline{6}\,\%$

(3) $P_{\overline{Z}}(S) = \frac{|S \cap \overline{Z}|}{|\overline{Z}|} = \frac{5}{9} = 0{,}\overline{5} = 55{,}\overline{5}\,\%$

c)



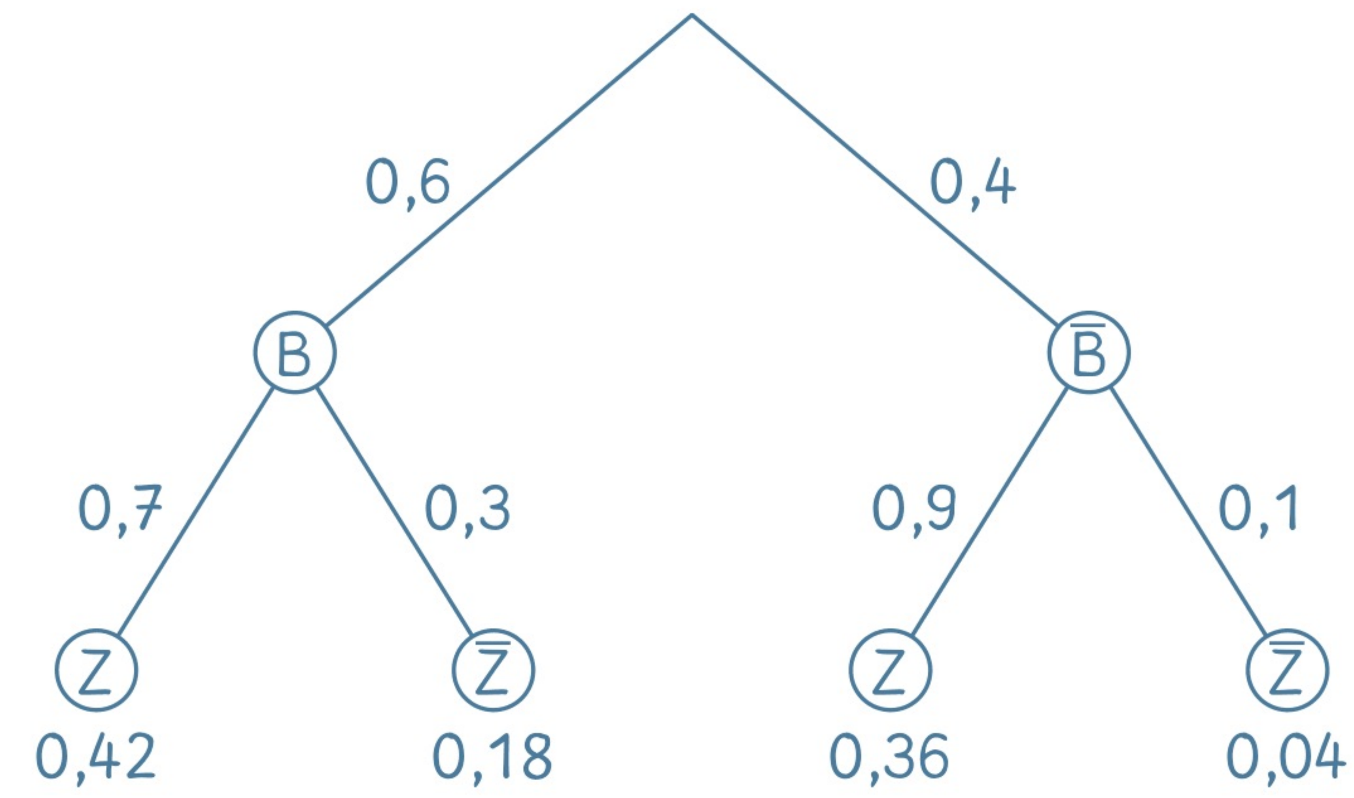


Seite 83

14

$P(B \cap Z) = 70\,\%$ von $60\,\% = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 = 42\,\%$
$P(\overline{B} \cap Z) = 90\,\%$ von $40\,\% = 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 0{,}36 = 36\,\%$

	Z	$\overline{Z}$	
B	**42 %**	**18 %**	60 %
$\overline{B}$	**36 %**	**4 %**	40 %
	78 %	**22 %**	100 %



a) Aus der Vierfeldertafel: $P(\overline{Z}) = 22\,\%$.
Aus dem Baumdiagramm:
$P(\overline{Z}) = P(B \cap \overline{Z}) + P(\overline{B} \cap \overline{Z}) = 0{,}18 + 0{,}04 = 0{,}22$.

b) Aus der Vierfeldertafel: $P_{\overline{Z}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{Z})}{P(\overline{Z})} = \frac{18\,\%}{22\,\%} = \frac{9}{11} \approx 81{,}8\,\%$.

Aus dem Baumdiagramm:
$P_{\overline{Z}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{Z})}{P(\overline{Z})} = \frac{P(B \cap \overline{Z})}{P(B \cap \overline{Z}) + P(\overline{B} \cap \overline{Z})} = \frac{0{,}18}{0{,}18 + 0{,}04} = \frac{0{,}18}{0{,}22} = \frac{9}{11} \approx 81{,}8\,\%$.

c) Es gilt $\frac{0{,}4 \cdot 0{,}9}{0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}9} = \frac{P(\overline{B} \cap Z)}{P(B \cap Z) + P(\overline{B} \cap Z)} = \frac{P(\overline{B} \cap Z)}{P(Z)} = P_Z(\overline{B})$.
Also steht der Term für die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine anrufende Person, die zufrieden ist, von Laura beraten worden ist.

G 16

a) Preis vor acht Jahren (die 20 % beziehen sich auf den Grundwert 1,50 €):
80 % von 1,50 € = 0,8 · 1,50 € = 1,20 €.
Preissteigerung in den letzten acht Jahren (der Grundwert ist hier 1,20 €):
$\frac{1{,}50\,€ - 1{,}20\,€}{1{,}20\,€} = \frac{0{,}3}{1{,}2} = \frac{1}{4} = 25\,\%$.
Preis in acht Jahren (der Grundwert ist hier wieder 1,50 €):
125 % von 1,50 € = 1,25 · 1,50 € = 1,875 € ≈ 1,90 €.

b) $V_{vorher} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \left(\frac{6\,cm}{2}\right)^3 = 36\,\pi\,cm^3$

$V_{nachher} = V_{unten} + V_{oben} = 0{,}5 \cdot 36\,\pi\,cm^3 + 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \left(\frac{5\,cm}{2}\right)^3$
$= \frac{341}{12}\pi\,cm^3$

$\frac{\frac{341}{12}\pi\,cm^3}{36\,\pi\,cm^3} = \frac{341}{432} \approx 79\,\%$

Seite 87

5

$\frac{2}{3}$ von $2250 = \frac{2}{3} \cdot 2250 = 1500$

46 % von 6250 = 2875

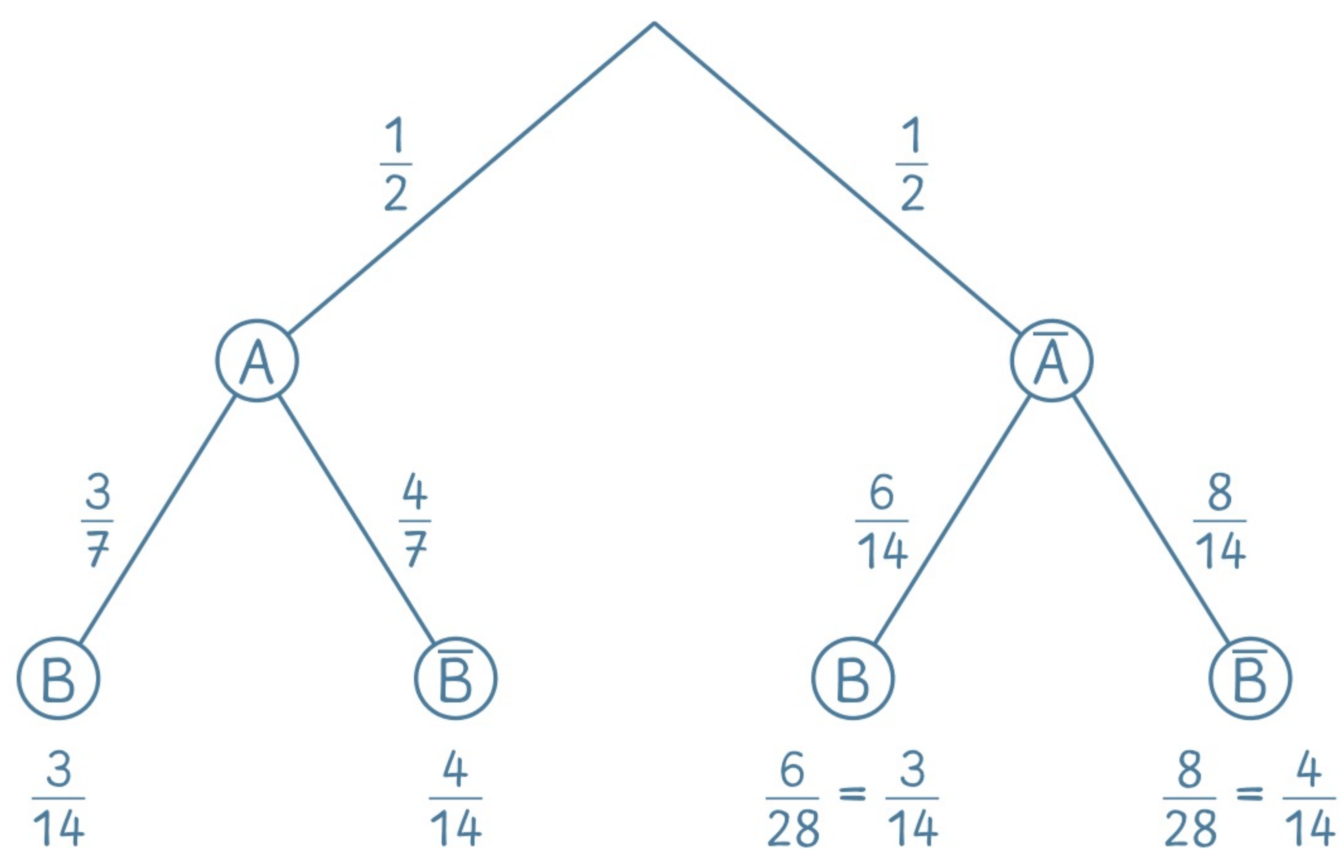
	B	$\overline{B}$	
A	1500	**750**	2250
$\overline{A}$	**1125**	2875	**4000**
	2625	**3625**	6250

$P(A) = \frac{2250}{6250} = 0{,}36$, $P(B) = \frac{2625}{6250} = 0{,}42$, $P(A \cap B) = \frac{1500}{6250} = 0{,}24$
Es gilt $P(A) \cdot P(B) = 0{,}36 \cdot 0{,}42 = 0{,}1512 \neq 0{,}24 = P(A \cap B)$.
Damit sind die Ereignisse A und B stochastisch abhängig.

Seite 90

17

a)



Es gilt $P(B) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} = P_A(B)$.
Daher sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.
Da A und B stochastisch unabhängig sind, müssen auch $\overline{A}$ und $\overline{B}$ stochastisch unabhängig sein. Rechnerischer Nachweis:
$P(\overline{B}) = \frac{4}{14} + \frac{4}{14} = \frac{8}{14} = P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

b) (1) Wenn von den sechs zusätzlichen roten Kugeln zwei in den schwarzen und vier in den weißen Strumpf gesteckt werden, bleiben A und B stochastisch unabhängig, denn bei sechs roten und drei blauen Kugeln im schwarzen Strumpf bzw. zwölf roten und sechs blauen Kugeln im weißen Strumpf gilt $P_{\overline{A}}(B) = \frac{6}{18} = \frac{3}{9} = P_A(B)$.

(2) Werden alle roten Kugeln in den schwarzen Strumpf gesteckt, sind A und B stochastisch abhängig, denn dann würde gelten: $P_{\overline{A}}(B) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \neq P_A(B) = \frac{3}{13}$.

Anmerkung: Für alle Verteilungen außer „von den sechs zusätzlichen roten Kugeln werden zwei in den schwarzen und vier in den weißen Strumpf gesteckt" sind A und B stochastisch abhängig:

Anzahl zusätzlicher roter Kugeln im schwarzen Strumpf	6	5	4	3	2	1	0
Anzahl roter | blauer Kugeln im schwarzen Strumpf	10 | 3	9 | 3	8 | 3	7 | 3	6 | 3	5 | 3	4 | 3
$P_A(B)$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{7}$
Anzahl zusätzlicher roter Kugeln im weißen Strumpf	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl roter | blauer Kugeln im weißen Strumpf	8 | 6	9 | 6	10 | 6	11 | 6	12 | 6	13 | 6	14 | 6
$P_{\overline{A}}(B)$	$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$	$\frac{6}{17}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
Stochastisch abhängig?	ja	ja	ja	ja	nein	ja	ja

G 19

Ohne Lösungsformel:

(2) $\frac{1}{2}t = \frac{1}{4}t^2 \quad | -\frac{1}{2}t$
$0 = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t$
$0 = \frac{1}{4}t(t-2)$
$t_1 = 0,\ t_2 = 2$

(4) $6x + 5x^2 = x^2 \quad | -x^2$
$6x + 4x^2 = 0$
$4x(1{,}5 + x) = 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = -1{,}5$

(5) $2(1-3x)(x+2) = 0$
$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -2$

(6) $0 = 4(2 - 0{,}25t)^2$
$0 = 2 - 0{,}25t \quad | +0{,}25t$
$0{,}25t = 2 \quad | \cdot 4$
$t = 8$

Mit Lösungsformel:

(1) $x^2 + 2x = 5 \quad | -5$
$x^2 + 2x - 5 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$
$x_1 = -1 - \sqrt{6} \approx -3{,}45,\ x_2 = -1 + \sqrt{6} \approx 1{,}45$

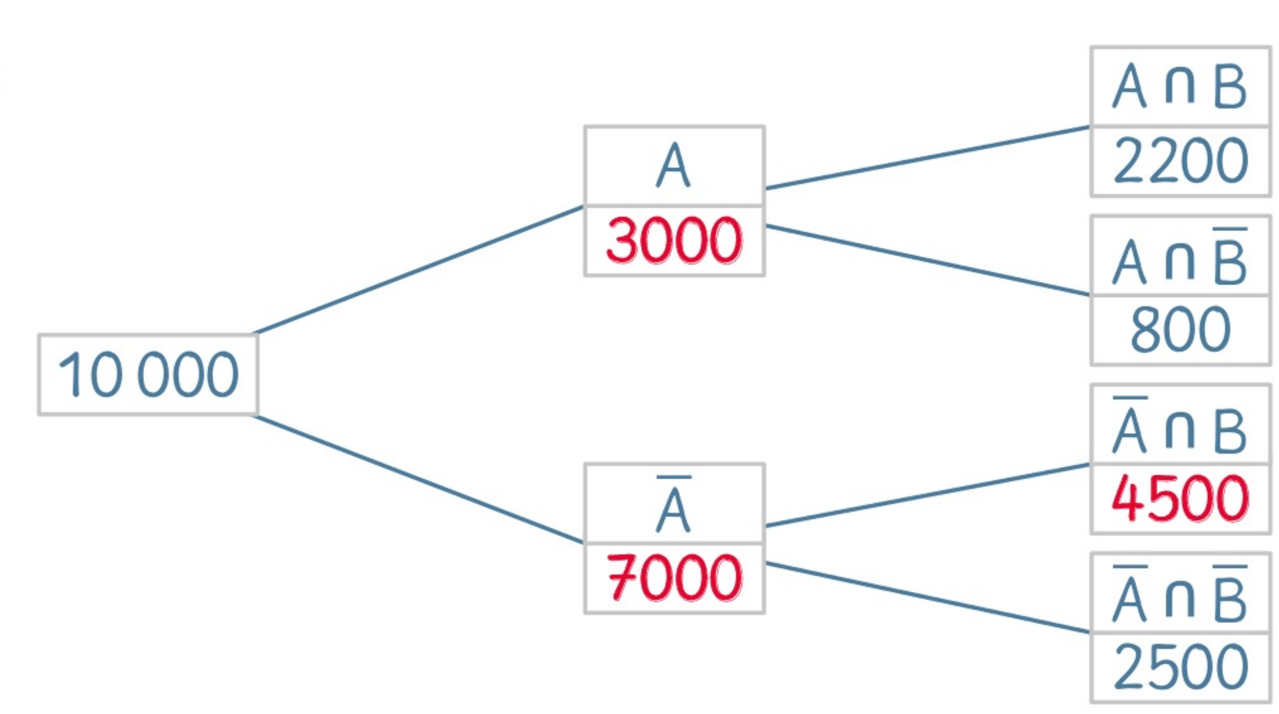
(3) $\frac{1}{5}(x^2 - 4x + 2) = -\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{2}{5} = -\frac{1}{5} \quad | +\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} = 0 \quad | \cdot 5$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$
$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

(7) $(2x-2)(x+2) = 2$
$2x^2 + 4x - 2x - 4 = 2 \quad | -2$
$2x^2 + 2x - 6 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$
$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \approx -2{,}30,\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \approx 1{,}30$

Seite 97

1

a)



b) $P_A(\overline{B}) = \frac{|A \cap \overline{B}|}{|A|} = \frac{800}{3000} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

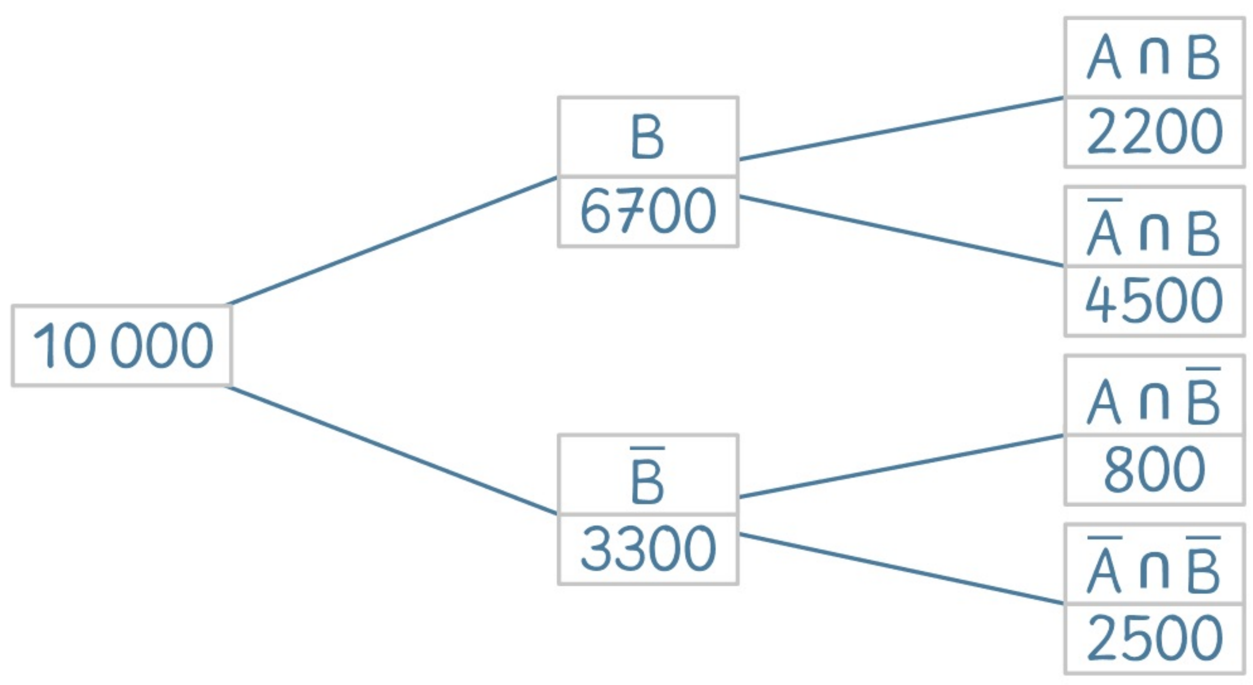
$P_A(B) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{2200}{3000} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{|\overline{A} \cap B|}{|\overline{A}|} = \frac{4500}{7000} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$

c)

	A	$\overline{A}$	
B	2200	4500	6700
$\overline{B}$	800	2500	3300
	3000	7000	10 000

d)



e) $P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2200}{6700} = \frac{22}{67}$

$P_B(\overline{A}) = \frac{|\overline{A} \cap B|}{|B|} = \frac{4500}{6700} = \frac{45}{67}$

$P_{\overline{B}}(A) = \frac{|A \cap \overline{B}|}{|\overline{B}|} = \frac{800}{3300} = \frac{8}{33}$

$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{|\overline{A} \cap \overline{B}|}{|\overline{B}|} = \frac{2500}{3300} = \frac{25}{33}$

2

a)

	K	$\overline{K}$	
S	20	28	48
$\overline{S}$	4	68	72
	24	96	120

b) (1) $P(K) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

(2) $P(K \cap S) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

(3) $P_S(K) = \frac{|K \cap S|}{|S|} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$

3

	Y	$\overline{Y}$	
S	0,26	0,42	0,68
$\overline{S}$	0,02	0,3	0,32
	0,28	0,72	1

$P(Y) = 0{,}28 = 28\,\%$

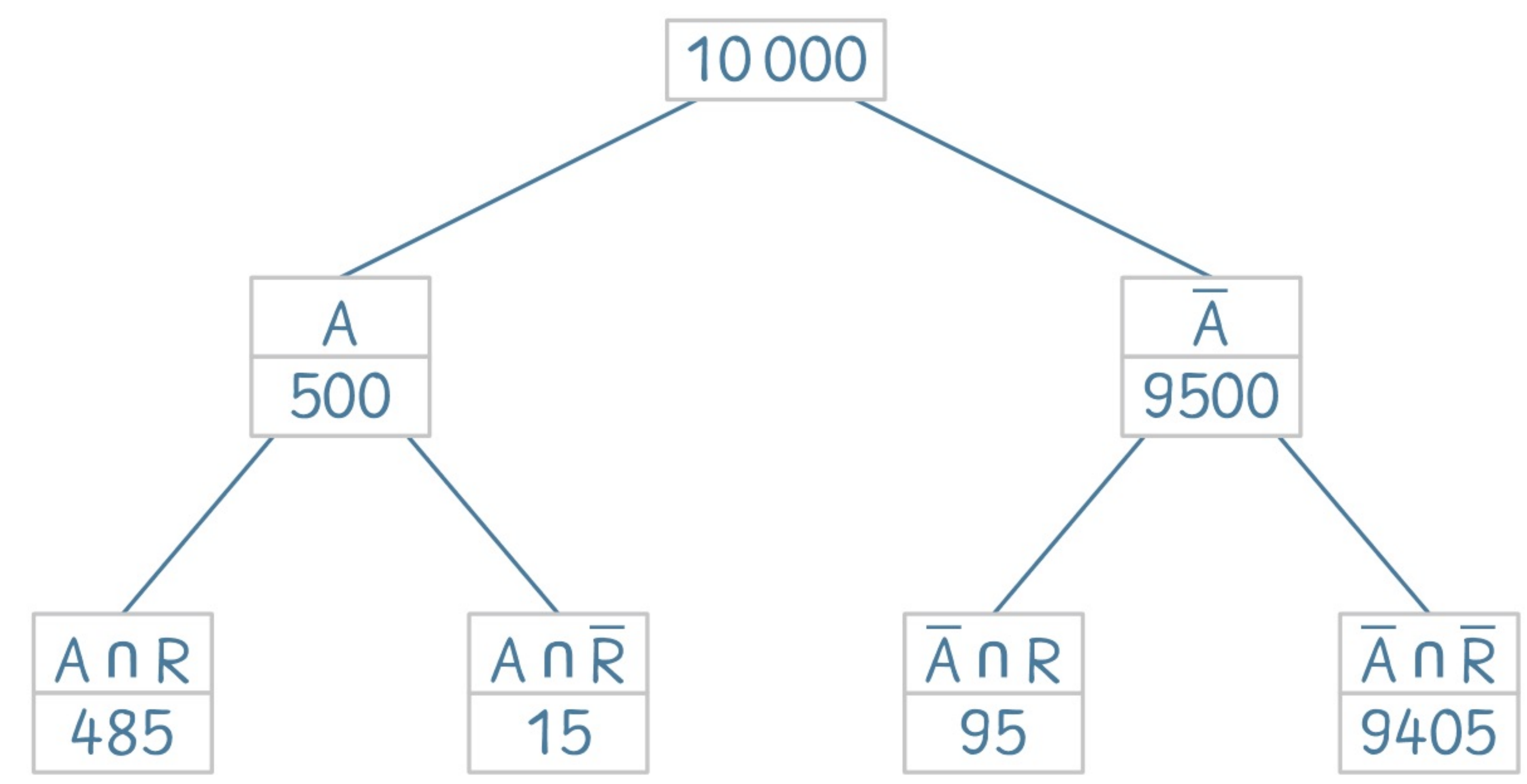
$P_S(Y) = \frac{0{,}26}{0{,}68} \approx 38{,}2\,\%$

Da $P_S(Y) \neq P(Y)$ gilt, sind S und Y stochastisch abhängig. Da unter denjenigen, die den Spitzenkandidaten der Y-Partei kannten, mit etwa 38,2 % ein deutlich höherer Anteil die Y-Partei wählte als unter der Gesamtheit der Befragten, hing das Wahlverhalten der Befragten mit der Kenntnis des Spitzenkandidaten zusammen. Es ist denkbar, dass die Befragten, die die Y-Partei wählten, sich mit der Y-Partei mehr beschäftigten und deswegen den Spitzenkandidaten der Partei eher kannten. Andererseits ist es auch möglich, dass der Spitzenkandidat sympathisch oder besonders kompetent auf die Personen wirkte, die ihn kannten oder seine Reden hörten, und dass diese Befragten deswegen eher die Y-Partei wählten.

4

a) $P(A \cap R) = 0{,}97 \cdot 0{,}05 = 0{,}0485$
$P(\overline{A} \cap R) = 0{,}01 \cdot 0{,}95 = 0{,}0095$

	A	$\overline{A}$	
R	0,0485	0,0095	0,058
$\overline{R}$	0,0015	0,9405	0,942
	0,05	0,95	1



b) $P_R(A) = \frac{|A \cap R|}{|R|} = \frac{|A \cap R|}{|A \cap R| + |\overline{A} \cap R|} = \frac{485}{485 + 95} = \frac{485}{580} = \frac{97}{116} \approx 83{,}6\,\%$

c) (1) $P(A \cap \overline{R}) = \frac{15}{10\,000} = \frac{3}{2000} = 0{,}15\,\%$

(2) $P_{\overline{R}}(\overline{A}) = \frac{|\overline{A} \cap \overline{R}|}{|\overline{R}|} = \frac{|\overline{A} \cap \overline{R}|}{|\overline{A} \cap \overline{R}| + |A \cap \overline{R}|} = \frac{9405}{9405 + 15} = \frac{9405}{9420} = \frac{627}{628} \approx 99{,}8\,\%$

d) $P_R(\overline{A}) = \frac{|\overline{A} \cap R|}{|R|} = \frac{|\overline{A} \cap R|}{|A \cap R| + |A \cap R|} = \frac{95}{95 + 485} = \frac{95}{580} = \frac{19}{116} \approx 16{,}4\,\%$

$\frac{19}{116} \cdot 1000 \approx 163{,}79$

Von 1000 reklamierten Lampen funktionieren etwa 164.

5

	H	$\overline{H}$	
L	7	1	8
$\overline{L}$	9	11	20
	16	12	28

$P(H) \cdot P(L) = \frac{16}{28} \cdot \frac{8}{28} = \frac{8}{49} \approx 16{,}3\,\%$

$P(H \cap L) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 25\,\%$

Folglich gilt $P(H) \cdot P(L) \neq P(H \cap L)$ und H und L sind stochastisch abhängig.

Da $P_L(H) = \frac{|H \cap L|}{|L|} = \frac{7}{8} = 87{,}5\,\%$ deutlich größer ist als $P_{\overline{L}}(H) = \frac{|H \cap \overline{L}|}{|\overline{L}|} = \frac{9}{20} = 45\,\%$, ist Hermine an Tagen mit Leistungsnachweis mit höherer Wahrscheinlichkeit anwesend gewesen als an Tagen ohne Leistungsnachweis. Möglicherweise ist Hermine an Tagen mit Leistungsnachweis in die Schule gegangen, obwohl es ihr nicht gut ging.

IV Lokales und globales Differenzieren

Seite 102

4

a) $[0; 2]$: $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-1 - 3}{2} = -2$

$[-2; -1]$: $\frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{2 - (-1)}{1} = 3$

Alternative: Anlegen eines Lineals als Sekante und Ablesen der Steigung

b) Individuelle Lösung, z. B.: $[-1; 1]$.
(Die Sekante muss die Steigung 0 haben, d. h., man muss die Intervallgrenzen so wählen, dass die Werte symmetrisch zur y-Achse liegen.)

5

$[1; 2]$: $\frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{4}$

$[1; 1{,}5]$: $\frac{g(1{,}5) - g(1)}{1{,}5 - 1} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$

Seite 104

16

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht der Fahrstuhl. In den ersten sechs Sekunden beschleunigt der Fahrstuhl und fährt nach oben. Danach fährt er bis zum Zeitpunkt $t = 13$ mit konstanter Geschwindigkeit aufwärts. In den folgenden drei Sekunden bremst der Fahrstuhl ab und hält an. In den zehn Sekunden zwischen $t = 16$ und $t = 26$ steht er still und anschließend beschleunigt er wieder innerhalb von drei Sekunden und fährt nach unten. Er fährt drei Sekunden lang mit konstanter Geschwindigkeit abwärts und bremst dann in den letzten vier Sekunden ab, bis er zum Zeitpunkt $t = 36$ wieder steht.

b) $[0; 16]$: $\frac{10\,\text{m} - 0\,\text{m}}{16\,\text{s} - 0\,\text{s}} = 0{,}625\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$[16; 26]$: $\frac{10\,\text{m} - 10\,\text{m}}{26\,\text{s} - 16\,\text{s}} = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$[26; 36]$: $\frac{5\,\text{m} - 10\,\text{m}}{36\,\text{s} - 26\,\text{s}} = -0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die Werte geben die Durchschnittsgeschwindigkeit im gegebenen Zeitintervall an. Ein negativer Wert bedeutet, dass sich der Fahrstuhl nach unten bewegt.

c) Der Fahrstuhl braucht weniger als 80 s, da in Pauls Überlegung der Fahrstuhl auf der Fahrt ins 20. Stockwerk fünfmal bremst und wieder beschleunigt, die Tür sich aber nicht dabei öffnet. Falls Paul meint, dass in der Fahrt ein Zwischenhalt dabei ist, sollte er dies in seiner Lösung auch angeben.
Die Zeit für eine Direktfahrt in den 20. Stock berechnet sich wie folgt:
20. Stock: $10\,\text{m} \cdot 5 = 50\,\text{m}$
Anfahren: $2{,}5\,\text{m}$ (in 6 s erreichte Höhe)
Abbremsen: $1{,}5\,\text{m}$ (in 3 s erreichte Höhe)
Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit $v = \frac{6}{7}\frac{\text{m}}{\text{s}}$:
$(50\,\text{m} - 2{,}5\,\text{m} - 1{,}5\,\text{m})$: $\frac{6}{7}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 53{,}\overline{6}\,\text{s} \approx 54\,\text{s}$
Insgesamt braucht der Aufzug für 20 Stockwerke ungefähr $54\,\text{s} + 6\,\text{s} + 3\,\text{s} = 63\,\text{s}$.

G 18

a) Substitution: $x^2 = z$.
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$ oder

$z_{1,2} = -\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$

$z_1 = 4$ und $z_2 = 1$
Aus $x^2 = 4$ folgen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.
Aus $x^2 = 1$ folgen $x_3 = -1$ und $x_4 = 1$.

b) Substitution: $t^2 = z$.
$t^4 - 2t^2 - 8 = 0 \Rightarrow z^2 - 2z - 8 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2}$ oder

$z_{1,2} = -\left(-\frac{2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)} = 1 \pm 3$

$z_1 = 4$ und $z_2 = -2$
Aus $t^2 = 4$ folgen $t_1 = -2$ und $t_2 = 2$.
Aus $t^2 = -2$ folgen keine weiteren Lösungen für t.

c) Substitution: $x^2 = z$.
$\frac{1}{2}x^4 + 16 = 9x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}z^2 - 9z + 16 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 9 \pm 7$

$z_1 = 16$ und $z_2 = 2$
Aus $x^2 = 16$ folgen $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$.
Aus $x^2 = 2$ folgen $x_3 = -\sqrt{2}$ und $x_4 = \sqrt{2}$.

d) Substitution: $x^2 = z$.
$1{,}5x^4 - \frac{x^2}{2} - 4 = 0 \Rightarrow 1{,}5z^2 - 0{,}5z - 4 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-0{,}5) \pm \sqrt{(-0{,}5)^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{0{,}5 \pm \frac{\sqrt{97}}{2}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{6}$

$z_1 = \frac{1 + \sqrt{97}}{6}$ und $z_2 = \frac{1 - \sqrt{97}}{6}$

Aus $x^2 = \frac{1 + \sqrt{97}}{6}$ folgen $x_1 = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{97}}{6}} \approx -1{,}34$ und $x_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{97}}{6}} \approx 1{,}34$.

Aus $x^2 = \frac{1 - \sqrt{97}}{6} \approx -1{,}47$ folgen keine weiteren Lösungen für x.

Seite 109

8

a) $f'(-2) \approx -10$ $\quad f'(-1) \approx -2$ $\quad f'(2) \approx 1$

b) Positiv: $f'(0{,}5)$ und $f'(1)$.
Null: $f'(2{,}25)$.
Negativ: $f'(-1{,}75)$.

c) Man bestimmt, z. B. durch Anlegen eines Lineals, die Steigung der Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 0$.
Man erhält $f'(0) \approx 2$.

9

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{2 \cdot (-2 + h)^2 + 3(-2 + h) - 2}{h} = \frac{2 \cdot (4 - 4h + h^2) - 6 + 3h - 2}{h}$$
$$= \frac{8 - 8h + 2h^2 - 6 + 3h - 2}{h}$$
$$= \frac{2h^2 - 5h}{h} = \frac{h(2h - 5)}{h}$$
$$= 2h - 5$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} (2h - 5) = -5$$

Seite 111

21

a) Man bestimmt, z. B. durch Anlegen eines Lineals, die Steigungen der Tangenten an den Graphen in den Punkten (10:15 | 1000), (10:45 | 1500) und (11:15 | 1000) jeweils eine Tangente an den Graphen ein und liest deren Steigungen ab. Man erhält:

Momentane Änderungsrate um 10:15 Uhr: $\approx \frac{500\,\text{m}}{15\,\text{min}} = 33{,}\overline{3}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Momentane Änderungsrate um 10:45 Uhr: $\approx \frac{-500\,\text{m}}{15\,\text{min}} = -33{,}\overline{3}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Momentane Änderungsrate um 11:15 Uhr: $\approx \frac{-1000\,\text{m}}{15\,\text{min}} = -66{,}\overline{6}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

b) Man überpüft, an welchen Stellen die Tangente an den Graphen die kleinste bzw. die größte Steigung hat. Die größte Steigung ist etwa an der Stelle, die 10:05 Uhr entspricht, die kleinste Steigung etwa an der Stelle, die 11:20 Uhr entspricht. Damit ist die momentane Änderungsrate etwa um 10:05 Uhr am größten und etwa um 11:20 Uhr am kleinsten.

c) Die momentane Änderungsrate beschreibt die momentane Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit des Flugzeugs.

G 23

a) Exponentialgleichung

$-8 \cdot 4^t = -2 \qquad | : (-8)$

$4^t = \frac{1}{4}$

$t = -1$

b) Quadratische Gleichung

$(x-3)^2 = 4$

$x_1 - 3 = 2$ und $x_2 - 3 = -2$

$x_1 = 5$ und $x_2 = 1$

c) Potenzgleichung

$3x^4 - 5 = 4 \qquad | +5$

$3x^4 = 9 \qquad | :3$

$x^4 = 3$

$x_1 = \sqrt[4]{3}$ und $x_2 = -\sqrt[4]{3}$

d) Bruchgleichung

$\frac{1}{x-2} - 4 = \frac{2}{2x+4}$

$\frac{1-4(x-2)}{x-2} = \frac{2}{2x+4}$

$\frac{1-4x+8}{x-2} = \frac{2}{2x+4} \qquad | \cdot (x-2)\cdot(2x+4);\ x \neq 2,\ x \neq -2$

$(9-4x)(2x+4) = 2(x-2)$

$18x + 36 - 8x^2 - 16x = 2x - 4 \quad | -2x - 36$

$-8x^2 = -40$

$x^2 = 5$

$x_1 = -\sqrt{5}$ und $x_2 = \sqrt{5}$

e) Quadratische Gleichung

$\left(\frac{t}{2} + 2\right)\left(3 - \frac{t}{4}\right) = 0$

$\frac{t_1}{2} + 2 = 0$ und $3 - \frac{t_2}{4} = 0$

$\frac{t_1}{2} = -2$ und $\frac{t_2}{4} = 3$

$t_1 = -4$ und $t_2 = 12$

f) Lineare Gleichung

$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3-x}{6}$

$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}x \qquad | +\frac{1}{6}x - 1$

$\frac{2}{3}x = -\frac{1}{2} \qquad | : \frac{2}{3}$

$x = -\frac{3}{4}$

g) Bruchgleichung

$1 + 5x = x^{-1} \qquad | \cdot x;\ x \neq 0$

$x + 5x^2 = 1$

$5x^2 + x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 5\cdot(-1)}}{2\cdot 5} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10}$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{21}}{10}$ und $x_2 = \frac{-1+\sqrt{21}}{10}$

h) Biquadratische Gleichung

$3t^4 - 6t^2 = -3$

Substitution: $t^2 = z$.

$3z^2 - 6z + 3 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{6 \pm 0}{6}$

$z = 1$

Aus $t^2 = 1$ folgen $t_1 = -1$ und $t_2 = 1$

Seite 114

5

An den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 5$ ist f nicht differenzierbar.

6

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - 1 & \text{für } x \leq -2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2 - 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$

b) Da der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist, würde es genügen, entweder nur auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = -2$ oder nur auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 2$ zu untersuchen.

Untersuchung auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = -2$:

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\frac{1}{4}(-2+h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\frac{1}{4}(4 - 4h + h^2) - 1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1 - h + \frac{1}{4}h^2 - 1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{h\left(-1 + \frac{1}{4}h\right)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \left(-1 + \frac{1}{4}h\right) = -1.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\frac{1}{4}(-2+h)^2 + 1 - 0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\frac{1}{4}(4 - 4h + h^2) + 1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-1 + h - \frac{1}{4}h^2 + 1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h\left(1 - \frac{1}{4}h\right)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(1 - \frac{1}{4}h\right) = 1.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen, existiert der Differentialquotient an an der Stelle $x_0 = -2$ nicht und somit ist f an Stelle $x_0 = -2$ nicht differenzierbar.

Untersuchung auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 2$:

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-\frac{1}{4}(2+h)^2+1-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-\frac{1}{4}(4+4h+h^2)+1}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-1-h-\frac{1}{4}h^2+1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{h\left(-1-\frac{1}{4}h\right)}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \left(-1-\frac{1}{4}h\right) = -1.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\frac{1}{4}(2+h)^2-1-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\frac{1}{4}(4+4h+h^2)-1}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1+h+\frac{1}{4}h^2-1}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h\left(1+\frac{1}{4}h\right)}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(1+\frac{1}{4}h\right) = 1.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen, existiert der Differentialquotient an der Stelle $x_0 = 2$ nicht und somit ist f an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar.

Seite 115

14

$$H(t) = \begin{cases} 3{,}2 & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 3{,}2 - 5(t-1)^2 & \text{für } 1 < t \le 1{,}8 \\ 1{,}8 - 5(t-2{,}4)^2 & \text{für } 1{,}8 < t \le 3 \end{cases}$$

Untersuchung auf Differenzierbarkeit an der Stelle $t_0 = 1$:
Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{H(1+h)-H(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{3{,}2-3{,}2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{0}{h} = 0.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{H(1+h)-H(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{3{,}2-5(1+h-1)^2-3{,}2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{3{,}2-5h^2-3{,}2}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-5h^2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (-5h) = 0.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten übereinstimmen, existiert der Differentialquotient an der Stelle $t_0 = 1$ und somit ist H an der Stelle $t_0 = 1$ differenzierbar.
Untersuchung auf Differenzierbarkeit an der Stelle $t_0 = 1{,}8$:
Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{H(1{,}8+h)-H(1{,}8)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{3{,}2-5(1{,}8+h-1)^2-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{3{,}2-5(0{,}8+h)^2}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{3{,}2-5(0{,}64+1{,}6h+h^2)}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{3{,}2-3{,}2-8h-5h^2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{h(-8-5h)}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} (-8-5h) = -8.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{H(1{,}8+h)-H(1{,}8)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1{,}8-5(1{,}8+h-2{,}4)^2-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1{,}8-5(h-0{,}6)^2}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1{,}8-5(h^2-1{,}2h+0{,}36)}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1{,}8-5h^2+6h-1{,}8}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h(-5h+6)}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (-5h+6) = 6.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen, existiert der Differentialquotient an der Stelle $t_0 = 1{,}8$ nicht und somit ist H an der Stelle $t_0 = 1{,}8$ nicht differenzierbar.

15

Georgs Aussage ist falsch. Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert und somit kann man keine Aussage über die Differenzierbarkeit an dieser Stelle treffen.

G 17

a) $V = G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 50\,\text{cm}^3$

b) $V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (2\,\text{cm})^2 \cdot 9{,}3\,\text{cm} = 37{,}2\pi\,\text{cm}^3 \approx 116{,}87\,\text{cm}^3$

c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (2\,\text{cm})^2 \cdot 6\,\text{cm} = 8\pi\,\text{cm}^3 \approx 25{,}13\,\text{cm}^3$

G 18

a) $V = a \cdot b \cdot c = 11\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm} = 269{,}5\,\text{cm}^3$
Das Volumen beträgt $269{,}5\,\text{cm}^3$.

b) $d = \sqrt{(11\,\text{cm})^2 + (7\,\text{cm})^2 + (3{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{182{,}25\,\text{cm}^2} = 13{,}5\,\text{cm}$
Die Raumdiagonale ist 13,5 cm lang.

Seite 119

6

Mögliche Gründe dafür, dass g nicht die Ableitungsfunktion von f sein kann:

- Der Graph von f hat für $x < 1$ eine negative Steigung. Also müsste der Graph von g in diesem Bereich unterhalb der x-Achse verlaufen.
- Der Graph von f hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung 0. Also müsste der Graph von g bei $x = 1$ die x-Achse schneiden.
- Die Funktion g hat bei $x = -0{,}5$ eine Nullstelle, die Steigung des Graphen von f ist an dieser Stelle aber negativ.

Es sind weitere Gründe denkbar.

Mögliche Gründe dafür, dass f nicht die Ableitungsfunktion von g sein kann:

- Der Graph von g hat überall eine positive Steigung. Also müsste der Graph von f überall oberhalb der x-Achse verlaufen.
- Bei $x = 0$ und bei $x = 2$ hat f jeweils eine Nullstelle. Die Steigung des Graphen von g ist dort aber nicht null.
- Die Steigung des Graphen von g nimmt für größer werdende x-Werte ab. Der Graph von f ist aber nicht überall fallend.

Es sind weitere Gründe denkbar.

7

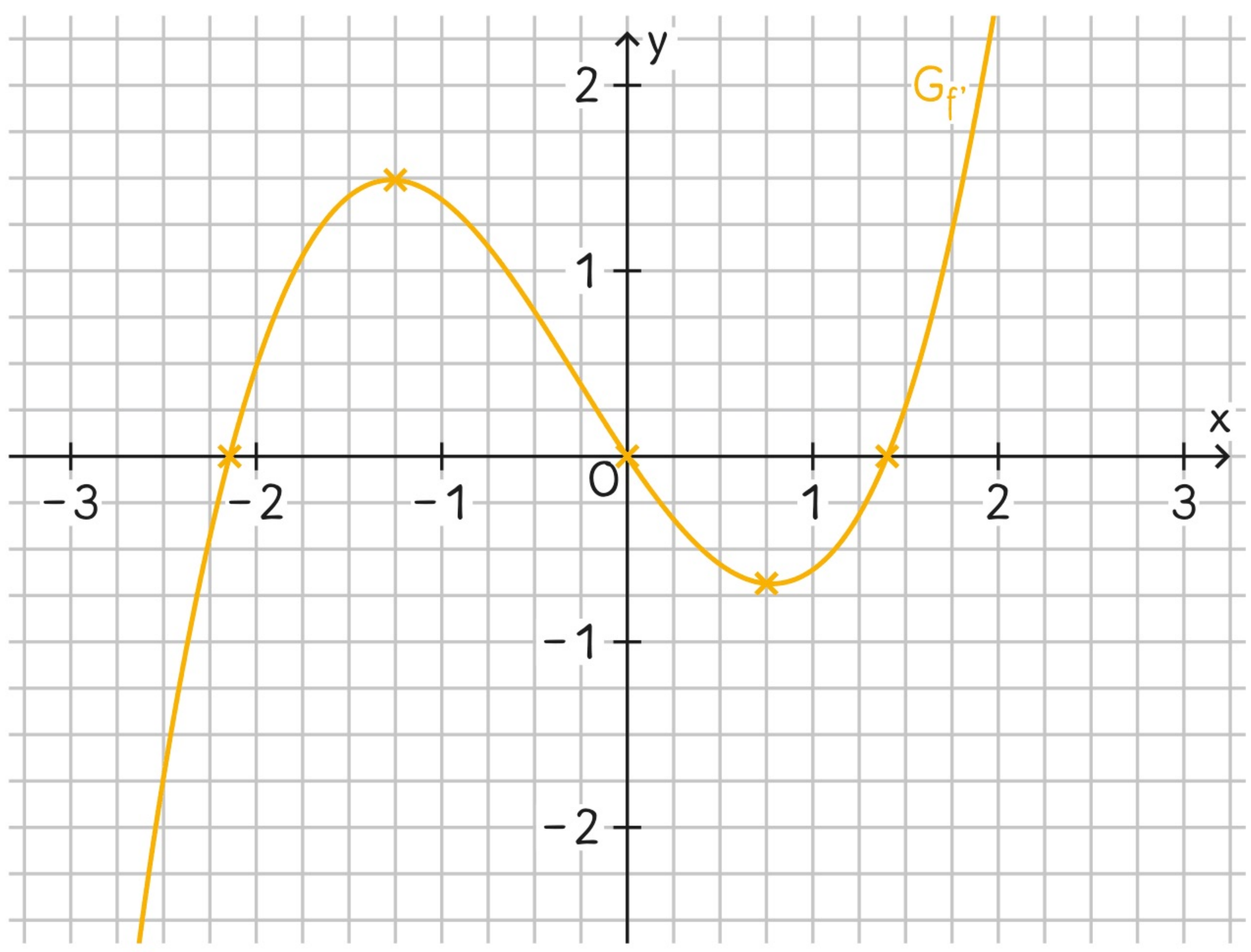
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{-3(x_0+h)^2-(-3x_0^2)}{h}=\frac{-3x_0^2-6x_0h-3h^2+3x_0^2}{h}=\frac{-6x_0h-3h^2}{h}$$
$$=\frac{h(-6x_0-3h)}{h}=-6x_0-3h$$

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}(-6x_0-3h)=-6x_0$

Da die Stelle x_0 beliebig gewählt ist, erhält man allgemein $f'(x)=-6x$.

Seite 121

19



Da an den Stellen $x_1\approx-2{,}2$, $x_2=0$ und $x_3\approx1{,}4$ die Steigung von G_f null ist, markiert man zunächst die Nullstellen der Ableitung f′.
Zwischen x_1 und x_2 steigt G_f, d.h., es gilt $f'(x)>0$.
Bei $x\approx-1{,}3$ hat G_f in der Umgebung von $x\approx-1{,}3$ seine größte Steigung. Also hat f′ an dieser Stelle den größten Funktionswert, $f'(-1{,}3)\approx1{,}5$.
Zwischen x_2 und x_3 fällt G_f, d.h., es gilt $f'(x)<0$.
Bei $x\approx0{,}75$ hat G_f in der Umgebung von $x\approx0{,}75$ seine kleinste Steigung. Also hat f′ an dieser Stelle den kleinsten Funktionswert, $f'(0{,}75)\approx-0{,}7$.
Damit kann man den Graphen im Bereich $x_1\le x\le x_3$ skizzieren.
Für $x<x_1$ fällt G_f, d.h., es gilt $f'(x)<0$ für $x<x_1$. Da die Steigung von G_f für kleiner werdende x-Werte immer mehr abnimmt, nehmen auch die Werte von f′ immer mehr ab.
Für $x>x_3$ steigt G_f, d.h., es gilt $f'(x)>0$ für $x>x_3$. Da die Steigung von G_f für größer werdende x-Werte immer mehr zunimmt, nehmen auch die Werte von f′ immer mehr zu.
Damit kann man den Graphen in den Bereichen $x<x_1$ und $x>x_3$ skizzieren.

20

a) $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{3(x_0+h)^2+(x_0+h)-(3x_0^2+x_0)}{h}$$
$$=\frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2+x_0+h-3x_0^2-x_0}{h}$$
$$=\frac{6x_0h+3h^2+h}{h}=\frac{h(6x_0+3h+1)}{h}$$
$$=6x_0+3h+1$$

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}(6x_0+3h+1)=6x_0+1$

Da die Stelle x_0 beliebig gewählt ist, erhält man allgemein $f'(x)=6x+1$.

b) $f'(a)=-2 \Rightarrow 6a+1=-2$
$6a=-3$
$a=-0{,}5$
$f(-0{,}5)=3(-0{,}5)^2-0{,}5=0{,}25$
$A(-0{,}5\,|\,0{,}25)$

c) $f'(c)=-5 \Rightarrow 6c+1=-5$
$6c=-6$
$c=-1$
$f(-1)=3(-1)^2-1=2$
$C(-1\,|\,2)$

G 22

a) $\sin 30°=\frac{a}{6\,\text{cm}} \Rightarrow a=6\,\text{cm}\cdot\sin(30°)=3\,\text{cm}$

$\cos 30°=\frac{b}{6\,\text{cm}} \Rightarrow b=6\,\text{cm}\cdot\cos(30°)=3\cdot\sqrt{3}\,\text{cm}\approx5{,}2\,\text{cm}$

bzw. $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(6\,\text{cm})^2-(3\,\text{cm})^2}=3\cdot\sqrt{3}\,\text{cm}\approx5{,}2\,\text{cm}$

b) $\cos 65°=\frac{4\,\text{cm}}{a} \Rightarrow a=4\,\text{cm}:\cos(65°)\approx9{,}46\,\text{cm}$

$\tan 65°=\frac{c}{4\,\text{cm}} \Rightarrow c=4\,\text{cm}\cdot\tan(65°)\approx8{,}58\,\text{cm}$

Seite 125

7

a) $f'(x)=2x^3-6x$
b) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

8

a) $f'(x)=5x^4+4x$
$f'(4)=5\cdot4^4+4\cdot4=1296$

b) $f'(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}$
$f'(4)=-\frac{3}{4}\cdot4-\frac{1}{6}=-3\frac{1}{6}=-\frac{19}{6}$

Seite 126

18

a) $f'(x)=12x-10=2$
$12x=12$
$x=1$

b) $f(x)=2x\cdot(x-1)^2=2x\cdot(x^2-2x+1)=2x^3-4x^2+2x$
$f'(x)=6x^2-8x+2=2$
$6x^2-8x=0$
$x(6x-8)=0$
$x_1=0$ und $x_2=\frac{4}{3}$

19

a) Die Aussage ist wahr. Da beim Ableiten einer ganzrationalen Funktion jeder Exponent der Funktionsvariablen um 1 kleiner wird als zuvor, werden aus den ungeraden Exponenten beim Ableiten gerade Exponenten.

b) Die Aussage ist wahr. Da sich beim Verschieben in y-Richtung die Steigung an einer Stelle nicht ändert, bleibt die Ableitungsfunktion gleich.
Alternativ: $g(x)=f(x)+a$ mit $a\in\mathbb{R}$. Da die Konstante beim Ableiten wegfällt, ist $g'(x)=f'(x)$.

c) Die Aussage ist falsch. Betrachtet man z.B. die Funktion f mit $f(x)=x^2+4$, so schneidet der Graph von f′ mit $f'(x)=2x$ an der Stelle $x=0$ die x-Achse. Die Funktion f hat aber keine Nullstellen, da ihr Graph oberhalb der x-Achse verläuft.

G 21

a) Koordinaten des Punktes P und $m = 3$ in $y = mx + t$ einsetzen ergibt:

$1 = 3 \cdot 2 + t$

$\Rightarrow\ t = -5$

$y = 3x - 5$

b) Koordinaten des Punktes P und $m = -1$ in $y = mx + t$ einsetzen ergibt:

$-2 = -1 \cdot 4 + t$

$\Rightarrow\ t = 2$

$y = -x + 2$

c) Koordinaten des Punktes P und $m = \frac{4}{3}$ in $y = mx + t$ einsetzen ergibt:

$0 = \frac{4}{3} \cdot (-3) + t$

$\Rightarrow\ t = 4$

$y = \frac{4}{3}x + 4$

d) Koordinaten des Punktes P und $m = -\frac{1}{2}$ in $y = mx + t$ einsetzen ergibt:

$2{,}5 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + t$

$\Rightarrow\ t = 4$

$y = -\frac{1}{2}x + 4$

Seite 129

7

$y = f(1) = -3;\ f'(x) = 6x^2$

$m_t = f'(1) = 6$

Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:

$-3 = 6 \cdot 1 + t$

$t = -9$

Tangentengleichung: $y = 6x - 9$.

Aus $\tan\alpha = 6$ folgt $\alpha \approx 80{,}5°$.

Seite 131

17

a) $y = f(-1) = -\frac{4}{3};\ f'(x) = x^2 - 2x$

$m_t = f'(-1) = 3$

Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:

$-\frac{4}{3} = 3 \cdot (-1) + t$

$t = \frac{5}{3}$

Tangentengleichung: $y = 3x + \frac{5}{3}$.

Steigung der Normalen: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$.

Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:

$-\frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + t$

$t = -\frac{5}{3}$

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

b) $m = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) = x^2 - 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x^2 - 2x - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{3}\sqrt{3}}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$ oder

$x_{1,2} = -\left(-\frac{2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$x_1 \approx -0{,}26$ und $x_2 \approx 2{,}26$

c) Damit die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + \frac{1}{3}$ eine Tangente an G_f ist, müssen die Gerade und der Graph an der Stelle $x = 1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung haben.

(1) $f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ ✓

(2) $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 = -\frac{2}{3}$

$y = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$ ✓

Die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + \frac{1}{3}$ ist Tangente an G_f an der Stelle $x = 1$.

18

$f(x) = 0{,}005x^3 - 0{,}5x^2 + 12{,}5x + 10$ mit $0 \le x \le 20$

$f'(x) = 0{,}015x^2 - x + 12{,}5$ mit $0 \le x \le 20$

Damit der Graph von f und der Graph der linearen Abnahme an der Stelle $x = 20$ knickfrei ineinander übergehen, müssen die Funktionswerte und die Werte der Ableitungen an der Stelle $x = 20$ übereinstimmen.

$f(20) = 100$

$m = f'(20) = -1{,}5$

$x = 20$, $y = 100$ und $m = -1{,}5$ in $y = mx + t$ einsetzen:

$100 = -1{,}5 \cdot 20 + t$

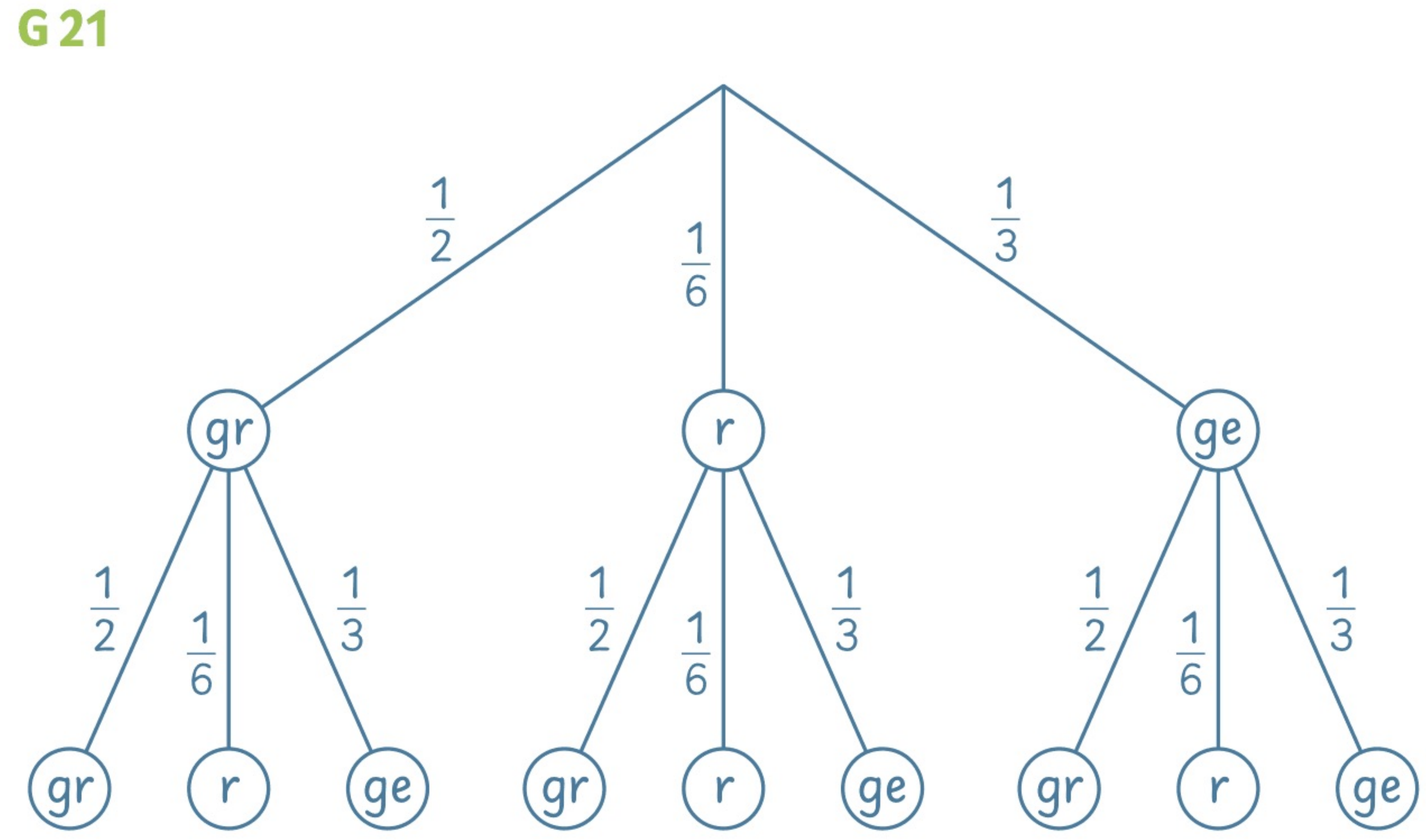
$\Rightarrow\ t = 130$

Gleichung des Graphen der linearen Abnahme: $y = -1{,}5x + 130$.

$$\begin{aligned} -1{,}5x + 130 &= 10 \\ -1{,}5x &= -120 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

Nach 80 Wochen, also 560 Tagen beträgt der tägliche Download genau zehn Spiele/Tag. Nach 561 Tagen würde die Firma Rhino-Flight das Spiel vom Markt nehmen.

G 21



$P(\text{„Mindestens einmal Rot."}) = 1 - P(\text{„Kein Rot."}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$

$= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

Seite 139

1

a) $f'(x) = -x + 3$

b) $f'(t) = 1{,}2t^3 - 3t$

c) $f(z) = z^2 - 8z + 15$
$f'(z) = 2z - 8$

d) $f'(x) = 3ax^2 - \frac{3}{2}a^2$

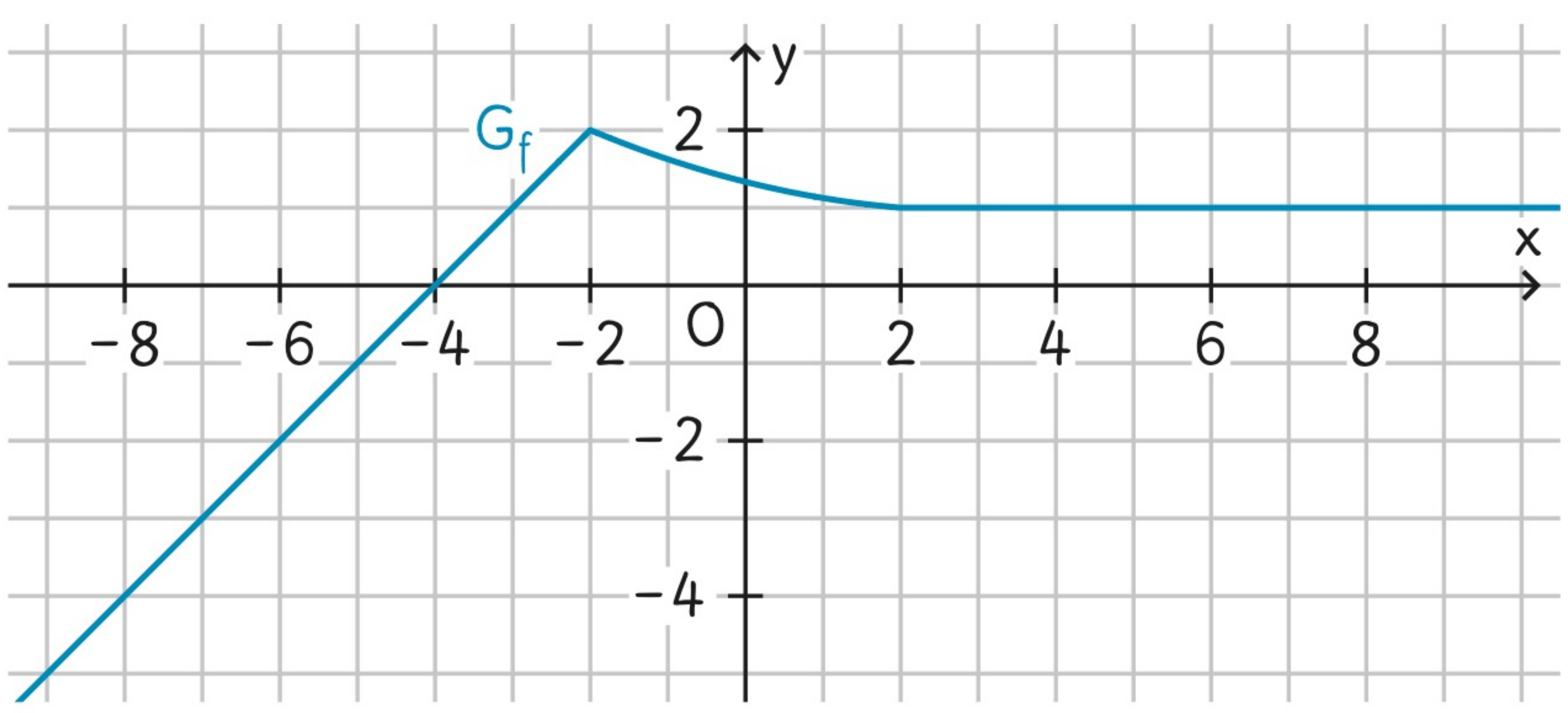
2

a) $[0; 2]$: $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}$
$[-2; 1{,}5]$: $\frac{f(1{,}5) - f(-2)}{1{,}5 - (-2)} = \frac{-0{,}5 - (-1)}{3{,}5} = \frac{0{,}5}{3{,}5} = \frac{1}{7}$

b) (1) Wahr, da der Graph von f an der Stelle $x = 1$ eine waagerechte Tangente besitzt und somit die Ableitung null ist.
(2) Falsch, da der Graph von f an der Stelle $x = -2$ steigt und somit die Ableitung positiv sein muss.
(3) Wahr, da der Graph von f im Intervall $[-0{,}5; 0{,}5]$ fällt und somit die Ableitung in diesem Intervall negativ ist.
(4) Wahr, denn der Graph von f hat im dargestellten Bereich zwei Stellen mit waagerechter Tangente und die Ableitung somit zwei Nullstellen.

3

Individuelle Lösung, z.B:



4

a) $[0; 2]$: $\frac{n(2) - n(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 120 + 500 - 500}{2 - 0} = -\frac{108}{2} = -54$
Die mittlere Änderungsrate während der ersten beiden Stunden beträgt $-54\frac{1}{h}$.

b) $n'(t) = 6t - 60 = -30$
$6t = 30$
$t = 5$
Nach 5h beträgt die momentane Änderungsrate der Pollenanzahl in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$.

5

(1) $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$; $f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 15 = -15$

(2) Steigung des Graphen im Punkt $A(5|f(5))$:
$f'(5) = -3 \cdot 5^2 + 18 \cdot 5 - 15 = -75 + 90 - 15 = 0$
$f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 - 25 = -125 + 225 - 75 - 25 = 0$
Somit ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(5|f(5))$ die x-Achse.

(3) $y = f(-1) = -(-1)^3 + 9(-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 25 = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$
$m_t = f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) - 15 = -3 - 18 - 15 = -36$
Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:
$0 = -36 \cdot (-1) + t$
$t = -36$
Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1|f(-1))$ lautet somit $y = -36x - 36$.

6

$y = f(-1) = -0{,}5$; $f'(x) = -8x^3 - 4{,}5x^2$
$m_t = f'(-1) = 3{,}5$
Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt:
$-0{,}5 = 3{,}5 \cdot (-1) + t$
$t = 3$
Tangentengleichung: $y = 3{,}5x + 3$.
Aus $\tan\alpha = 3{,}5$ folgt $\alpha \approx 74{,}1°$.

7

a) $x_0 = -2$
Linksseitiger Grenzwert:

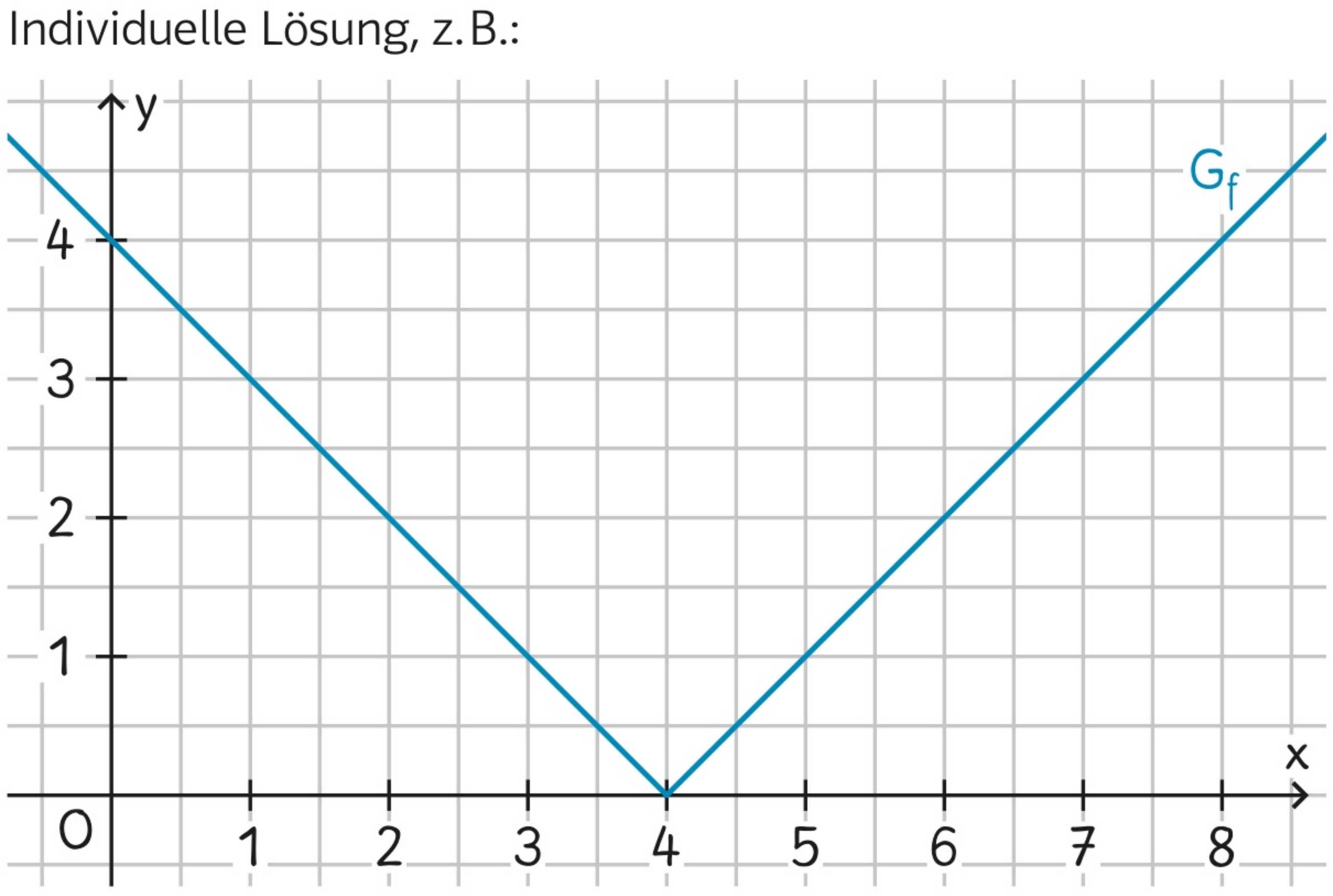
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{-(-2+h+2) - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{-h}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} (-1) = -1.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-2+h+2-0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h}{h}$$
$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} (1) = 1.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen, existiert der Differentialquotient an der Stelle $x_0 = -2$ nicht und somit ist f an der Stelle $x_0 = -2$ nicht differenzierbar.

b) Individuelle Lösung, z.B.:



8

Während der ersten 3,5 min fährt das Auto mit nahezu konstanter Geschwindigkeit, dann wird es langsamer, hält kurz an und fährt anschließend rückwärts. Bei ca. 4,6 min stoppt das Auto erneut kurz und fährt dann wieder vorwärts.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit in den dargestellten fünf Minuten beträgt etwa $\frac{3{,}2\,\text{km}}{5\,\text{min}} = \frac{3{,}2\,\text{km}}{\frac{1}{12}\text{h}} = 38{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Um zu beurteilen, ob drei Minuten nach Fahrtbeginn die Höchstgeschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ überschritten wird, legt man in dem Punkt mit $t = 3$ die Tangente an den Graphen und liest ihre Steigung ab. Es ergibt sich $m_t \approx \frac{0{,}5\,\text{km}}{0{,}5\,\text{min}} = \frac{0{,}5\,\text{km}}{\frac{1}{120}\text{h}} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Drei Minuten nach Fahrtbeginn wird also die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschritten.

V Anwendungen der Differentialrechnung

Seite 145

7

Die Funktion f ist streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty; -3]$ und für $x \in [0; 1]$.
Die Funktion f ist streng monoton abnehmend für $x \in [-3; 0]$ und für $x \in [1; +\infty[$.

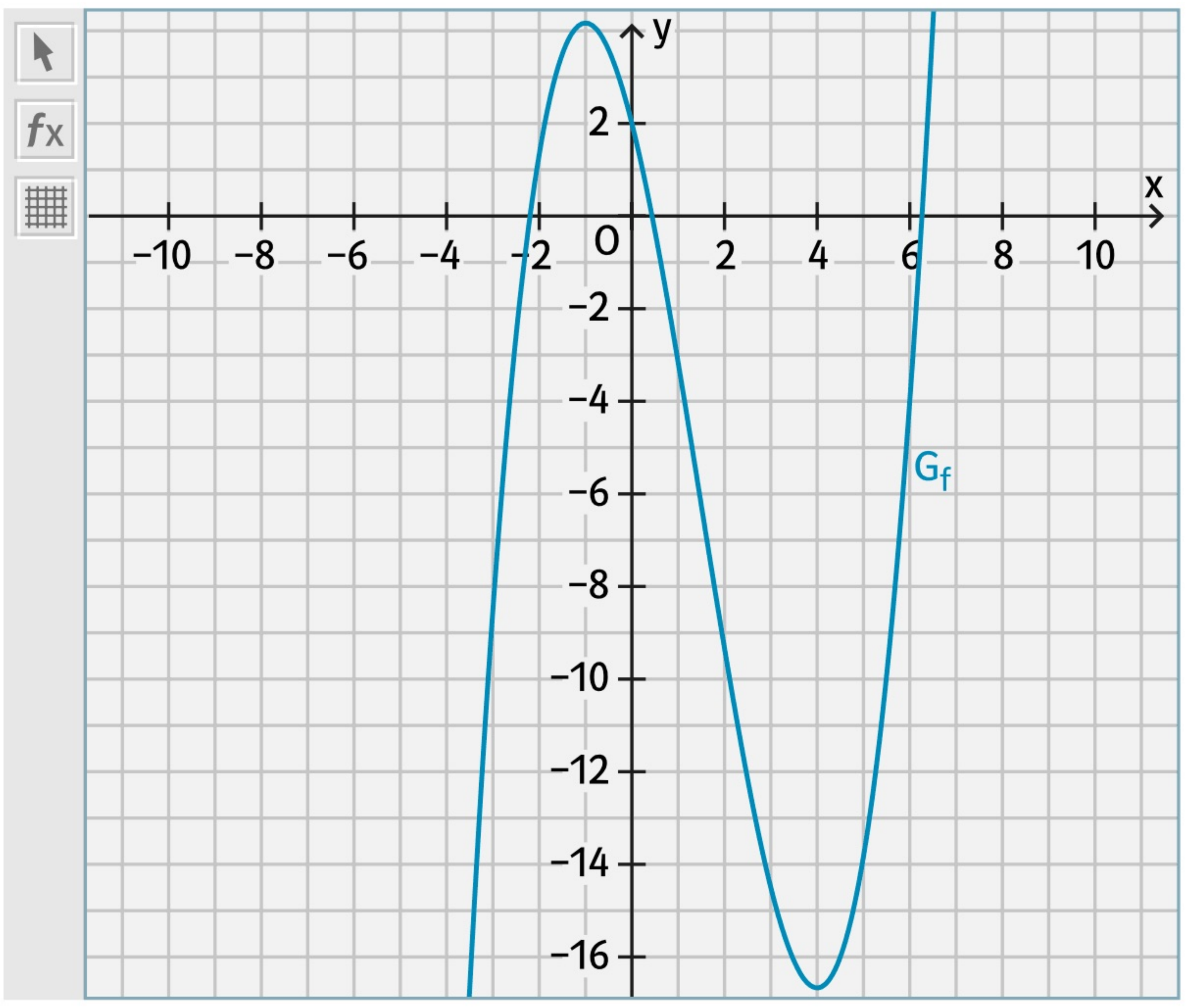
8

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2$

$f'(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$

Da $f'(x) > 0$ für $x < -1$ und für $x > 4$ ist, ist f streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty; -1]$ und für $x \in [4; +\infty[$.
Da $f'(x) < 0$ für $-1 < x < 4$ ist, ist f streng monoton abnehmend für $x \in [-1; 4]$.



Seite 146

14

a) Die Aussage ist falsch. Die Funktion f ist nicht streng monoton zunehmend für den gesamten Definitionsbereich. Die Aussage ist für $x \geq 0$ wahr, da f′ für $x > 0$ positiv und nur für $x = 0$ gleich null ist.

b) Die Aussage ist wahr. Da f für $x \in [0; +\infty[$ streng monoton zunehmend ist, muss der Funktionswert an der Stelle 1 größer als der Funktionswert an der Stelle 0 sein.

c) Die Aussage ist wahr. Da $f'(x) < 0$ für $x < 0$ ist, fällt G_f für $x \in [-1; 0]$ streng monoton.

d) Die Aussage ist falsch, da man mithilfe der Ableitung einer Funktion nicht auf die Lage von G_f im Koordinatensystem schließen kann. Es gilt: $f'(x)$ ist die Ableitung von $f(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

15

a) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$

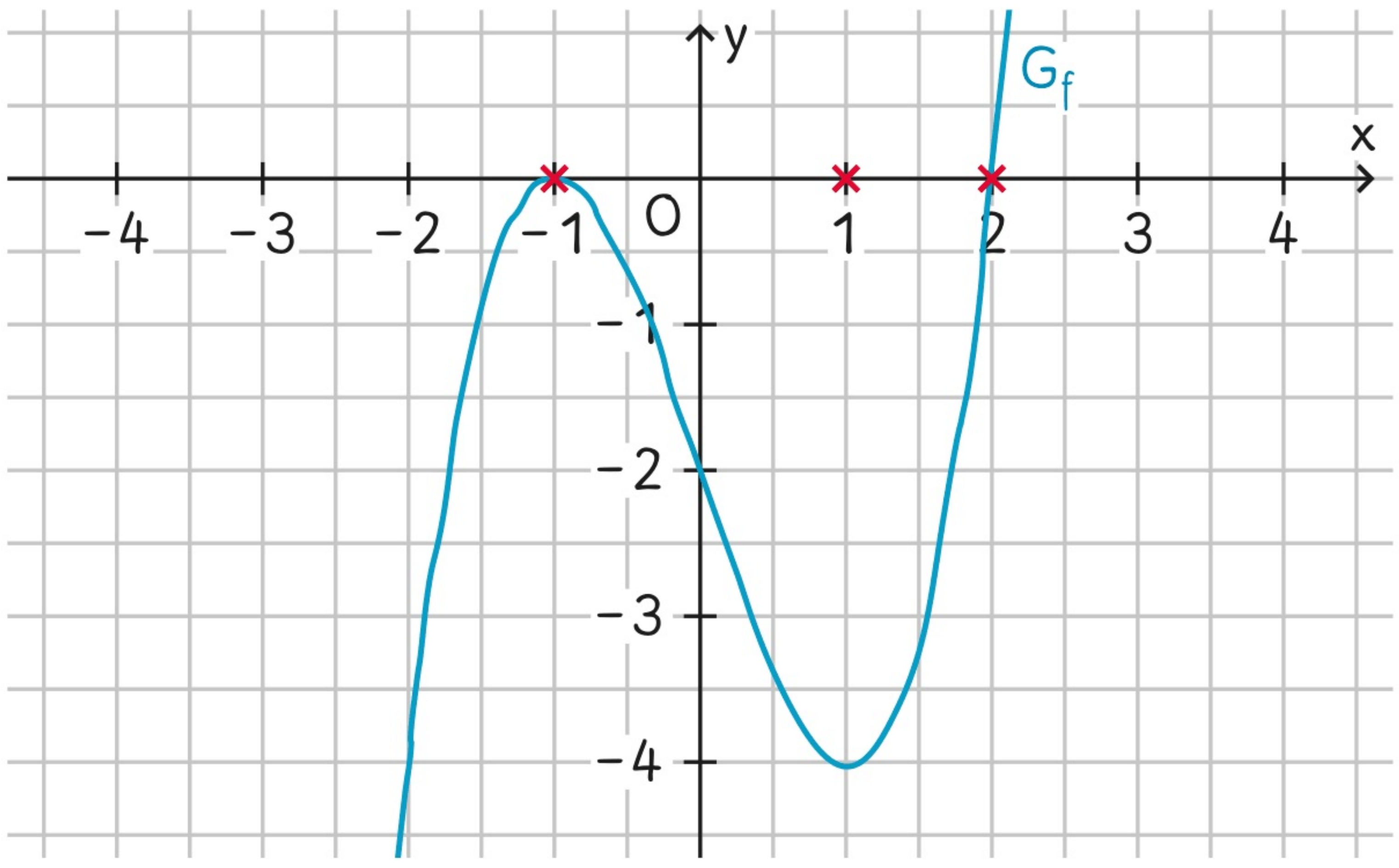
Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ (doppelt) und $x_2 = 2$.

Monotonieintervalle:

$f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2$
$= x^3 - 3x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$ und $x_3 = 1$

Da $f'(x) > 0$ für $x < -1$ und für $x > 1$ ist, ist f streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty; -1]$ und für $x \in [1; +\infty[$.
Da $f'(x) < 0$ für $-1 < x < 1$ ist, ist f streng monoton abnehmend für $x \in [-1; 1]$.



b) $f(x) = 4x^2(1 - x)^2$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (doppelt) und $x_2 = 1$ (doppelt).

Monotonieintervalle:

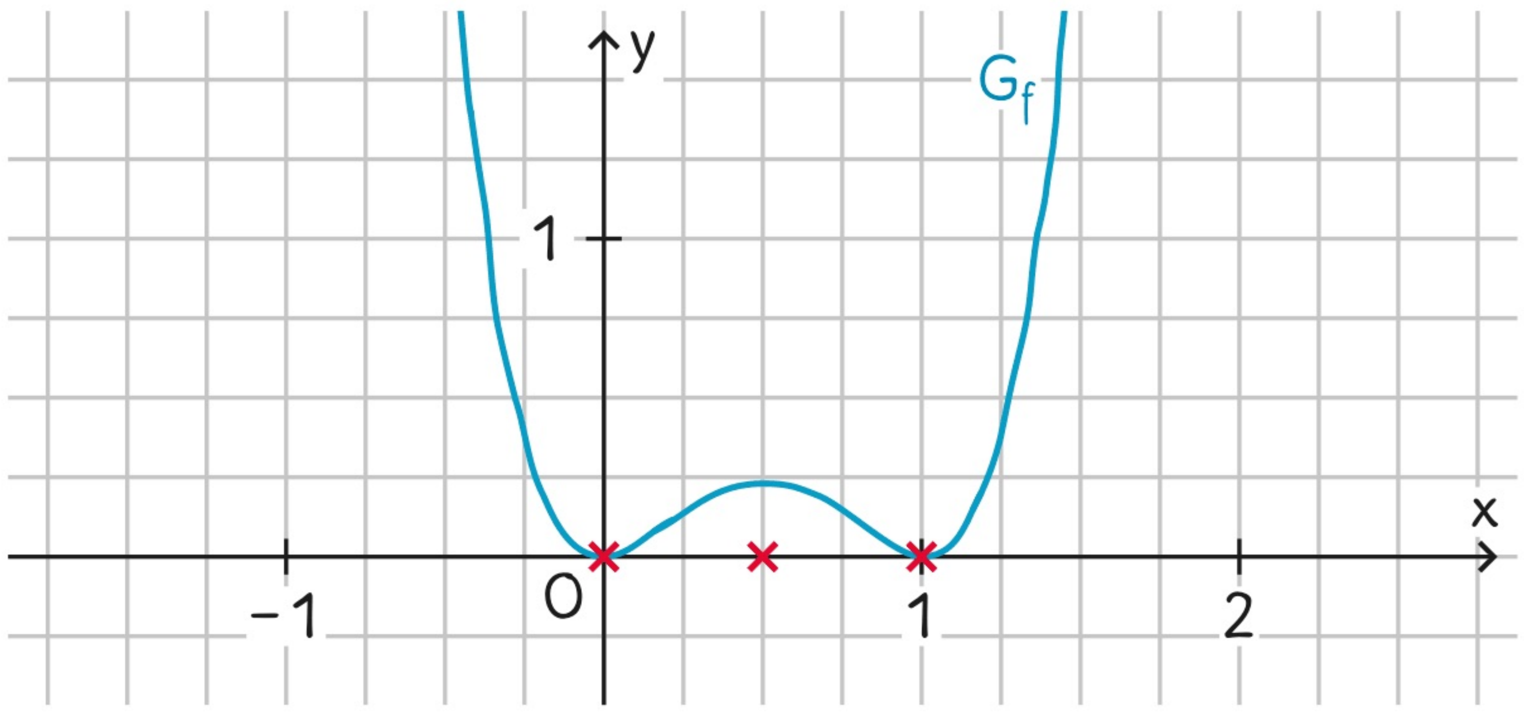
$f(x) = 4x^2(1 - 2x + x^2) = 4x^4 - 8x^3 + 4x^2$

$f'(x) = 16x^3 - 24x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 8x(2x^2 - 3x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_{3,4} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$

$\Rightarrow x_3 = 0{,}5$ und $x_4 = 1 = x_2$

Da $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und für $0{,}5 < x < 1$ ist, ist f streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 0]$ und für $x \in [0{,}5; 1]$.
Da $f'(x) > 0$ für $0 < x < 0{,}5$ und für $x > 1$ ist, ist f streng monoton zunehmend für $x \in [0; 0{,}5]$ und für $x \in [1; +\infty[$.



G 17

Lösung durch Ausklammern:

(2) $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)^2 = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

(4) $5x^4 = 25x^2 \Leftrightarrow 5x^4 - 25x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2(x^2 - 5) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{5}$ und $x_3 = \sqrt{5}$

(5) $3x^4 + 30x^3 = 0 \Leftrightarrow 3x^3(x + 10) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -10$

(7) $2(3x^2 - x + 2) = 4 + x$
$6x^2 - 2x + 4 = 4 + x$
$6x^2 - 3x = 0$
$3x(2x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 0{,}5$

Übrige Gleichungen:

(1) $-2x^2 + 8 = 0 \iff -2x^2 = -8 \iff x^2 = 4$
$\Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = 2$

(3) $4x^2 - 4x = 8 \iff 4x^2 - 4x - 8 = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 12}{8}$
$\Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 2$

(6) $x - 4x^{-1} = 0 \iff x - \frac{4}{x} = 0,\ x \neq 0$
$\Rightarrow x = \frac{4}{x} \qquad | \cdot x$
$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = 2$

Seite 151

9

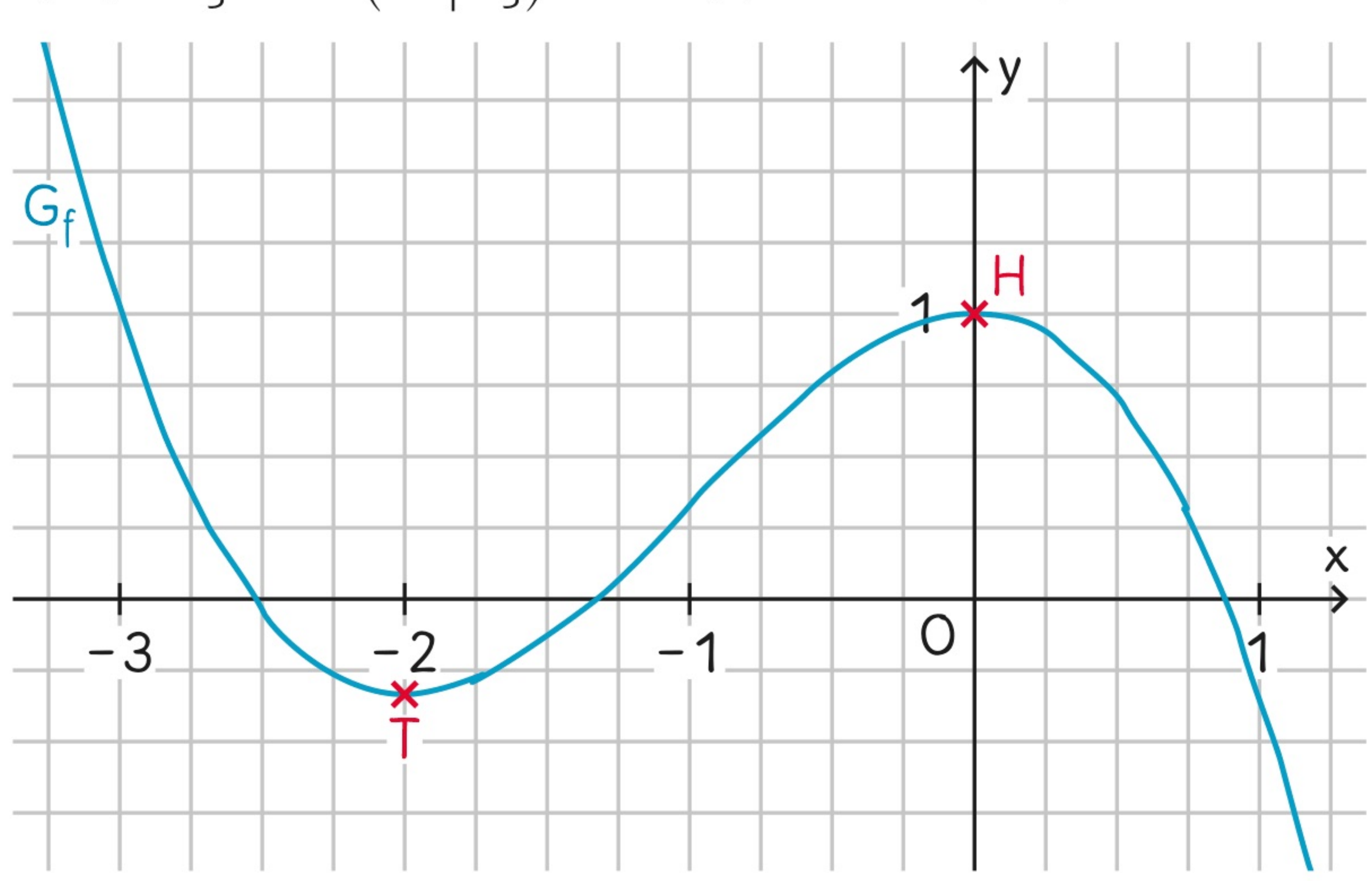
Hochpunkt: $H(-3|2)$; $f'(x)$ ändert an der Stelle $x = -3$ das Vorzeichen von + nach −.
Tiefpunkt: $T(2|-2)$; $f'(x)$ ändert an der Stelle $x = 2$ das Vorzeichen von − nach +.
Terrassenpunkt: $P(4|-1)$; $f'(x)$ ändert an der Stelle $x = 4$ das Vorzeichen nicht (vorher und nachher positiv).

10

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1,\ f'(x) = -x^2 - 2x$
Extrempunkte: $f'(x) = -x^2 - 2x = 0 \iff -x(x+2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

$f'(x)$: < 0 | = 0 | > 0 | = 0 | < 0
G_f: ↘ | −2 T | ↗ | 0 H | ↘

$f(-2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow T\left(-2\middle|-\frac{1}{3}\right)$ und $f(0) = 1 \Rightarrow H(0|1)$

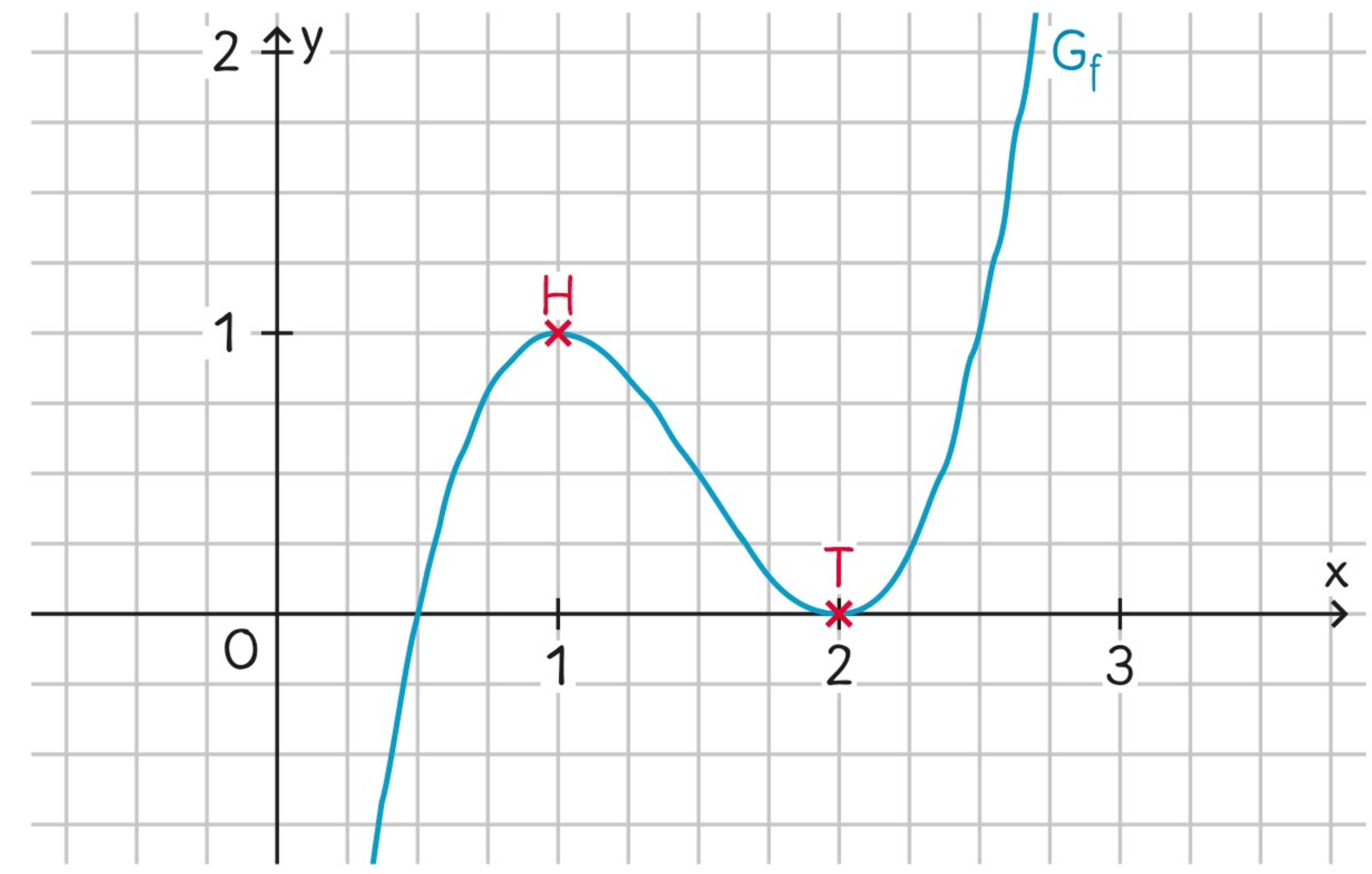


Es gibt keine globalen Extrema.

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4,\ f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
Extrempunkte: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \iff 6(x^2 - 3x + 2) = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$
$\Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = 2$

$f'(x)$: > 0 | = 0 | < 0 | = 0 | > 0
G_f: ↗ | 1 H | ↘ | 2 T | ↗

$f(1) = 1 \Rightarrow H(1|1)$ und $f(2) = 0 \Rightarrow T(2|0)$

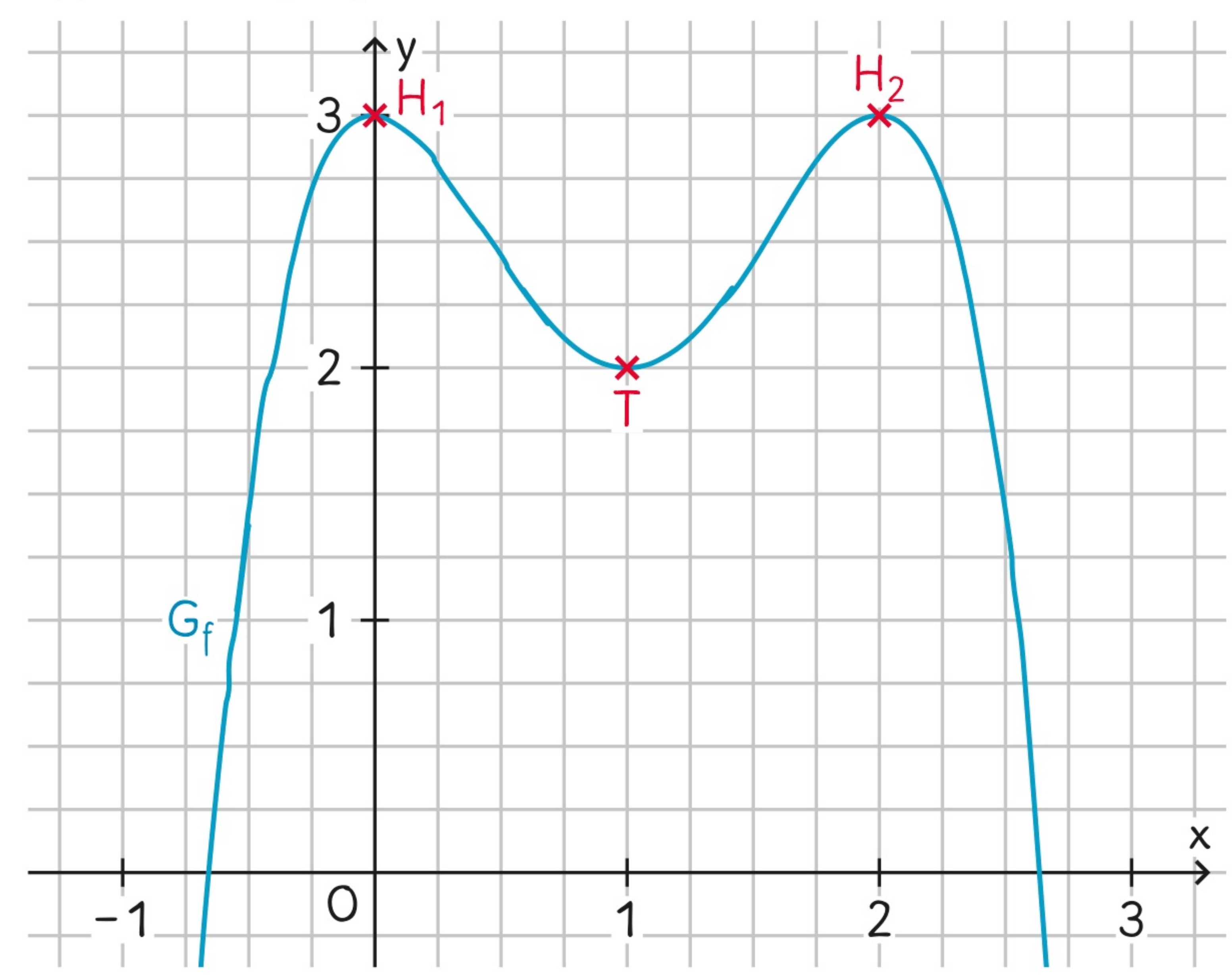


Es gibt keine globalen Extrema.

c) $f(x) = -(x^2 - 2x)^2 + 3 = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3$
Extrempunkte: $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x = 0$
$\iff 4x(-x^2 + 3x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und
$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow x_2 = 1$ und $x_3 = 2$

$f'(x)$: > 0 | = 0 | < 0 | = 0 | > 0 | = 0 | < 0
G_f: ↗ | 0 H | ↘ | 1 T | ↗ | 2 H | ↘

$f(0) = 3 \Rightarrow H_1(0|3),\ f(2) = 3 \Rightarrow H_2(2|3)$ und
$f(1) = 2 \Rightarrow T(1|2)$



Globales Maximum: $f(0) = f(2) = 3$.

Seite 152

18

a) Da f′ an der Stelle $x = 2{,}5$ eine Nullstelle mit VZW von − nach + hat, besitzt f an der Stelle $x = 2{,}5$ ein lokales Minimum.
Da f′ an der Stelle $x = 4{,}5$ eine Nullstelle mit VZW von + nach − hat, besitzt f an der Stelle $x = 4{,}5$ ein lokales Maximum.

b) Da f′ an der Stelle $x = -1{,}5$ eine Nullstelle ohne VZW hat, besitzt f an der Stelle $x = -1{,}5$ einen Terrassenpunkt.
Die y-Koordinate kann für keinen Punkt von G_f eindeutig angegeben werden, da man mithilfe der Ableitung einer Funktion nicht auf die Lage von G_f im Koordinatensystem schließen kann. Es gilt: $f'(x)$ ist die Ableitung von $f(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

19

a) Wenn f vom Grad 3 ist, dann ist f′ vom Grad 2 und besitzt höchstens zwei Nullstellen. Da eine Nullstelle von f′ notwendige Bedingung für eine Extremstelle von f ist, hat f somit höchstens zwei Extremstellen.

b) Wenn f drei verschiedene Extremstellen hat, dann muss f′ drei verschiedene Nullstellen besitzen. Die Ableitung f′ hat somit mindestens den Grad 3 und folglich die zugehörige Funktion f mindestens den Grad 4.

G 21

a) $f(t) = (t + 2)^2 \cdot (3 - 6t) = 0$

$\Leftrightarrow (t + 2)^2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2$ (doppelt) oder

$3 - 6t = 0 \Rightarrow -6t = -3 \Rightarrow t_2 = 0{,}5$ (einfach)

b) $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 + x - 6) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (doppelt) oder

$x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$\Rightarrow x_2 = -3$ (einfach) und $x_3 = 2$ (einfach)

c) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2) = 0$

$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$ (einfach) und $x_2 = \sqrt{2}$ (einfach) oder

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ keine weitere Nullstelle

d) $f(t) = (t - 1)(t - 3) - 2 = t^2 - 4t + 1 = 0$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow t_1 = 2 + \sqrt{3}$ (einfach) und $t_2 = 2 - \sqrt{3}$ (einfach)

e) $3x^5 - 6x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(3x^2 - 6x + 1) = 0$

$x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (dreifach) oder

$3x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6}$

$\Rightarrow x_2 = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$ (einfach) und $x_3 = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ (einfach)

f) $f(x) = 0{,}5x^4 - 4{,}5x^2 + 10 = 0$

Substitution: $x^2 = z \Rightarrow 0{,}5z^2 - 4{,}5z + 10 = 0$

$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-(-4{,}5) \pm \sqrt{(-4{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 10}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{4{,}5 \pm \sqrt{0{,}25}}{1} = 4{,}5 \pm 0{,}5$

$\Rightarrow z_1 = 4$ und $z_2 = 5$

Rücksubstitution:

$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ (einfach) und $x_2 = 2$ (einfach) oder

$x^2 = 5 \Rightarrow x_3 = -\sqrt{5}$ (einfach) und $x_4 = \sqrt{5}$ (einfach)

Seite 156

9

a) G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -0{,}2]$ und in $[0{,}2; +\infty[$.

G_f ist linksgekrümmt in $[-0{,}2; 0{,}2]$.

b) $f(x) = (0{,}25 - x^2)(10x^2 - 0{,}4)$

$= 2{,}5x^2 - 0{,}1 - 10x^4 + 0{,}4x^2 = -10x^4 + 2{,}9x^2 - 0{,}1$

$f'(x) = -40x^3 + 5{,}8x$ und $f''(x) = -120x^2 + 5{,}8$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -120x^2 = -5{,}8 \Rightarrow x^2 = \frac{5{,}8}{120} = \frac{29}{600}$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{29}{600}} \approx -0{,}22$ und $x_2 = \sqrt{\frac{29}{600}} \approx 0{,}22$

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{29}{600}}\right]$ und in $\left[\sqrt{\frac{29}{600}}; +\infty\right[$,

da $f''(x) < 0$ ist für $x < -\sqrt{\frac{29}{600}}$ und für $x > \sqrt{\frac{29}{600}}$.

G_f ist linksgekrümmt in $\left[-\sqrt{\frac{29}{600}}; \sqrt{\frac{29}{600}}\right]$, da $f''(x) > 0$ ist für

$-\sqrt{\frac{29}{600}} < x < \sqrt{\frac{29}{600}}$.

Seite 158

19

a) Die Aussage ist falsch, da $f''(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und G_f folglich in diesem Bereich linksgekrümmt ist.

b) Die Aussage ist wahr. Da f″ an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle mit VZW von + nach − besitzt, hat f′ bei $x = 1$ ein Maximum.

c) Die Aussage ist falsch, da f″ im dargestellten Bereich drei Nullstellen mit VZW besitzt. Damit hat der Graph von f drei Punkte, an denen er jeweils seine Krümmung ändert.

d) Die Aussage ist wahr. Da $f''(x) < 0$ ist für $x \in [1{,}2; 2{,}2]$, nimmt f′ in diesem Bereich streng monoton ab.

e) Die Aussage ist wahr. Da $f''(3) > 0$ ist, liegt das Extremum im Bereich einer Linkskrümmung und muss daher ein Minimum sein.

20

a) $f_a(x) = x^3 - ax^2 + a$,

$f_a'(x) = 3x^2 - 2ax$ und $f_a''(x) = 6x - 2a$

$f_a''(x) = 6x - 2a = 0 \Rightarrow 6x = 2a$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}a$ mit VZW von − nach +. Somit wechselt G_a sein Krümmungsverhalten genau einmal, und zwar an der Stelle $x = \frac{1}{3}a$.

b) Da für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f''(x) < 0$ für $x < \frac{1}{3}a$ und $f''(x) > 0$ für $x > \frac{1}{3}a$, geht der Graph immer von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über.

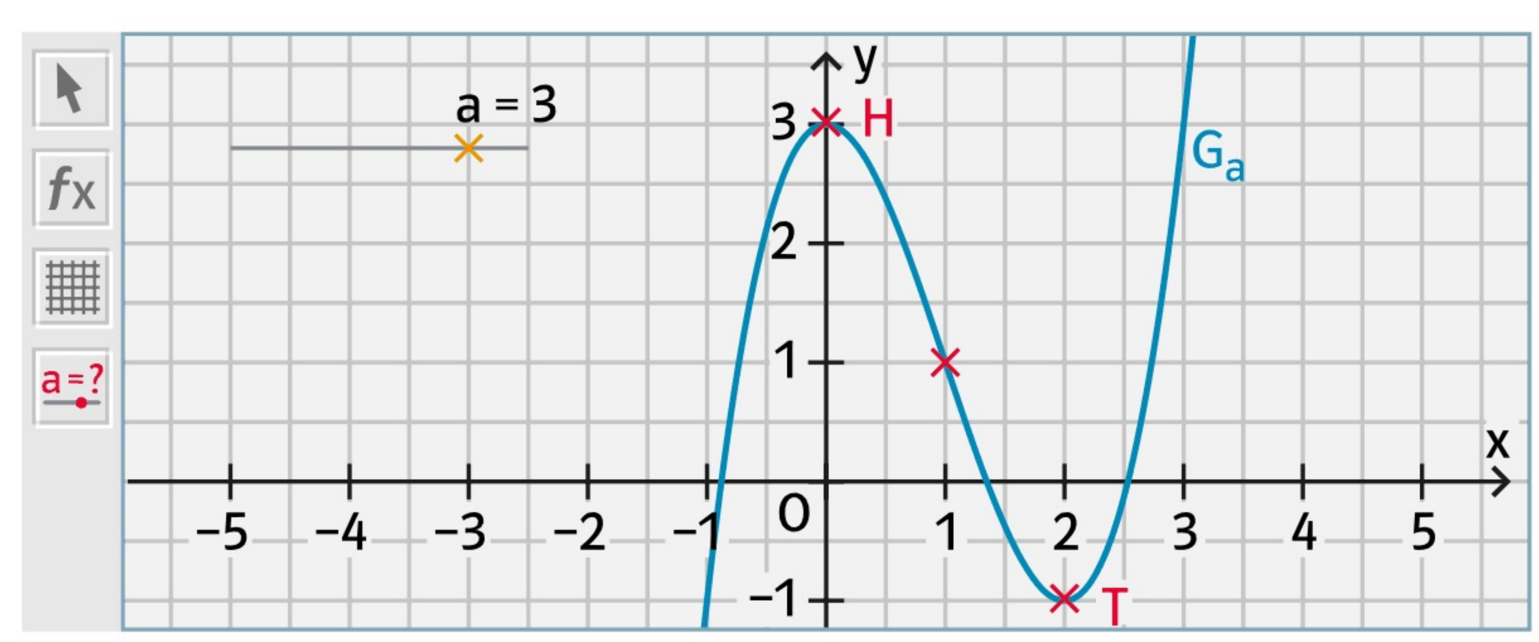
c) $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x(3x - 2a) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $3x - 2a = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}a$

Da $f_a'(0) = 0$ und $f_a''(0) < 0$ ist, besitzt f_a an der Stelle $x_1 = 0$ ein lokales Maximum.

Da $f_a'\left(\frac{2}{3}a\right) = 0$ und $f_a''\left(\frac{2}{3}a\right) = 2a > 0$ ist, besitzt f_a an der Stelle $x_2 = \frac{2}{3}a$ ein lokales Minimum.

d)



G 22

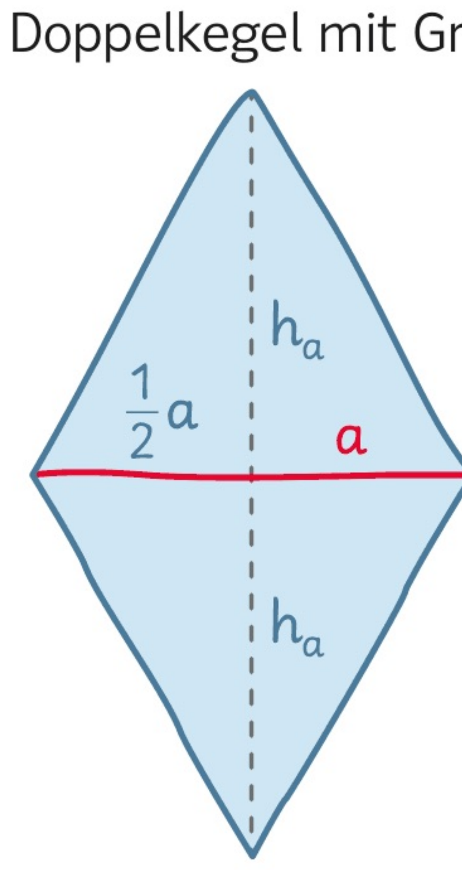
a) Es gilt nach dem Satz des Pythagoras $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2 = a^2$.

$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + h_a^2 = a^2 \Rightarrow h_a^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h_a^2 = \frac{3}{4}a^2$

$\Rightarrow h_a = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

b) Es entsteht ein Doppelkegel mit Grundkreisradius h_a.

Skizze:



c) $V_{Kegel} = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ mit $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $h = \frac{a}{2}$

Doppelkegel: $V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4}\pi a^3$

Seite 163

10

Wendestellen: $x_1 \approx 1$, $x_2 \approx 2{,}4$ und $x_3 \approx 4$.
Da G_f bei $x_1 \approx 1$ von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung übergeht, hat f″ an der Stelle $x_1 \approx 1$ eine Nullstelle mit VZW von − nach + und damit f′ ein lokales Minimum.
Da G_f bei $x_2 \approx 2{,}4$ von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung übergeht, hat f″ an der Stelle $x_2 \approx 2{,}4$ eine Nullstelle mit VZW von + nach − und damit f′ ein lokales Maximum.
Da G_f bei $x_3 \approx 4$ von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung übergeht, hat f″ an der Stelle $x_3 \approx 4$ eine Nullstelle mit VZW von − nach + und damit f′ ein lokales Minimum.
G_f ist rechtsgekrümmt in $[-1; 1]$ und in $[2{,}4; 4]$.
G_f ist linksgekrümmt in $[1; 2{,}4]$ und in $[4; 6]$.

11

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4{,}5x$, $f'(x) = 6x^2 - 12x + 4{,}5$,
$f''(x) = 12x - 12$ und $f'''(x) = 12$

a) Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 4{,}5 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4{,}5}}{2 \cdot 6} = \frac{12 \pm 6}{12}$

$\Rightarrow x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 1{,}5$

$f''(0{,}5) = -6 < 0$ und $f(0{,}5) = 1 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(0{,}5\,|\,1)$

$f''(1{,}5) = 6 > 0$ und $f(1{,}5) = 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(1{,}5\,|\,0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 12 = 0$

$\Rightarrow 12x = 12 \Rightarrow x_3 = 1$

$f'''(1) = 12 \neq 0$ und $f(1) = 0{,}5 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(1\,|\,0{,}5)$

b) Tangente in $W(1\,|\,0{,}5)$ mit $m = f'(1) = -1{,}5$:

$y = m \cdot x + t \Rightarrow 0{,}5 = -1{,}5 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 2$

Gleichung der Wendetangente: $y = -1{,}5x + 2$.

Seite 164

17

$f(t) = -t^3 + 24t^2 - 117t + 182$, $8 \le t \le 17$

a) $f(11) = -11^3 + 24 \cdot 11^2 - 117 \cdot 11 + 182 = 468$

Um 11 Uhr waren 468 Besucher auf dem Schulfest.

b) $f'(t) = -3t^2 + 48t - 117$

Bei einem Anstieg der Besucherzahl gilt $f'(t) > 0$.

$-3t^2 + 48t - 117 = 0$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-48 \pm \sqrt{(48)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-117)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-48 \pm 30}{-6}$

$\Rightarrow t_1 = 3 \notin D$ und $t_2 = 13$

Es ist $f'(t) > 0$ für $t \in [8; 13[$.

Von 8 Uhr, also von Beginn an, bis 13 Uhr steigt die Besucherzahl fortwährend an.

c) Extrema: $f'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 3 \notin D$ und $t_2 = 13$

(aus Teilaufgabe b))

$f''(t) = -6t + 48$ und $f''(13) = -30 < 0$

$\Rightarrow$ Maximum für $t = 13$

$f(13) = -13^3 + 24 \cdot 13^2 - 117 \cdot 13 + 182 = 520$

Randextrema:

$f(8) = 270$ und $f(17) = 216$

Um 13 Uhr waren die meisten Besucher (520) auf dem Schulfest, um 17 Uhr, also am Ende, die wenigsten Besucher (216).

d) Die größte Zunahme der Besucheranzahl entspricht dem Maximum von f′.

Es muss also $f''(t) = 0$ und $f'''(t) < 0$ gelten.

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 48 = 0 \Rightarrow -6t = -48 \Rightarrow t = 8$

$f'''(t) = -6 < 0$

Um 8 Uhr, also zu Beginn, war die Zunahme der Besucher am größten.

G 19

a) $g(x) = 4 \cdot \sin(x)$, Amplitude: 4

b) $g(x) = \sin(x) - 3$, Amplitude: 1

c) $g(x) = \sin(x - 2{,}5)$, Amplitude: 1

G 20

$f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2x) - 0{,}5$

Seite 168

9

$f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 2x^2 - 24x)$, $f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 4x - 24)$, $f''(x) = \frac{1}{8}(6x - 4)$

und $f'''(x) = \frac{3}{4}$

Symmetrie:

$f(-x) = \frac{1}{8}(-x^3 - 2x^2 + 24x) \neq f(x)$

$-f(x) = \frac{1}{8}(-x^3 + 2x^2 + 24x) \neq f(-x)$

Wegen $f(-x) \neq f(x)$ und $-f(x) \neq f(-x)$ weist der Graph keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems auf.

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x(x^2 - 2x - 24) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 10}{2} = 1 \pm 5$

$\Rightarrow x_2 = -4$ und $x_3 = 6$

Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(3x^2 - 4x - 24) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 24 = 0$

$\Rightarrow x_{4,5} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-24)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{304}}{6} = \frac{4 \pm 4\sqrt{19}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{3}$

$\Rightarrow x_4 = \frac{2 - 2\sqrt{19}}{3} \approx -2{,}2$ und $x_5 = \frac{2 + 2\sqrt{19}}{3} \approx 3{,}6$

$f''(x_4) = \frac{3}{4}\left(\frac{2 - 2\sqrt{19}}{3}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{19}}{2} < 0$, $f(x_4) \approx 4{,}1$

$\Rightarrow H(-2{,}2\,|\,4{,}1)$

$f''(x_5) = \frac{3}{4}\left(\frac{2 + 2\sqrt{19}}{3}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{19}}{2} > 0$, $f(x_5) \approx -8{,}2$

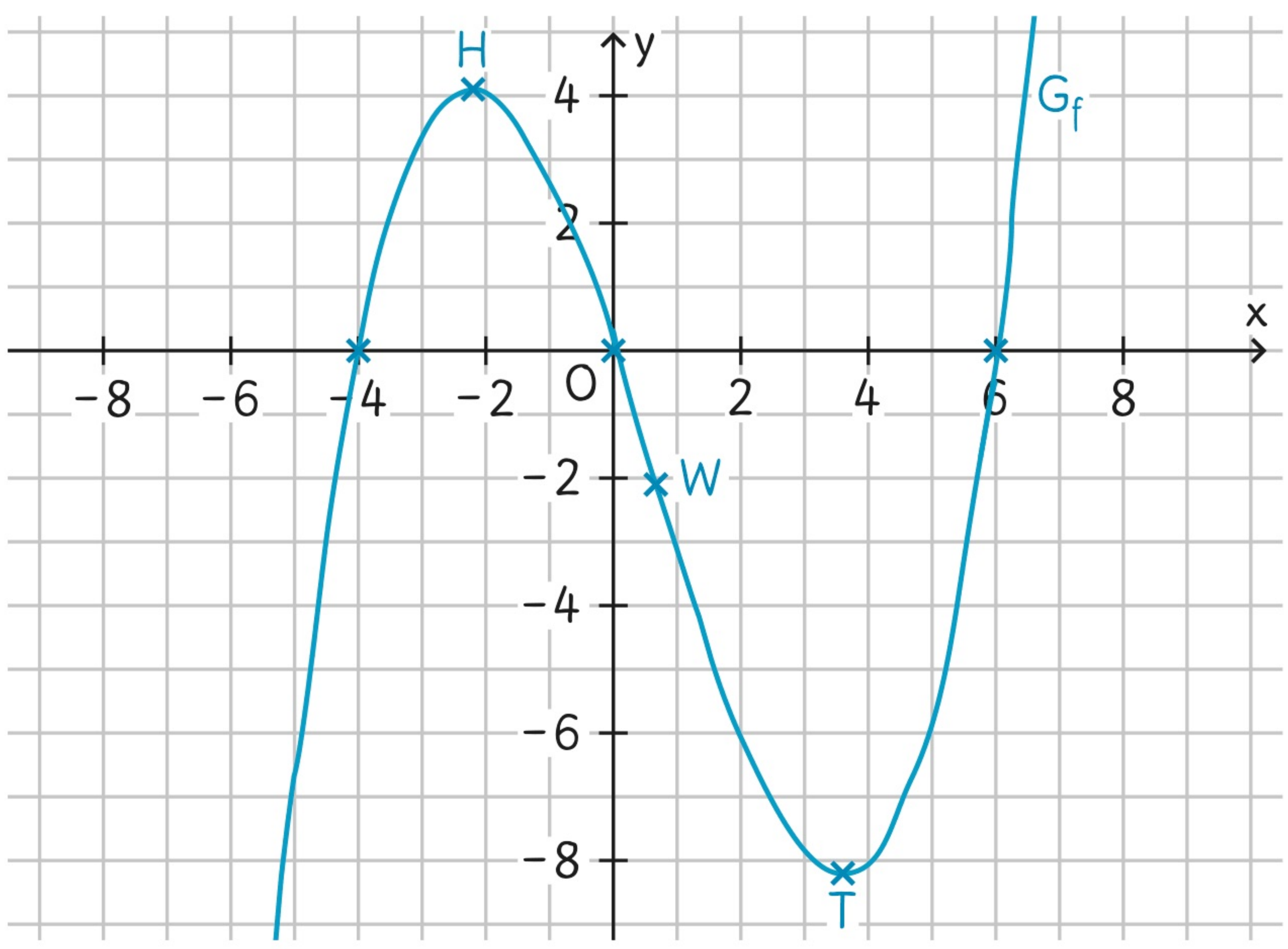
$\Rightarrow T(3{,}6\,|\,-8{,}2)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(6x - 4) = 0 \Rightarrow x_6 = \frac{2}{3}$

$f'''(x_6) = \frac{3}{4} \neq 0$, $f(x_6) = -\frac{56}{27} \approx -2{,}1 \Rightarrow W\left(\frac{2}{3}\,\middle|\,-2{,}1\right)$

Skizze:



Das Zeichnen des Graphen mit einem Funktionenplotter bestätigt die Skizze.

10

Individuelle Lösung, z. B.:

Nullstellen von h:

$x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (doppelt), $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$.

Die Funktion h hat drei Nullstellen.

Symmetrie:

$h(-x) = h(x)$. Der Graph von h ist also symmetrisch zur y-Achse.

Verhalten von h im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = +\infty$

Extremstellen:

$h'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) \Rightarrow x_4 = x_1 = 0,\ x_5 = -\sqrt{2}$ und $x_6 = \sqrt{2}$

Es gibt maximal drei Extremstellen.

a) Der abgebildete Graph kann nicht zur Funktion h gehören, da er
(1) mehr als dreimal die x-Achse schneidet,
(2) nicht symmetrisch zur y-Achse ist und
(3) mehr als drei Extremstellen hat.

b) Der abgebildete Graph kann nicht zur Funktion h gehören, da er
(1) nur zweimal die x-Achse schneidet,
(2) nicht symmetrisch zur y-Achse ist und
(3) ein anderes Verhalten im Unendlichen hat als der Graph von h.

Seite 170

21

a) $f'(t) = -0{,}03t^2 + 0{,}48t,\ f''(t) = -0{,}06t + 0{,}48$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}03t^2 + 0{,}48t = 0 \Leftrightarrow t(-0{,}03t + 0{,}48) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0$ und $t_2 = 16$

$f''(t_1) = 0{,}48 > 0 \Rightarrow f(t_1) = 6{,}84$ Minimum

$f''(t_2) = -0{,}48 < 0 \Rightarrow f(t_2) = 27{,}32$ Maximum

Um 0 Uhr wird die Tiefsttemperatur erreicht (etwa 6,8 °C) und um 16 Uhr die Höchsttemperatur (etwa 27,3 °C).

b) Die Steigung der Wendetangente gibt den stärksten Temperaturanstieg an.

22

a) $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax,\ f_a''(x) = 6x - 2a$ und $f_a'''(x) = 6$

Wendepunkt:

$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2a \Rightarrow x_1 = x_W = \frac{a}{3}$

$f_a'''(x_W) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_W$ ist eine Wendestelle.

Es muss gelten: $f_a(x_W) = \frac{a^3}{27} - a\frac{a^2}{9} + 1 = -\frac{2}{27}a^3 + 1 = 3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{27}a^3 = -2$, also $a^3 = -27$ bzw. $a = -3$.

b) Mit $a = -3$ gilt $f_{-3}(x) = x^3 + 3x^2 + 1,\ f_{-3}'(x) = 3x^2 + 6x$,

$f_{-3}''(x) = 6x + 6$ und $f_{-3}'''(x) = 6$.

Extrempunkte:

$f_{-3}'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$ und $x_3 = -2$

$f_{-3}''(x_2) = 6 > 0,\ f_{-3}(x_2) = 1 \Rightarrow T(0\,|\,1)$

$f_{-3}''(x_3) = -6 < 0,\ f_{-3}(x_3) = 5 \Rightarrow H(-2\,|\,5)$

Wendepunkte:

Aus Teilaufgabe a) ist $x_1 = x_W = \frac{a}{3} = -1$ bekannt.

$f_{-3}(x_W) = 3 \Rightarrow W(-1\,|\,3)$

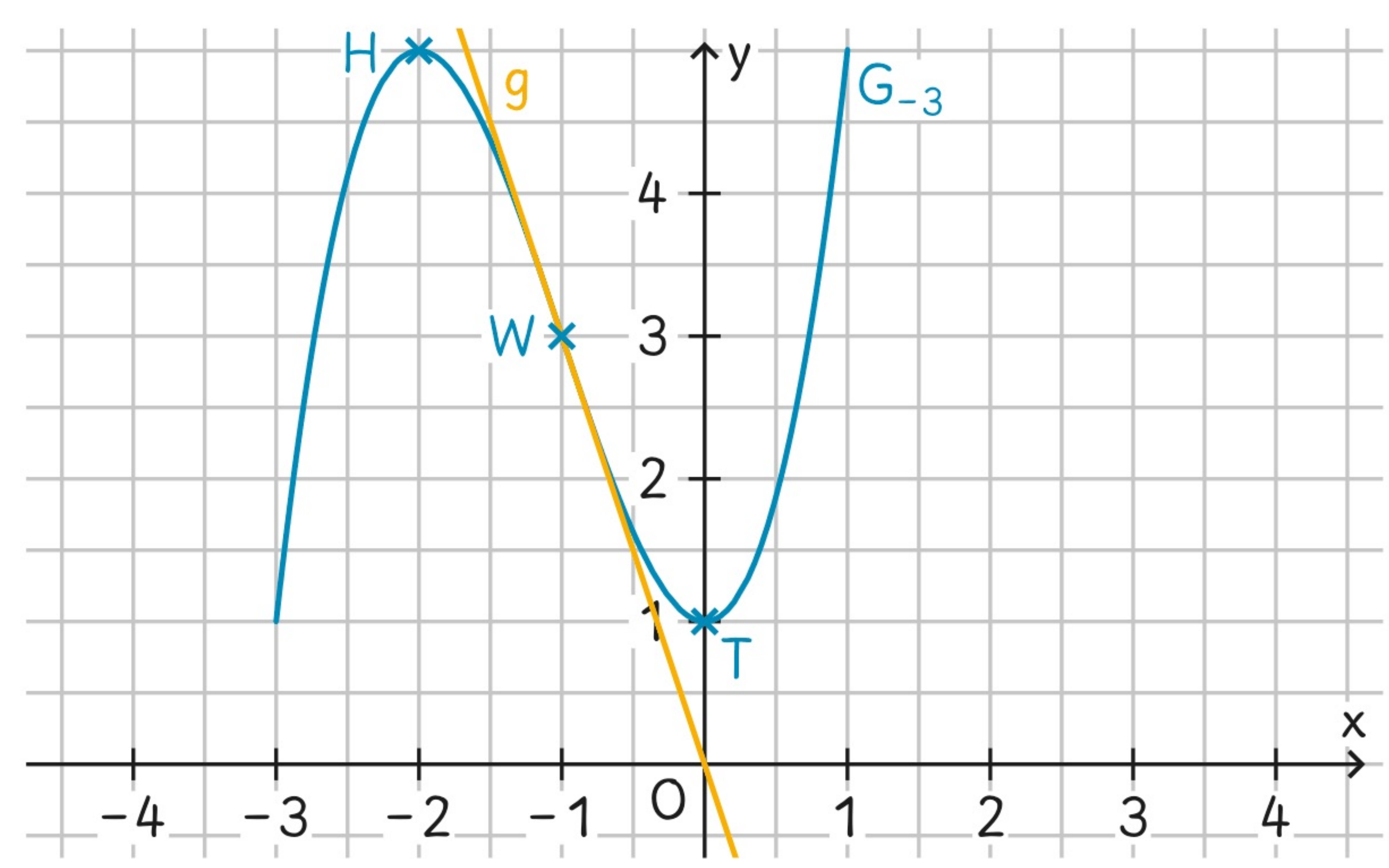
Wendetangente g:

Ansatz: $y = mx + t$.

Einsetzen von $m = f_{-3}'(x_W) = -3$ und $W(-1\,|\,3)$ liefert

$3 = -3\cdot(-1) + t$, also $t = 0$ und somit $g\colon y = -3x$.

Skizze:



G 25

a) Aus (I): $y = 5 + x$.

y in (II): $4x + 10 + 2x = -2 \Rightarrow x = -2$.

x in (I): $y = 5 - 2 = 3$.

b) Aus (I): $5x - 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$.

y in (II): $6x - 8\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

x in (I): $y = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

c) Aus (II): $a = 5 + b$.

a in (I): $(5 + b)^2 - b^2 = 20 \Rightarrow 25 + 10b = 20 \Rightarrow b = -0{,}5$.

b in (II): $a = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$.

Seite 175

9

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion $f\colon x \mapsto x^5 + x^3 + 1$.

Es ist $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$.

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 + x_n^3 + 1}{5x_n^4 + 3x_n^2};\ x_0 = -1$

1. Schritt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{(-1)^5 + (-1)^3 + 1}{5(-1)^4 + 3(-1)^2} = -1 - \frac{-1}{8} = -\frac{7}{8} = -0{,}875$

2. Schritt: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{7}{8} - \frac{\left(-\frac{7}{8}\right)^5 + \left(-\frac{7}{8}\right)^3 + 1}{5\left(-\frac{7}{8}\right)^4 + \left(-\frac{7}{8}\right)^2} \approx -0{,}840\,0271$

Es ist $x^* \approx -0{,}84$.

10

a) Die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{6}x + 1$ hat drei Nullstellen $(x_A^*, x_B^*$ und $x_C^*)$.

Es ist $f'(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{6}$.

Als Startwerte bieten sich $x_{A0} = -1$, $x_{B0} = 1$ und $x_{C0} = 3$ an.

Startwert $x_{A0} = -1$:

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	-1	=1/3*B2^3-B2^2-1/6*B2+1	=B2^2-2*B2-1/6	=B2-C2/D2
3	=A2+1	=E2	=1/3*B3^3-B3^2-1/6*B3+1	=B3^2-2*B3-1/6	=B3-C3/D3
4	=A3+1	=E3	=1/3*B4^3-B4^2-1/6*B4+1	=B4^2-2*B4-1/6	=B4-C4/D4

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	-1,0000000	-0,1666667	2,8333333	-0,9411765
3	1	-0,9411765	-0,0068526	2,6014994	-0,9385424
4	2	-0,9385424	-0,0000135	2,5912799	-0,9385372

Es ist $x_A^* \approx -0{,}94$.

Startwert $x_{B0} = 1$:

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	1	=1/3*B2^3-B2^2-1/6*B2+1	=B2^2-2*B2-1/6	=B2-C2/D2
3	=A2+1	=E2	=1/3*B3^3-B3^2-1/6*B3+1	=B3^2-2*B3-1/6	=B3-C3/D3
4	=A3+1	=E3	=1/3*B4^3-B4^2-1/6*B4+1	=B4^2-2*B4-1/6	=B4-C4/D4

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	1,0000000	0,1666667	-1,1666667	1,1428571
3	1	1,1428571	0,0009718	-1,1462585	1,1437050
4	2	1,1437050	0,0000001	-1,1460156	1,1437050

Es ist $x_B^* \approx 1{,}14$.

Startwert $x_{C0} = 3$:

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	3	=1/3*B2^3-B2^2-1/6*B2+1	=B2^2-2*B2-1/6	=B2-C2/D2
3	=A2+1	=E2	=1/3*B3^3-B3^2-1/6*B3+1	=B3^2-2*B3-1/6	=B3-C3/D3
4	=A3+1	=E3	=1/3*B4^3-B4^2-1/6*B4+1	=B4^2-2*B4-1/6	=B4-C4/D4
5	=A4+1	=E4	=1/3*B5^3-B5^2-1/6*B5+1	=B5^2-2*B5-1/6	=B5-C5/D5

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	3,0000000	0,5000000	2,8333333	2,8235294
3	1	2,8235294	0,0604519	2,1585928	2,7955242
4	2	2,7955242	0,0014229	2,0572405	2,7948326
5	3	2,7948326	0,0000009	2,0547573	2,7948321

Es ist $x_C^* \approx 2{,}79$.

b) Die beiden Extremstellen der Funktion $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{42}}{6} \approx -0{,}1$ und $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{42}}{6} \approx 2{,}1$ dürfen auf keinen Fall als Startwert x_0 gewählt werden, weil dies die Nullstellen der ersten Ableitung f′ sind und in der Iterationsformel durch $f'(x_0)$ geteilt wird. Anschaulich begründet hat der Graph von f an diesen Stellen waagerechte Tangenten, welche die x-Achse nicht schneiden. So würde sich kein weiterer Näherungswert ergeben.

Seite 176

18

$f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 0{,}5x$, $f'(x) = x^3 + x - 0{,}5$ und $f''(x) = 3x^2 + 1 > 0$

Da die zweite Ableitung f″ immer positiv ist, ist der Graph von f durchgehend linksgekrümmt. Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ (der Graph verläuft „von links oben nach rechts oben“) besitzt die Funktion nur eine Extremstelle.

Mit dem Newton-Verfahren muss nun die Nullstelle der Ableitung f′ mit $f'(x) = x^3 + x - 0{,}5$ gesucht werden, d.h., man bestimmt die Nullstelle x^* der Funktion g mit $g(x) = f'(x) = x^3 + x - 0{,}5$.

Mit $g'(x) = f''(x) = 3x^2 + 1$ lautet die Iterationsvorschrift

$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 0{,}5}{3x_n^2 + 1}$.

Da es nur eine Extremstelle gibt, kann ein beliebiger Startwert gewählt werden, z.B. $x_0 = 0$.

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$g(x_n)$	$g'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	0,0000000	-0,5000000	1,0000000	0,5000000
3	1	0,5000000	0,1250000	1,7500000	0,4285714
4	2	0,4285714	0,0072886	1,5510204	0,4238722
5	3	0,4238722	0,0000283	1,5390029	0,4238538

Mit $x_0 = 0$ ergibt sich schon mit dem 4. Iterationsschritt die Extremstelle $x^* \approx 0{,}42$.

19

$f(x) = g(x)$

$0{,}5x^2 - 4x + 1 = x^3 - x + 2$

$x^3 - 0{,}5x^2 + 3x + 1 = 0$

Gesucht ist also die Nullstelle der Funktion

$h: x \mapsto x^3 - 0{,}5x^2 + 3x + 1$.

Es ist $h'(x) = 3x^2 - x + 3$.

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 0{,}5x_n^2 + 3x_n + 1}{3x_n^2 - x_n + 3}$.

Da keine Graphen und auch kein Startwert vorgegeben sind, bietet sich die Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramm an. So können verschiedene Startwerte ausprobiert werden. Abgebildet ist das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$.

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	0,0000000	1,0000000	3,0000000	-0,3333333
3	1	-0,3333333	-0,0925926	3,6666667	-0,3080808
4	2	-0,3080808	-0,0009404	3,5928222	-0,3078191
5	3	-0,3078191	-0,0000001	3,5920768	-0,3078190

Es ergibt sich die Schnittstelle $x^* \approx -0{,}308$.

20

a) Gesucht ist die Nullstelle der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$.

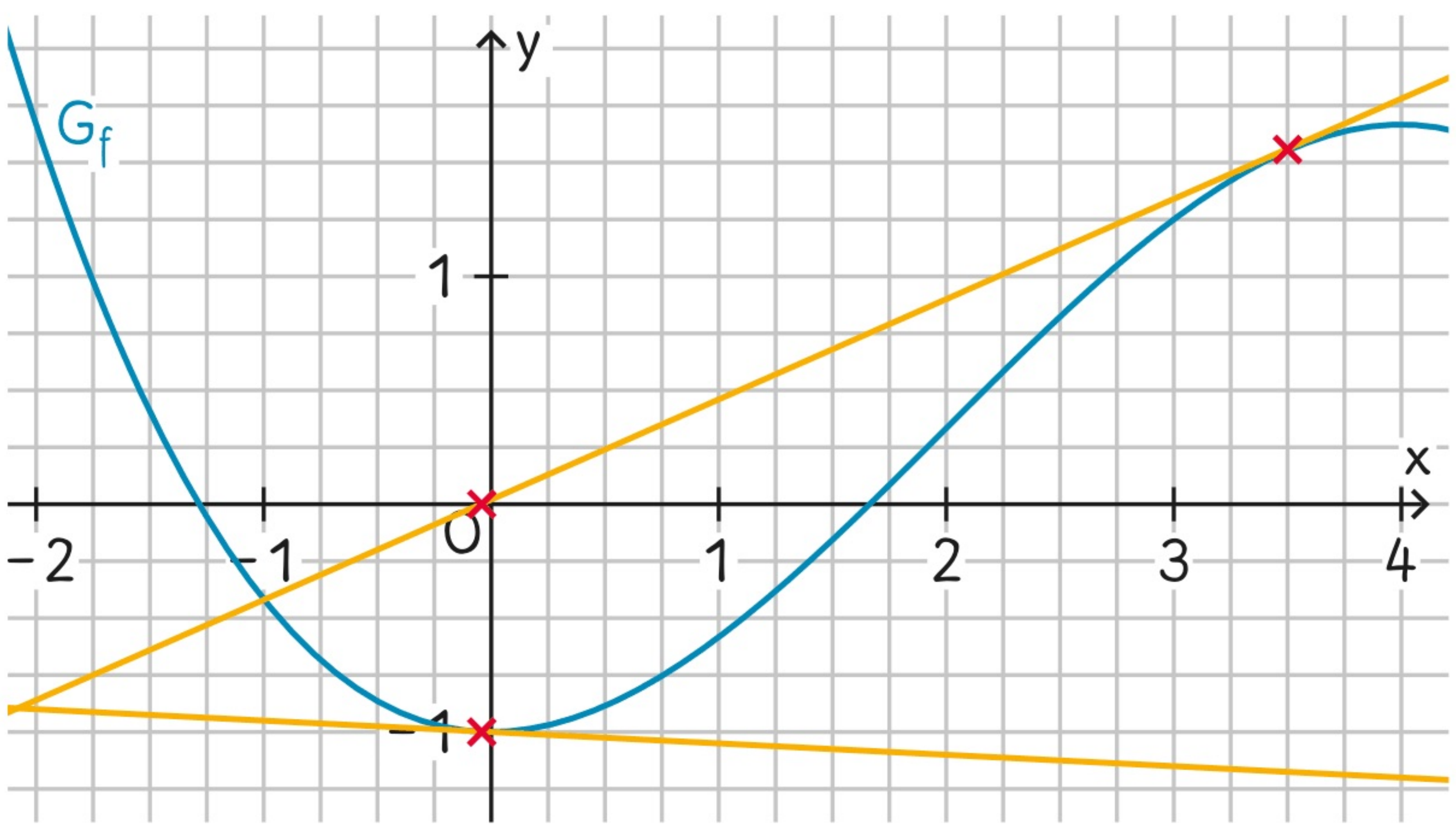
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{-\frac{1}{12}x_n^3 + \frac{1}{2}x_n^2 - 1}{-\frac{1}{4}x_n^2 + x_n}$; $x_0 = 2$.

1. Schritt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 1}{-\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2} = 2 - \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$

b) Mit dem Startwert $x_0 = 3{,}5$ wird die linke Nullstelle angenähert, wie man der Tabelle entnehmen kann.

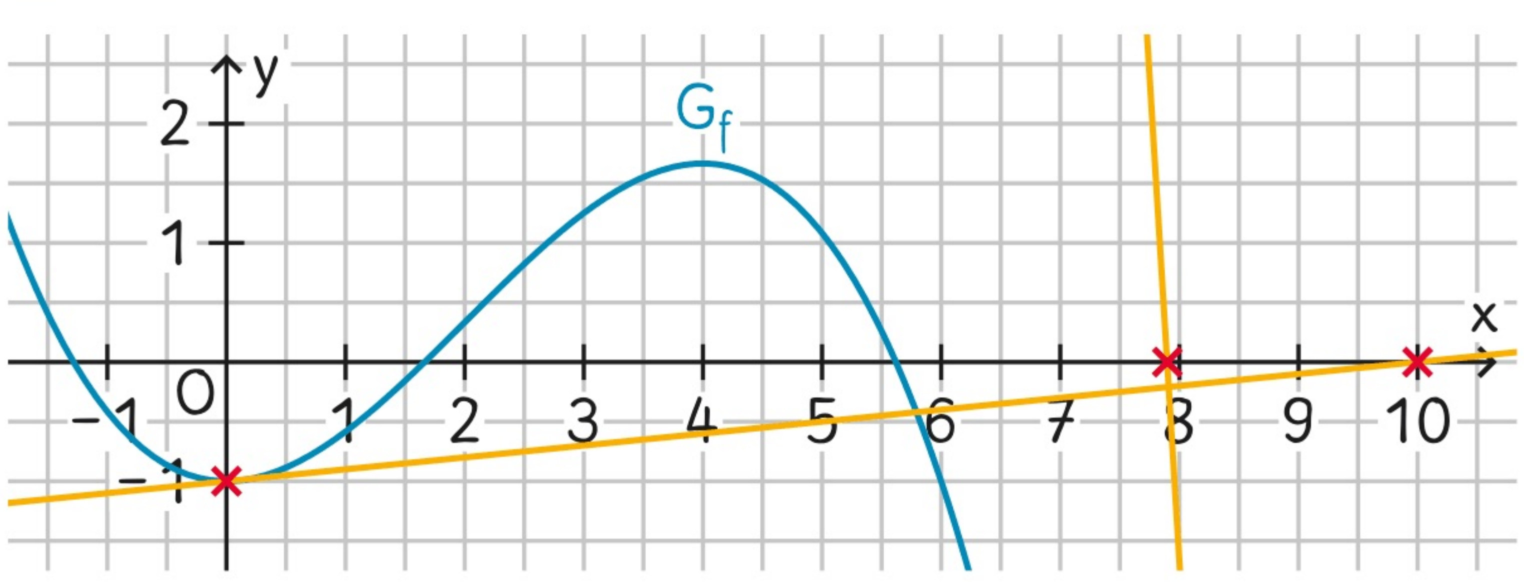
	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	3,5000000	1,5520833	0,4375000	-0,0476190
3	1	-0,0476190	-0,9988572	-0,0481859	-20,7768441
4	2	-20,7768441	962,2462000	-128,6961565	-13,2999603
5	3	-13,2999603	283,4958013	-57,5221965	-8,3715011

Der Startwert $x_0 = 3{,}5$ liegt zwar auf der „richtigen Seite" der Extremstelle, jedoch verläuft die Tangente an dieser Stelle so flach, dass der Graph erst auf der linken Seite der anderen Extremstelle geschnitten wird.



c) Startwert $x_0 = 0{,}1$:

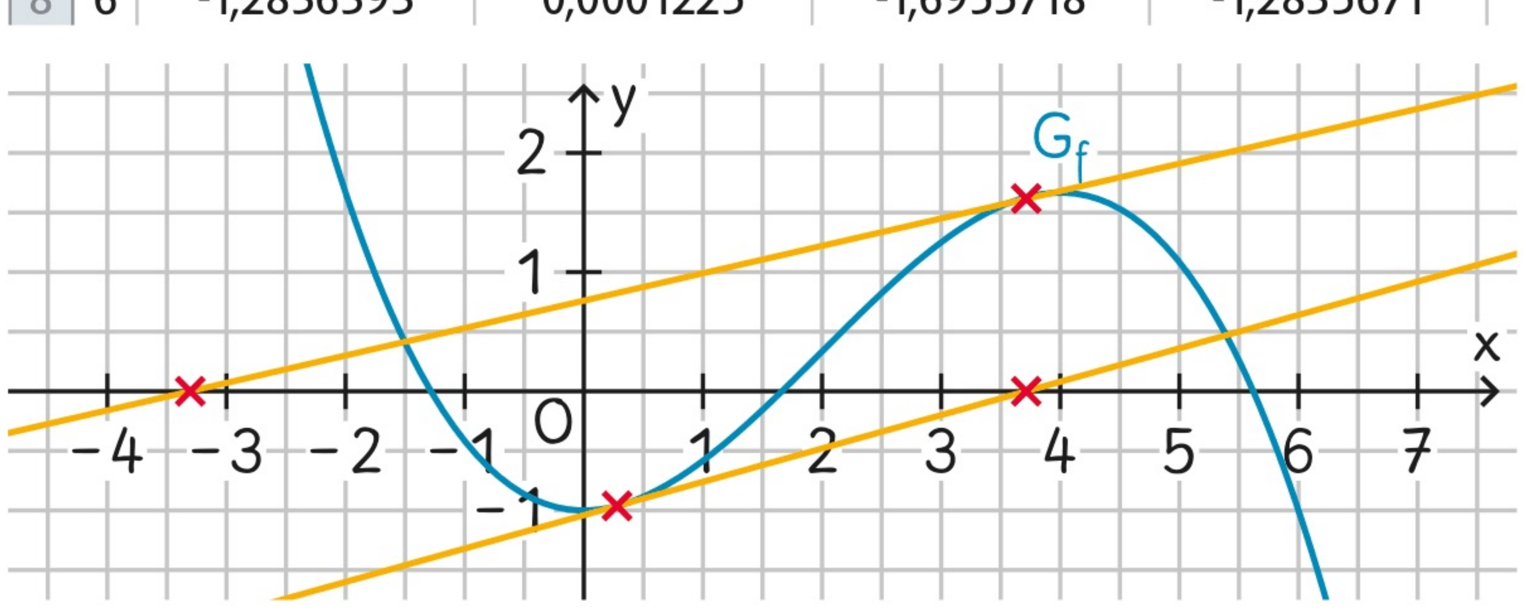
	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	0,1000000	-0,9950833	0,0975000	10,3059829
3	1	10,3059829	-39,1127153	-16,2473380	7,8986522
4	2	7,8986522	-10,8712048	-7,6985245	6,4865369
5	3	6,4865369	-2,7059264	-4,0322532	5,8154663
6	4	5,8154663	-0,4799280	-2,6394458	5,6336372
7	5	5,6336372	-0,0310356	-2,3008299	5,6201484
8	6	5,6201484	-0,0001651	-2,2763686	5,6200759



Es wird die rechte Nullstelle angenähert.

Startwert $x_0 = 0{,}3$:

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
2	0	0,3000000	-0,9572500	0,2775000	3,7495495
3	1	3,7495495	1,6366131	0,2347691	-3,2216112
4	2	-3,2216112	6,9757551	-5,8163059	-2,0222666
5	3	-2,0222666	1,7339631	-3,0446571	-1,4527564
6	4	-1,4527564	0,3107543	-1,9803817	-1,2958401
7	5	-1,2958401	0,0209321	-1,7156404	-1,2836393
8	6	-1,2836393	0,0001225	-1,6955718	-1,2835671



Es wird die linke Nullstelle angenähert.

G 22

a) Grundwert: 13,50 €; Prozentwert: 15,00 €. Es ist $\frac{15}{13{,}5} = 1{,}\overline{1}$.
Der Preis wurde also um etwa 11% erhöht.

b) Grundwert: 15,00 €; Prozentwert: 13,50 €. $\frac{13{,}5}{15} = 0{,}90$.
Die Fahrkarte war also um 10% günstiger.

Seite 185

1

a) f ist streng monoton zunehmend in $[1{,}5; +\infty[$ und streng monoton abnehmend $]-\infty; 1{,}5]$.

b) G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty; 0]$ und in $[1; +\infty[$ und rechtsgekrümmt in $[0; 1]$.

2

$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x - 2$,
$f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$, $f''(x) = 6x - 3$

a) $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-18)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm 15}{6} \Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

		-2		3	
$f'(x)$:	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0
G_f:	↗	H	↘	T	↗

f ist streng monoton zunehmend in $]-\infty; -2]$ und in $[3; +\infty[$.
f ist streng monoton abnehmend in $[-2; 3]$.
$f(-2) = 20 \Rightarrow H(-2|20)$ und $f(3) = -42{,}5 \Rightarrow T(3|-42{,}5)$

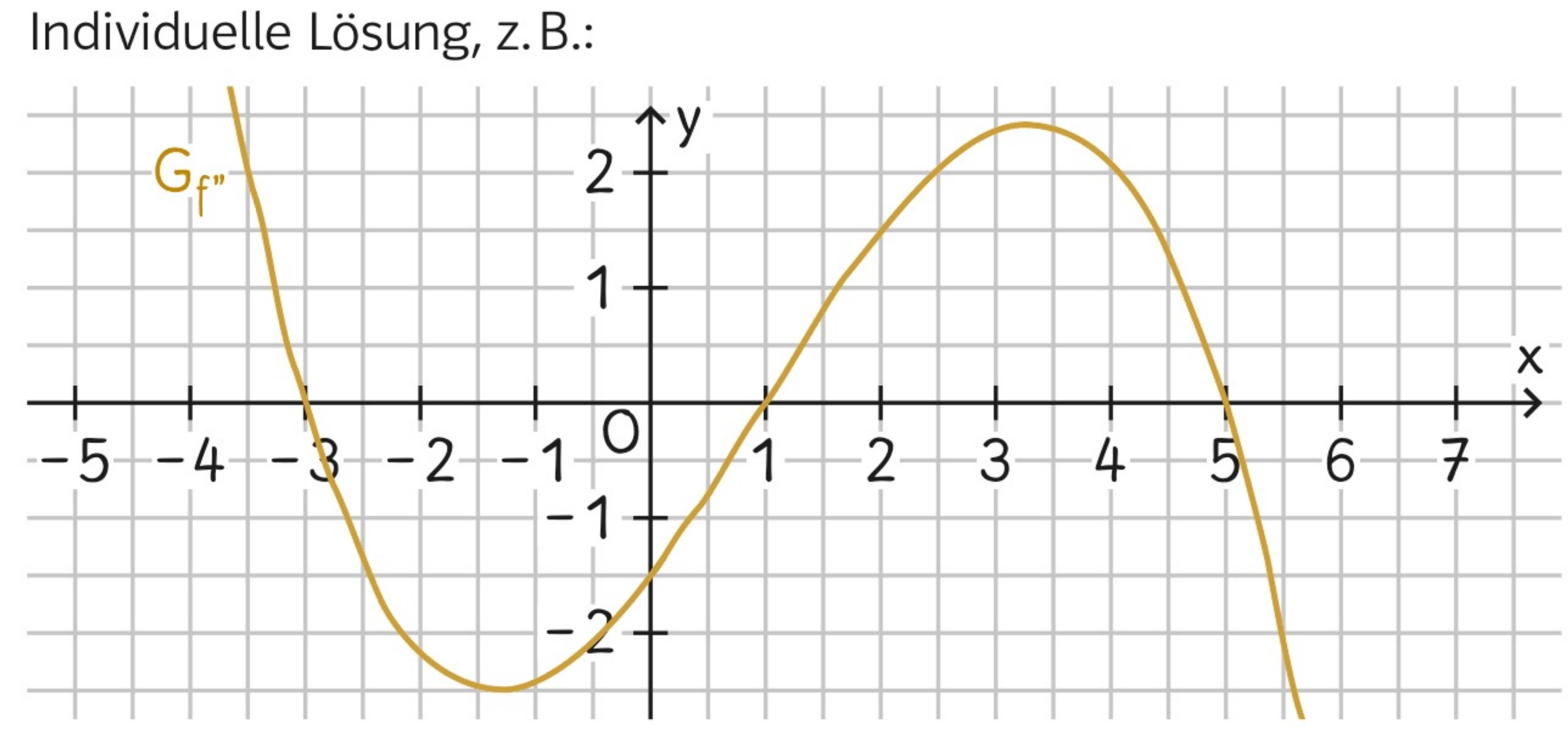
b) $f''(x) = 0 \iff 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = 0{,}5$
G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; 0{,}5]$, da $f''(x) < 0$ für $x < 0{,}5$ ist.
G_f ist linksgekrümmt in $[0{,}5; +\infty[$, da $f''(x) > 0$ für $x > 0{,}5$ ist.

3

Individuelle Lösung, z. B.: $f(x) = (x - 2)^3 + 1$.

4

Individuelle Lösung, z. B.:



5

a) Da die Ableitung f′ an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_3 = 2$ jeweils eine Nullstelle mit VZW von − nach + besitzt, hat die Funktion f die Minimumstellen $x_1 = -3$ und $x_3 = 2$.
Da die Ableitung f′ an der Stelle $x_2 = 1$ eine Nullstelle mit VZW von + nach − besitzt, hat die Funktion f die Maximumstelle $x_2 = 1$.

b) f hat die Wendestellen $x = -1{,}5$ und $x = 1{,}5$.
Da die Ableitung f′ für $x < -1{,}5$ streng monoton zunimmt, für $-1{,}5 < x < 1{,}5$ streng monoton abnimmt und für $x > 1{,}5$ streng monoton zunimmt, ist der Graph in $]-\infty; -1{,}5]$ und in $[1{,}5; +\infty[$ linksgekrümmt.

c) Da $f'(x)$ in $[-2{,}5; 0]$ positiv ist, nimmt f in diesem Bereich streng monoton zu. Somit gilt $-1 > -2 \Rightarrow f(-1) > f(-2)$.

6

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2,\ f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x,\ f''(x) = x^2 - 4,\ f'''(x) = 2x$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = 2$

$f'''(-2) = -4 \neq 0$ und $f(-2) = -\frac{20}{3} \Rightarrow W_1\left(-2\,\middle|\,-\frac{20}{3}\right)$

$f'''(2) = 4 \neq 0$ und $f(2) = -\frac{20}{3} \Rightarrow W_2\left(2\,\middle|\,-\frac{20}{3}\right)$

Wendetangenten:

$m_1 = f'(-2) = \frac{16}{3}$ und W_1 in $y = m \cdot x + t$ einsetzen:

$\Rightarrow -\frac{20}{3} = \frac{16}{3} \cdot (-2) + t \Leftrightarrow -\frac{20}{3} = -\frac{32}{3} + t \Rightarrow t = \frac{12}{3} = 4$

Tangente 1: $y = \frac{16}{3}x + 4$.

$m_2 = f'(2) = -\frac{16}{3}$ und W_2 in $y = m \cdot x + t$ einsetzen:

$\Rightarrow -\frac{20}{3} = -\frac{16}{3} \cdot 2 + t \Leftrightarrow -\frac{20}{3} = -\frac{32}{3} + t \Rightarrow t = \frac{12}{3} = 4$

Tangente 2: $y = -\frac{16}{3}x + 4$,

Beide Tangenten schneiden die y-Achse in $S(0|4)$. Somit ist S der Schnittpunkt der Wendetangenten.

7

a) Da $f'(x_0) = 0$ nur die notwendige, nicht aber die hinreichende Bedingung für eine lokale Extremstelle von f ist, ist die Aussage falsch. An der Stelle x_0 kann der Graph von f auch einen Terrassenpunkt haben.

b) Die Aussage ist wahr, da $f'(x_0) = 0$ die notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle von f ist.

c) Da $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ eine hinreichende Bedingung für eine Minimumstelle von f ist, ist die Aussage falsch.

d) Die Aussage ist wahr, da $f''(x_0) = 0$ mit VZW von f″ an der Stelle x_0 eine hinreichende Bedingung für eine Wendestelle von f ist. Somit ändert der Graph von f an der Stelle x_0 sein Krümmungsverhalten und x_0 ist eine Extremstelle von f′.

e) Die Aussage ist falsch, da beispielsweise die Funktion f mit $f(x) = -x^2$ nur die Maximumstelle $x_0 = 0$ hat. Aber es gilt $f'(x) = -2x$ und $f''(x) = -2 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

8

$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2,\ f'(x) = 8x^3 + 21x^2 + 10x,$

$f''(x) = 24x^2 + 42x + 10$ und $f'''(x) = 48x + 42$

Symmetrie:

$f(-x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2$

$-f(x) = -2x^4 - 7x^3 - 5x^2$

Wegen $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ besitzt der Graph keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems.

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x^2 + 7x + 5) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ (doppelt)

$2x^2 + 7x + 5 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 3}{4},\ x_2 = -2{,}5$ und $x_3 = -1$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + 21x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(8x^2 + 21x + 10) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$

$8x^2 + 21x + 10 = 0 \Rightarrow x_{4,5} = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 8 \cdot 10}}{2 \cdot 8} = \frac{-21 \pm 11}{16},$

$x_4 = -2$ und $x_5 = -\frac{5}{8} = -0{,}625$

$f''(x_4) = 22 > 0,\ f(x_4) = -4 \Rightarrow T_1(-2|-4)$

$f''(x_1) = 10 > 0,\ f(x_1) = 0 \Rightarrow T_2(0|0)$

$f''(x_5) = -\frac{55}{8} = -6{,}875 < 0,\ f(x_1) = \frac{1125}{2048} \approx 0{,}5 \Rightarrow H(-0{,}625|0{,}5)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x^2 + 42x + 10 = 0$

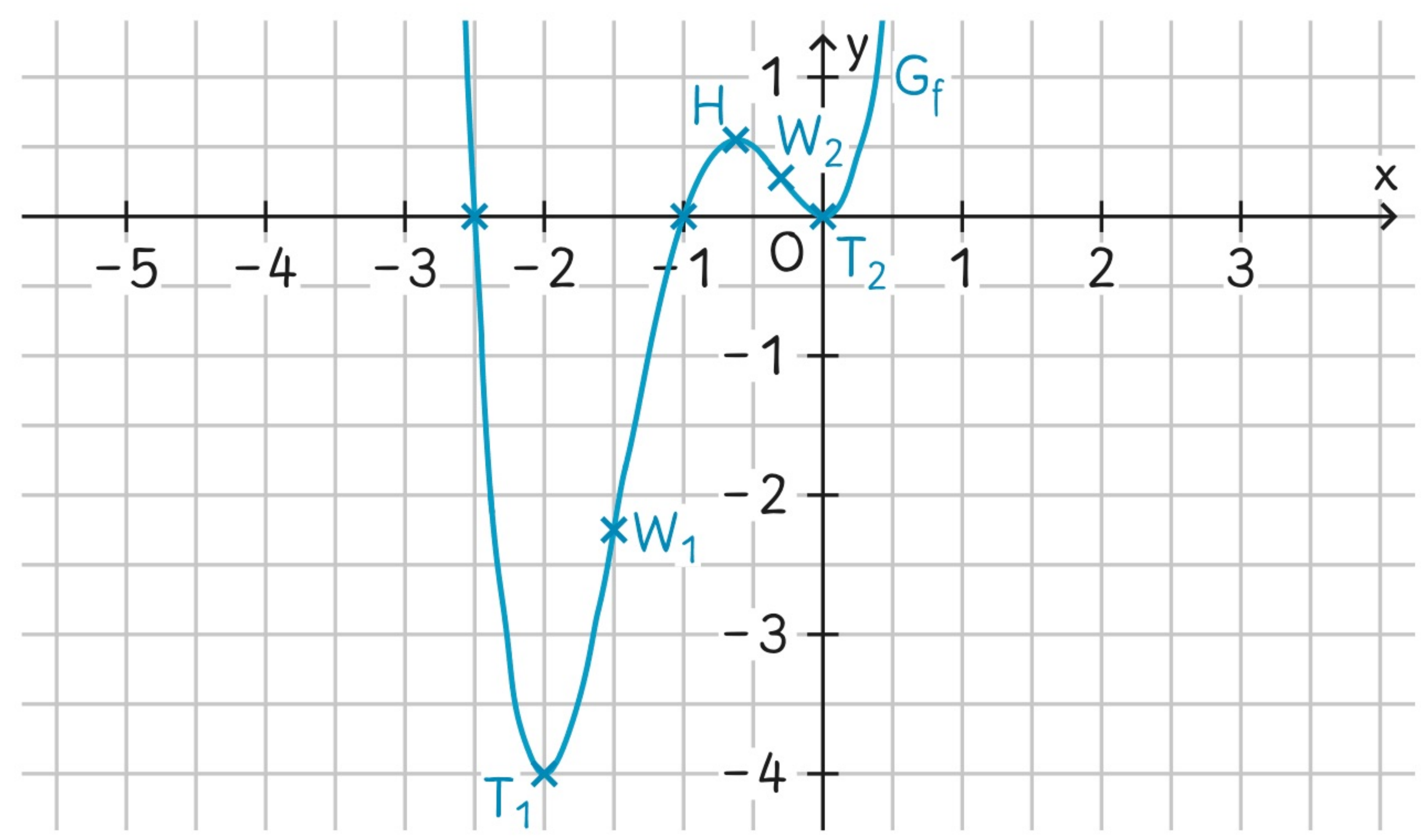
$\Rightarrow x_{6,7} = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 24 \cdot 10}}{2 \cdot 24} = \frac{-42 \pm \sqrt{804}}{48} = \frac{-42 \pm 2\sqrt{201}}{48} = \frac{-21 \pm \sqrt{201}}{24},$

$x_6 = \frac{-21 - \sqrt{201}}{24} \approx -1{,}5$ und $x_7 = \frac{-21 + \sqrt{201}}{24} \approx -0{,}3$

$f'''(x_6) \neq 0,\ f(x_6) \approx -2{,}1 \Rightarrow W_1(-1{,}5|-2{,}1)$

$f'''(x_7) \neq 0,\ f(x_7) \approx 0{,}3 \Rightarrow W_2(-0{,}3|0{,}3)$

Skizze:



9

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1,\ f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};\ x_0 = -4.$

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{6}x_n^3 + \frac{1}{2}x_n^2 + 1}{\frac{1}{2}x_n^2 + x_n}$

1. Schritt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -4 - \frac{\frac{1}{6}(-4)^3 + \frac{1}{2}(-4)^2 + 1}{\frac{1}{2}(-4)^2 + (-4)}$

$= -4 + \frac{5}{12} = -\frac{43}{12} = -3{,}58\overline{3}$

2. Schritt: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{43}{12} - \frac{\frac{1}{6}\left(-\frac{43}{12}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{43}{12}\right)^2 + 1}{\frac{1}{2}\left(-\frac{43}{12}\right)^2 + \left(-\frac{43}{12}\right)}$

$\approx -3{,}4957840337$

b) Es dürfen auf keinen Fall die beiden Extremstellen $x = -2$ und $x = 0$ als Startwert gewählt werden, denn dort ist der Wert der Ableitung null, und so würde sich mit der Iterationsvorschrift $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ im ersten Schritt des Newton-Verfahrens im Nenner jeweils der Wert null ergeben. Außerdem verläuft die Tangente an den Graphen in den beiden Extrempunkten waagerecht, also parallel zur x-Achse und würde diese deshalb niemals schneiden.

Check-in

Seite 190

Check-in zu Kapitel I

1

a) Ansatz: $f(x) = mx + t$.

(I) $-2m + t = 3 \Rightarrow t = 3 + 2m$

(II) $4m + t = -1$

(I) in (II) einsetzen: $4m + 3 + 2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$.

$m = -\frac{2}{3}$ in (I) einsetzen: $t = 3 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$, also $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

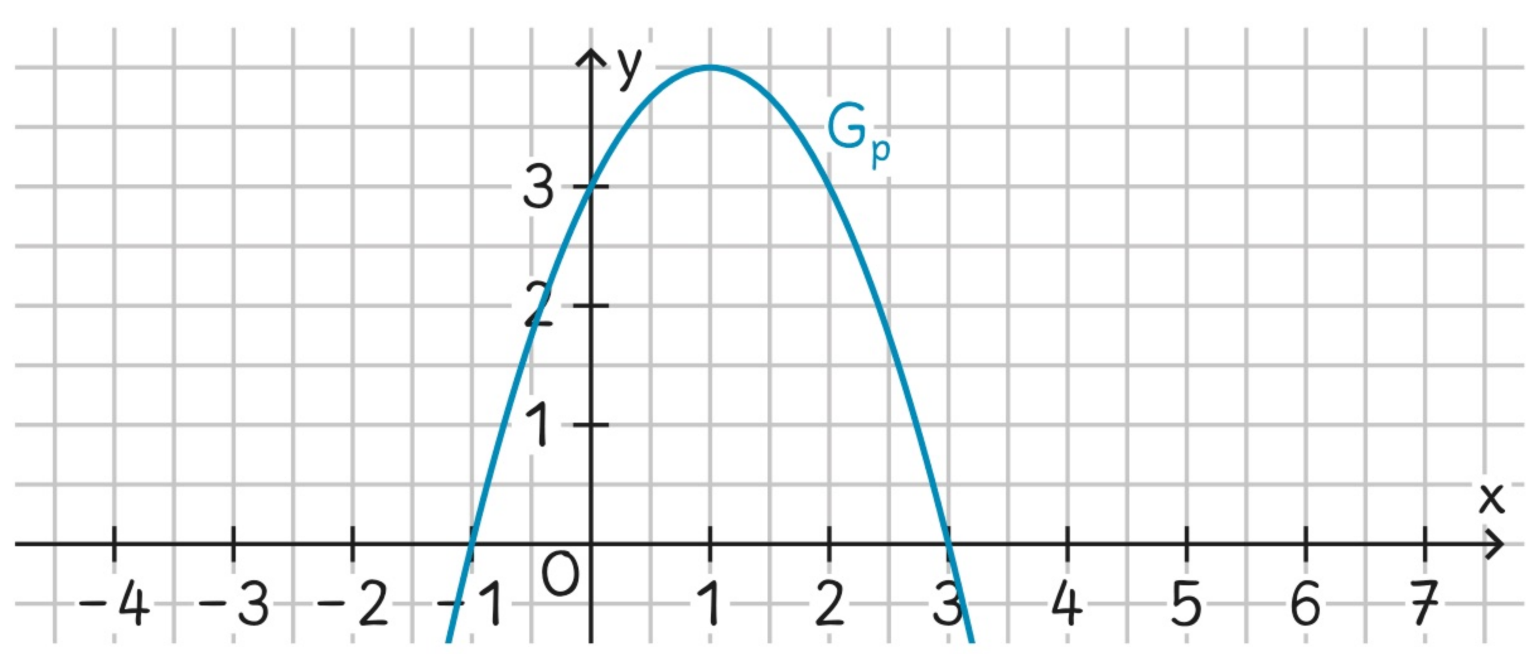
Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

b) $p(0) = 3 \Rightarrow S_y(0|3)$

$p(x) = 0$

$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = 1 \mp 2$

$\Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 3 \Rightarrow S_{x_1}(-1|0)$ und $S_{x_2}(3|0)$



G_p steigt im Intervall $]-\infty; 1]$ und fällt im Intervall $[1; +\infty[$.

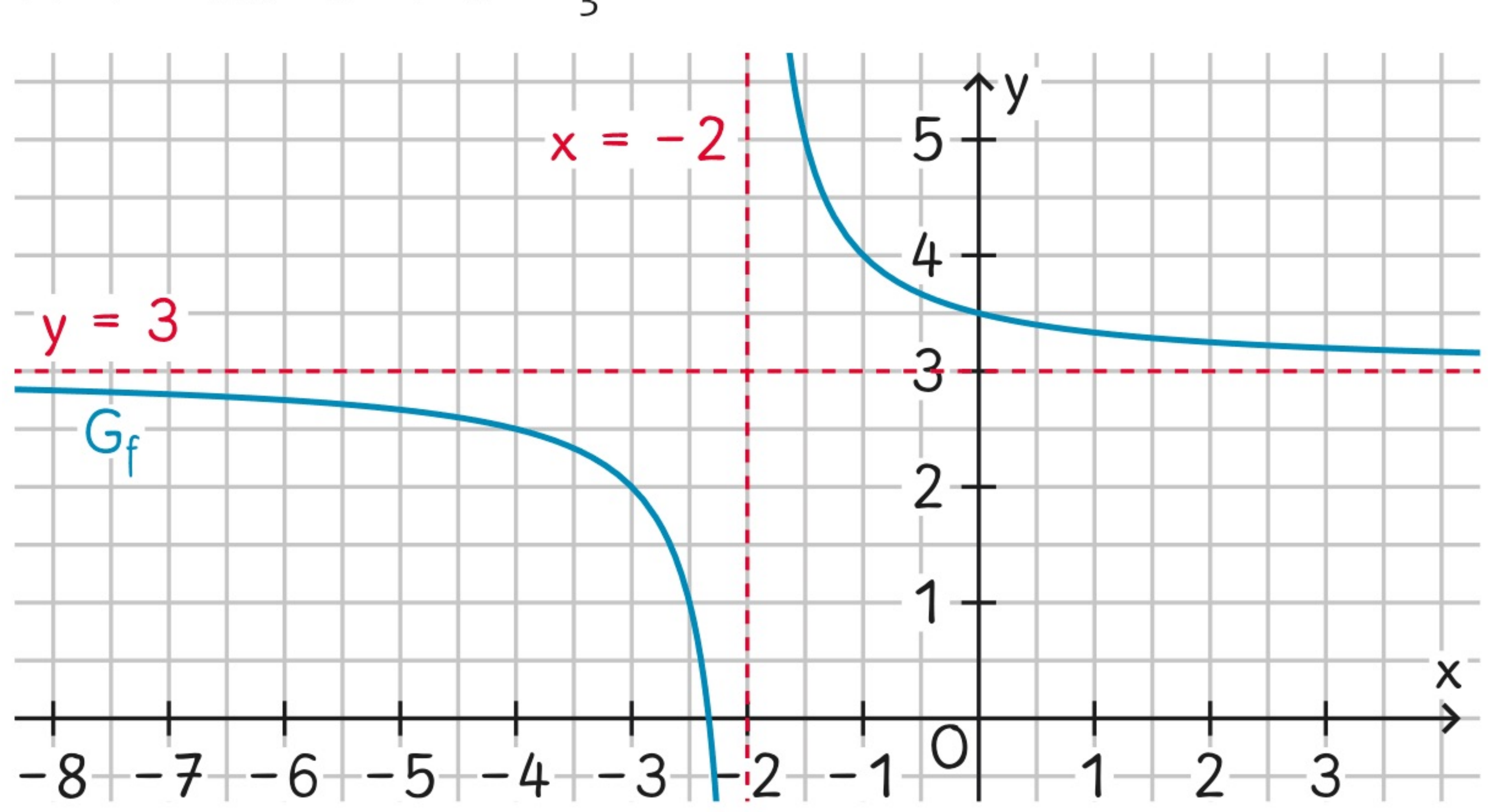
2

a) Gleichungen der Asymptoten:

$x = -2$, $y = 3$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = -3 \Leftrightarrow 1 = -3(x+2)$

$\Leftrightarrow 1 = -3x - 6 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$



3

Wenn n gerade ist, dann ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, steigt im Intervall $]-\infty; 0]$ und fällt im Intervall $[0; +\infty[$.
Wenn n ungerade ist, dann ist der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung und fällt in $\mathbb{R}$.

4

a) $f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0|0)$

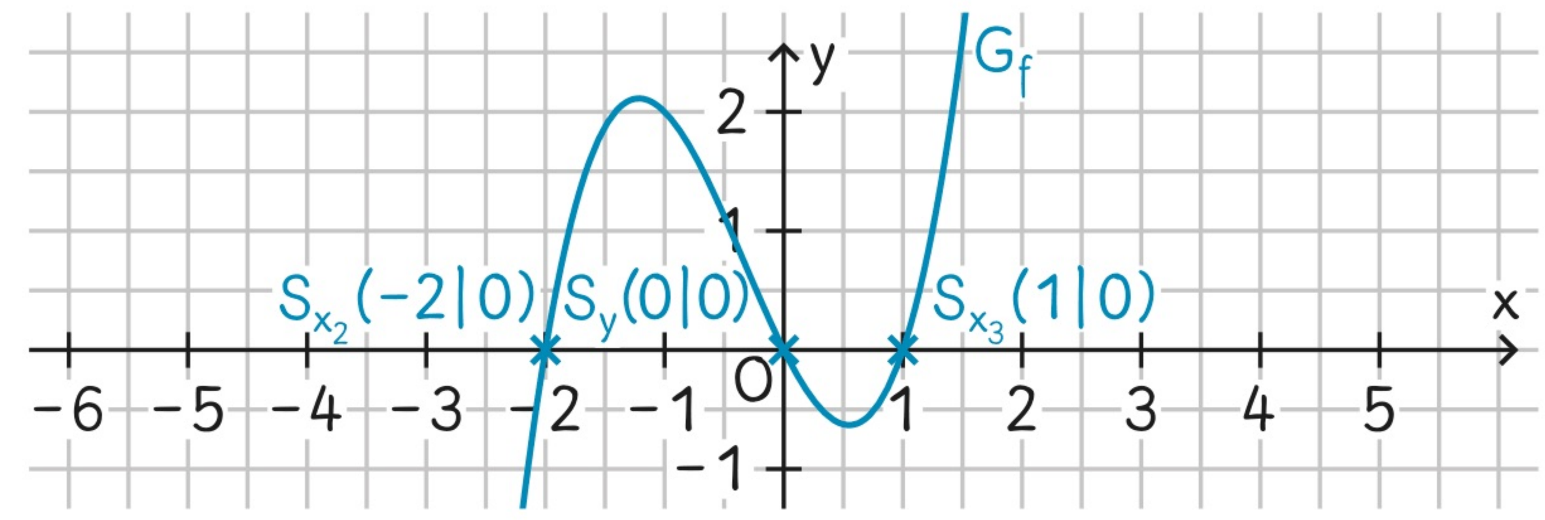
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2 + x - 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $x^2 + x - 2 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\Rightarrow x_2 = -2$ und $x_3 = 1$

$S_{x_2}(-2|0)$ und $S_{x_3}(1|0)$

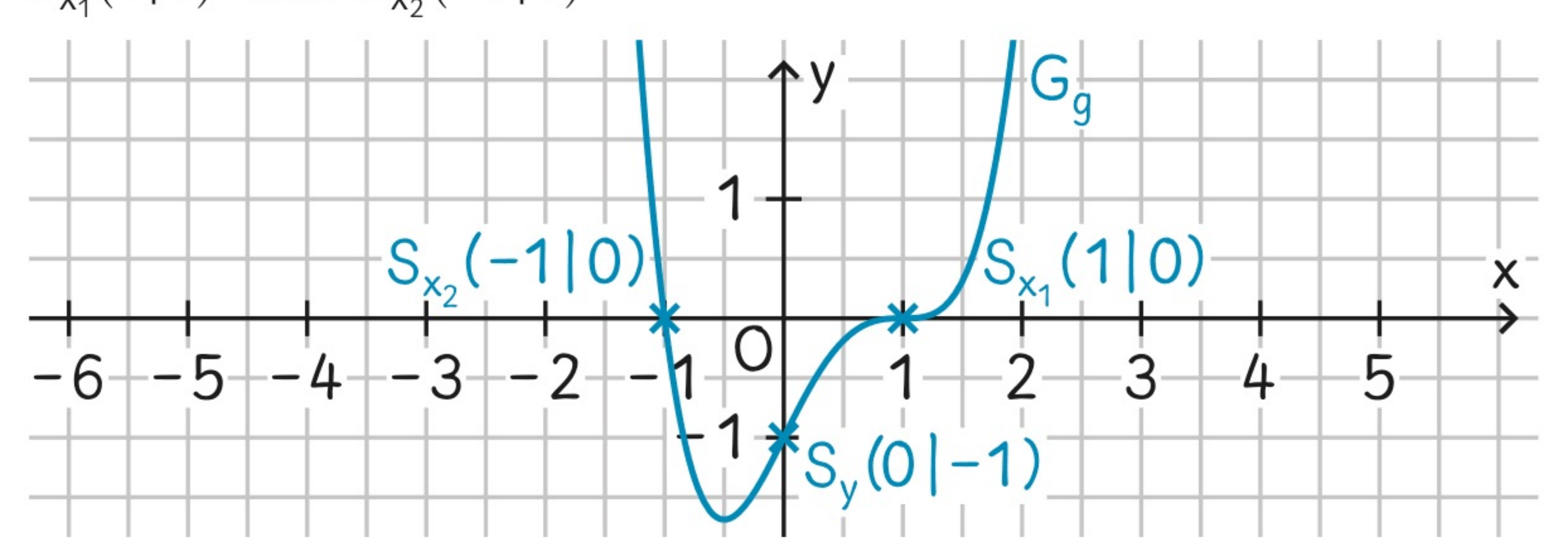


b) $g(0) = -1 \Rightarrow S_y(0|-1)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x^2-1) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ oder $x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$ (dreifache Nullstelle) und $x_2 = -1$

$S_{x_1}(1|0)$ und $S_{x_2}(-1|0)$



5

f: $f(0) = 1 \Leftrightarrow b\cdot a^0 = 1 \Leftrightarrow b = 1$; $f(1) = 3 \Leftrightarrow 1\cdot a^1 = 3 \Leftrightarrow a = 3$, also $f(x) = 3^x$

g: (I) $g(2) = 1 \Leftrightarrow b\cdot a^2 = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{a^2}$

(II) $g(3) = 2 \Leftrightarrow b\cdot a^3 = 2$

(I) in (II) einsetzen: $\frac{1}{a^2}\cdot a^3 = 2 \Leftrightarrow a = 2$

$a = 2$ in (I) einsetzen: $b = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, also $g(x) = \frac{1}{4}\cdot 2^x$

h: $h(0) = 2 \Leftrightarrow b\cdot a^0 = 2 \Leftrightarrow b = 2$

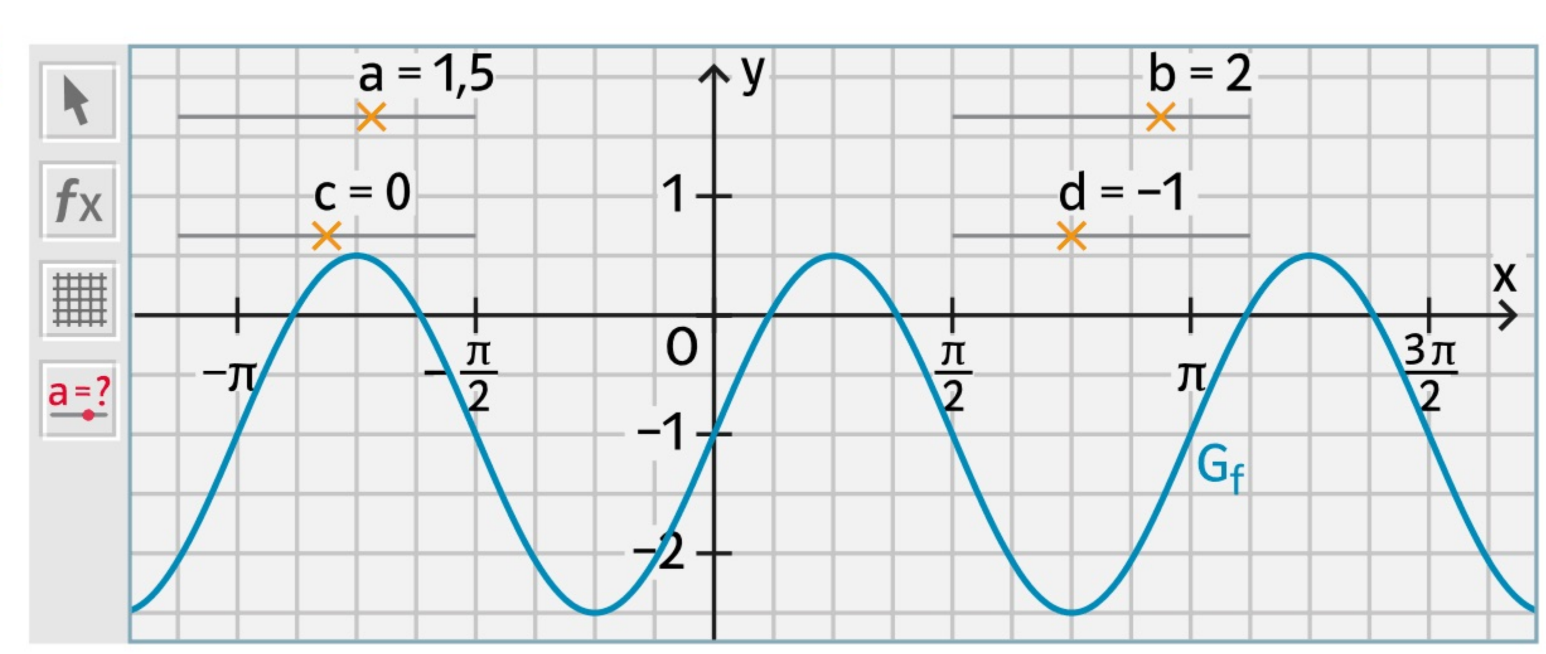
$h(1) = 1 \Leftrightarrow 2\cdot a^1 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$, also $g(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

i: $i(0) = 3 \Leftrightarrow b\cdot a^0 = 3 \Leftrightarrow b = 3$

$i(1) = 2 \Leftrightarrow 3\cdot a^1 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$, also $g(x) = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x$

6

a)



b) Bei Betätigung des Schiebereglers
für a wird der Graph in y-Richtung gestreckt,
für b wird der Graph in x-Richtung gestreckt,
für c wird der Graph in x-Richtung verschoben,
für d wird der Graph in y-Richtung verschoben.

Seite 191

Check-in zu Kapitel II

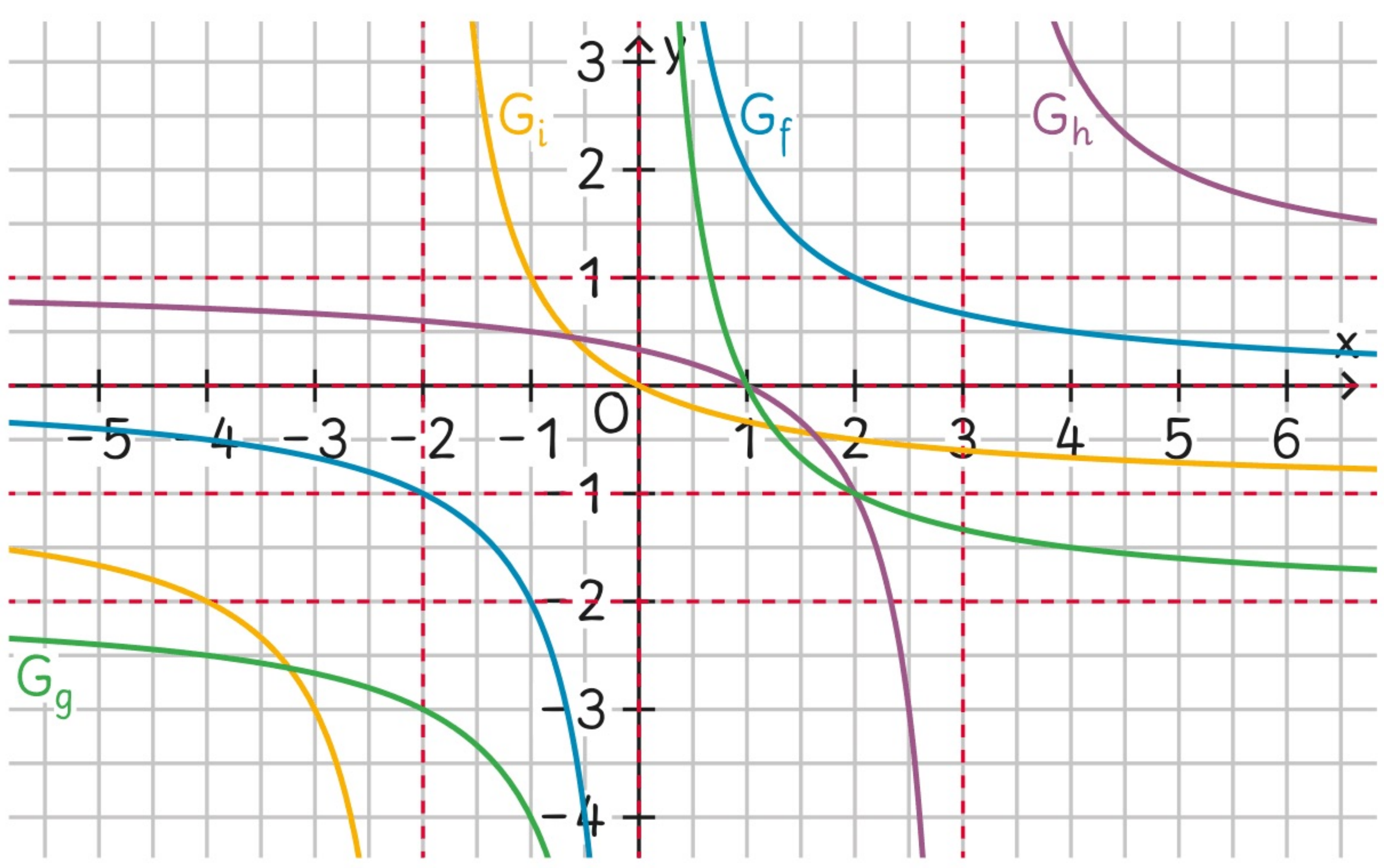
1

a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $D_h = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ und $D_i = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Gleichungen der Asymptoten des Graphen der Funktion f:
$y = 0$ und $x = 0$.
Gleichungen der Asymptoten des Graphen der Funktion g:
$y = -2$ und $x = 0$.
Gleichungen der Asymptoten des Graphen der Funktion h:
$y = 1$ und $x = 3$.
Gleichungen der Asymptoten des Graphen der Funktion i:
$y = -1$ und $x = -2$.

c) $f(1) = 2$, $g(1) = 0$, $h(4) = 3$ und $i(-1) = 1$

d) Skizze:



2

a) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$ Diskriminante: $D = 25 - 4\cdot1\cdot6 = 1 > 0$
$\Rightarrow$ f hat zwei Nullstellen.
$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2\cdot1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = 3$

b) $2x^2 - 16x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$
$\Rightarrow$ Diskriminante: $D = 64 - 4\cdot1\cdot16 = 0$
$\Rightarrow$ f hat genau eine Nullstelle.
$\Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2\cdot1} = 4$

c) $0{,}5x^2 - 2x + 3{,}5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$
$\Rightarrow$ Diskriminante: $D = 16 - 4\cdot1\cdot7 = -12 < 0$
$\Rightarrow$ f hat keine Nullstellen.

d) $4x^2 - 12x + 28 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 7 = 0$
$\Rightarrow$ Diskriminante: $D = 9 - 4\cdot1\cdot7 = -19 < 0$
$\Rightarrow$ f hat keine Nullstellen.

e) Der Graph G_f geht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 3,5 nach rechts hervor. Daher hat f die einzige (doppelte) Nullstelle $x = 3{,}5$.

f) Da f eine quadratische Funktion ist und im Funktionsterm keine Konstante enthalten ist, gibt es zwei Nullstellen:
$12x^2 - 4x = 4x(3x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{1}{3}$.

g) Der Graph G_f geht aus der Normalparabel durch Streckung und Verschiebung jeweils in y-Richtung hervor. Daher hat f zwei Nullstellen: $4x^2 - 56 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 14 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{14}$ und $x_2 = \sqrt{14}$.

h) Der Graph G_f geht aus der Normalparabel durch Verschiebung nach rechts und durch Verschiebung nach oben hervor. Daher hat f keine Nullstellen.

3

$\frac{2}{x-4} = x + 2$
$\Leftrightarrow 2 = (x + 2)(x - 4)$
$\Leftrightarrow 2 = x^2 - 2x - 8$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 10 = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1} = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{2} = 1 \pm \sqrt{11}$
$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{11} \approx 4{,}3$ und $x_2 = 1 - \sqrt{11} \approx -2{,}3$
$\Rightarrow g(1 + \sqrt{11}) = 3 + \sqrt{11} \approx 6{,}3$ und $g(1 - \sqrt{11}) = 3 - \sqrt{11} \approx -0{,}3$
$\Rightarrow S_1(4{,}3\,|\,6{,}3)$ und $S_2(-2{,}3\,|\,-0{,}3)$

4

a) $\frac{3}{4+x} = \frac{8}{x}$
$\Leftrightarrow 3x = 32 + 8x$
$\Leftrightarrow 5x = -32$
$\Leftrightarrow x = -\frac{32}{5} = -6{,}4$
Die Lösung $x = -6{,}4$ ist zugleich die x-Koordinate des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{3}{4+x}$ und $g(x) = \frac{8}{x}$.

b) $\frac{x-2}{2x+2} + 2 = 0$
$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2x+2} + \frac{2(2x+2)}{2x+2} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{x - 2 + 4x + 4}{2x+2} = 0$
$\Leftrightarrow 5x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} = -0{,}4$
Die Lösung $x = -0{,}4$ ist zugleich die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = \frac{x-2}{2x+2} + 2$.

5

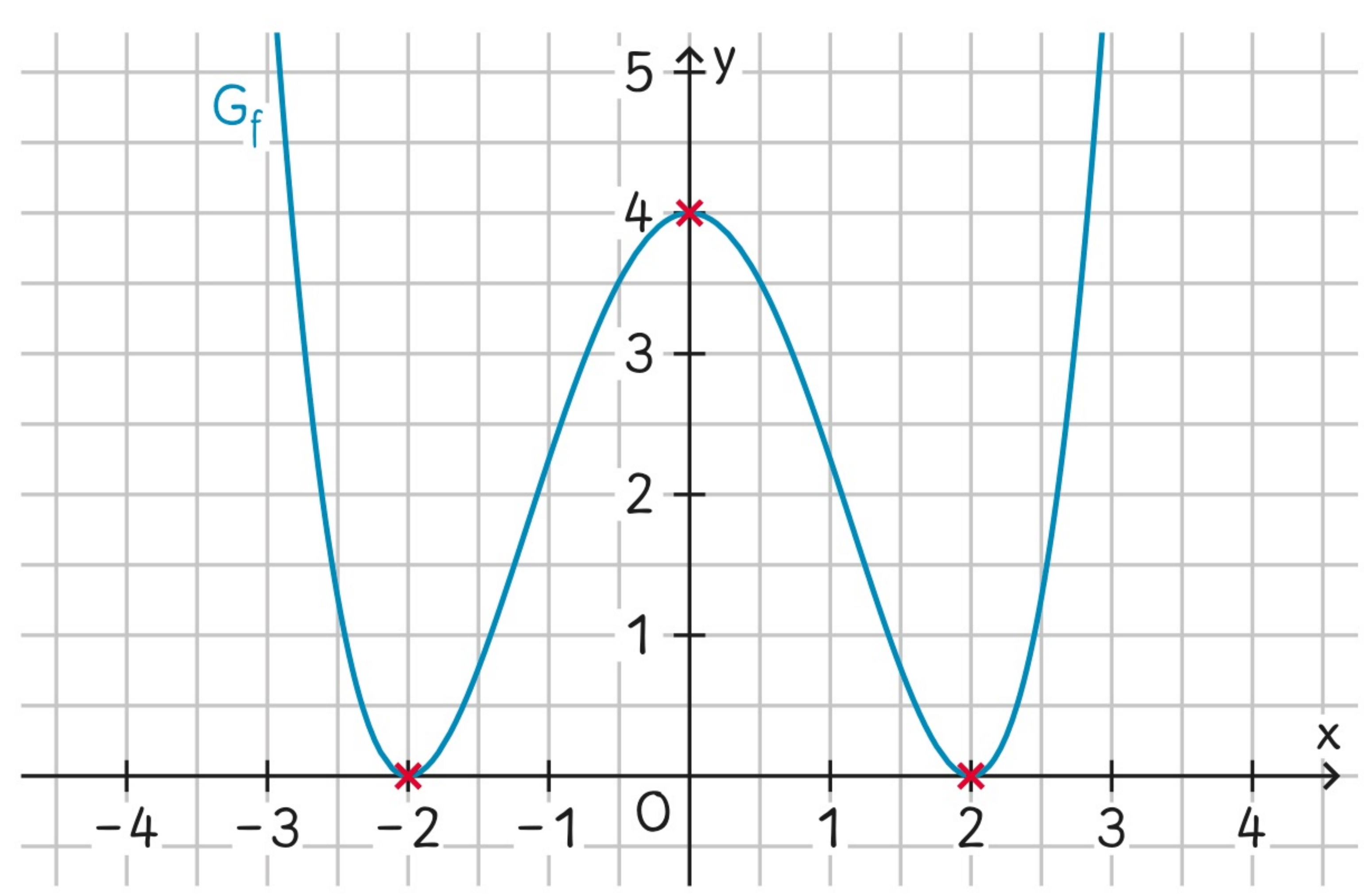
a) $f(-x) = 0{,}25(-x - 2)^2(-x + 2)^2 = 0{,}25(-(x + 2))^2(-(x - 2))^2$
$= 0{,}25(x + 2)^2(x - 2)^2 = 0{,}25(x - 2)^2(x + 2)^2 = f(x)$
$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}25(x - 2)^2(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ (doppelt) und $x_2 = -2$ (doppelt)

c) $f(0) = 4 \Rightarrow S_y(0\,|\,4)$

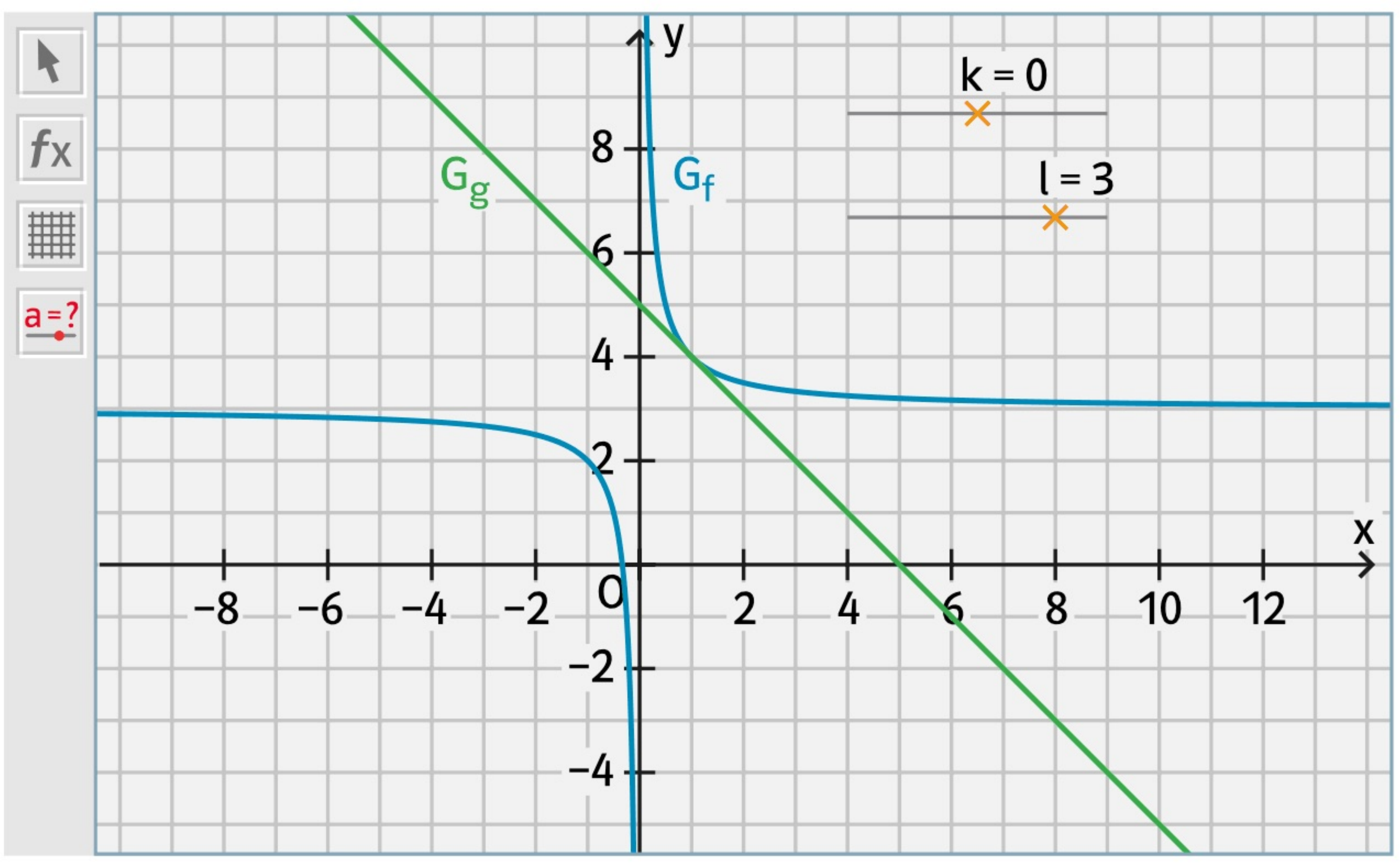
d) Multipliziert man den Funktionsterm aus, genügt es, den Summanden mit der Potenz, die den höchsten Exponenten hat, zu betrachten, also $0{,}25x^4$. An diesem erkennt man, dass der Graph „von links oben nach rechts oben" verläuft.

e) Skizze:



Wertemenge: $W = [0; \infty[$.

6



Individuelle Lösung, z. B.: (0; 3), (1; 2) und (2; 1).

Seite 192

Check-in zu Kapitel III

1

a) (1) $\frac{1}{4} + 0{,}2 + 40\,\% = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}85 = 85\,\% = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$

(2) $20\,\% \cdot 40\,\% = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08 = 8\,\% = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$

(3) $\frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}15} = \frac{0{,}25}{0{,}4} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\,\%$

(4) $1 - \frac{1}{4} \cdot 10\,\% \cdot 0{,}6 = 1 - \frac{1}{4} \cdot 6\,\% = 100\,\% - 1{,}5\,\% = 98{,}5\,\% = 0{,}985$

$= \frac{985}{1000} = \frac{197}{200}$

b) $12\,\%$ von $60\,\% = 12\,\% \cdot 60\,\% = 0{,}12 \cdot 0{,}6 = 0{,}072 = 7{,}2\,\%$

Die Apfelsaftschorle hat einen Zuckergehalt von 7,2 %.

c) Kosten für Björn:

$60\,€ \cdot (1 - 15\,\%) - 10\,€ = 60\,€ \cdot 0{,}85 - 10\,€ = 51\,€ - 10\,€ = 41\,€.$

Ersparnis in Prozent: $\frac{60\,€ - 41\,€}{60\,€} = \frac{19}{60} = 0{,}31\overline{6} = 31{,}\overline{6}\,\%.$

Björn spart etwa 31,7 %.

2

a) (1) $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; \ldots; 22; 23; 24; 25\}$

(2) $\Omega_2 = \{\text{schwarz; blau; rot}\}$

b) (1) $P(\{6; 12; 18; 24\}) = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\,\%$

(2) $P(\{1; 2; \ldots 8; 9\}) = \frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 36\,\%$

(3) $P(\text{„Nicht blau."}) = 1 - P(\text{„Blau."}) = 1 - P(\{10; 11; \ldots 18; 19\})$

$= 1 - \frac{10}{25} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\,\%$

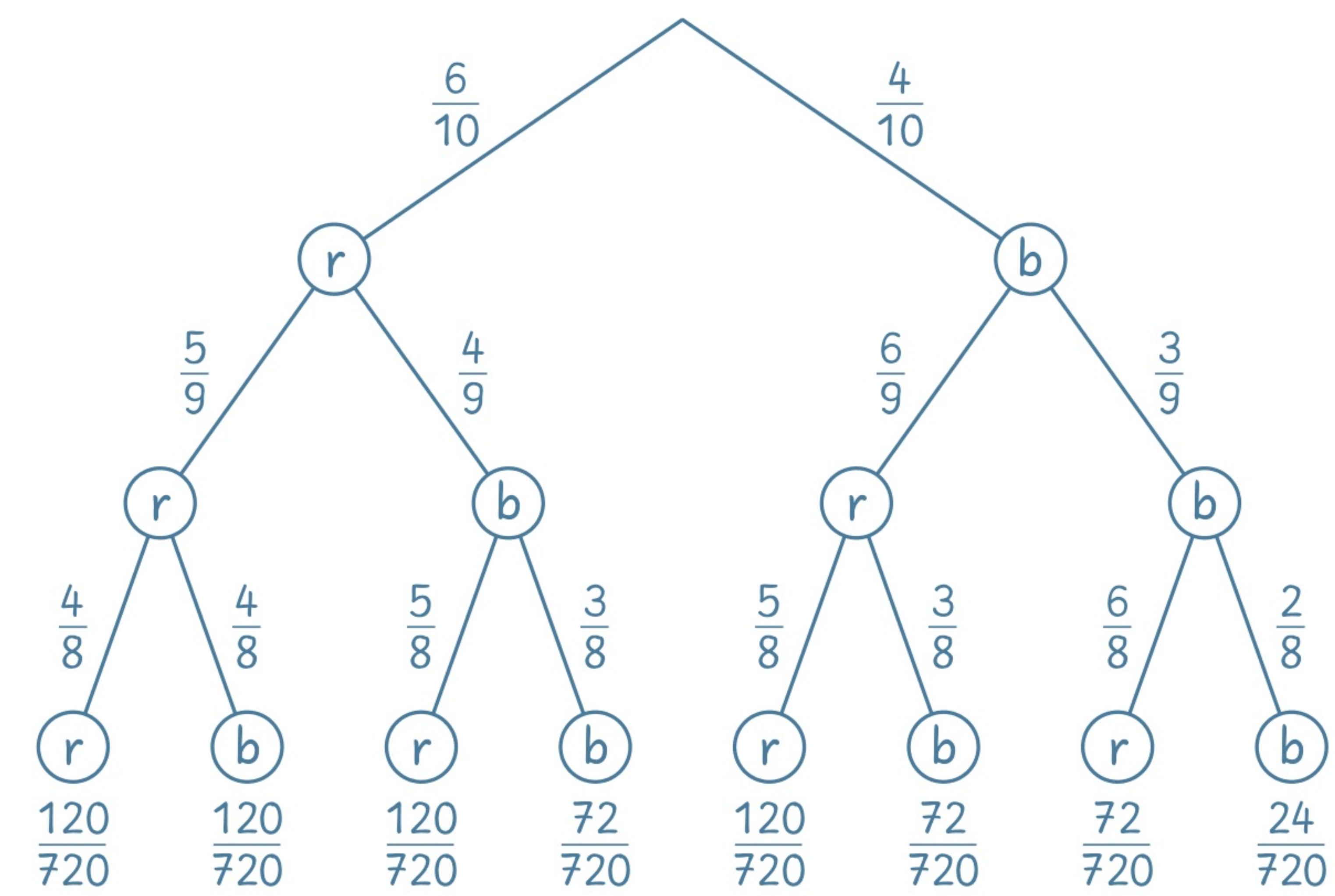
3

	S	$\overline{S}$	
F	**2**	**10**	12
$\overline{F}$	**6**	10	**16**
	8	**20**	28

a) $P(S \cap F) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14} \approx 7{,}1\,\%$

b) $P(S \cap \overline{F}) + P(\overline{S} \cap F) = \frac{6}{28} + \frac{10}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \approx 57{,}1\,\%$

4



a) $P(\text{„Genau eine blaue Kugel."}) = \frac{120}{720} + \frac{120}{720} + \frac{120}{720} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2} = 50\,\%$

b) $P(\text{„Mindestens eine rote Kugel."}) = 1 - P(\text{„Keine rote Kugel."})$

$= 1 - \frac{24}{720} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \approx 96{,}7\,\%$

Seite 193

Check-in zu Kapitel IV

1

a) $2(x - 3) - x(2 + x) - x^2 = 2x - 6 - 2x - x^2 - x^2 = -2x^2 - 6$

b) $-(x - 2)^2 - 2(x^2 - 3) = -(x^2 - 4x + 4) - 2x^2 + 6 = -3x^2 + 4x + 2$

c) $\frac{x^3 - 2x^2 + 5x}{x} - 5 + x = \frac{x(x^2 - 2x + 5)}{x} - 5 + x = x^2 - 2x + 5 - 5 + x$

$= x^2 - x$

d) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} - \frac{2x^2 - 8x}{x - 4} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - \frac{2x(x - 4)}{x - 4} = x + 3 - 2x = -x + 3$

2

a) Koordinaten der Punkte P und Q in $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ einsetzen:

$m = \frac{-5 - 3}{2 - (-1)} = -\frac{8}{3}.$

Koordinaten des Punktes P und $m = -\frac{8}{3}$ in $y = mx + t$

einsetzen: $3 = -\frac{8}{3} \cdot (-1) + t.$

$\Rightarrow\ t = \frac{1}{3}$ und $y = -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}.$

b) Koordinaten des Punktes A und $m = \frac{2}{3}$ in $y = mx + t$

einsetzen: $-1 = \frac{2}{3} \cdot 3 + t.$

$\Rightarrow\ t = -3$ und $y = \frac{2}{3}x - 3.$

c) Koordinaten des Punktes $P(-1\,|\,0)$ und $t = 3$ in $y = mx + t$

einsetzen: $0 = m \cdot (-1) + 3.$

$\Rightarrow\ m = 3$ und $y = 3x + 3.$

d) Aus $P(0\,|\,-1{,}5)$ ergibt sich $t = -1{,}5$. Zwei Geraden sind parallel, wenn sie dieselbe Steigung haben. Also muss $m = -2$ gelten und damit folgt $y = -2x - 1{,}5$.

3

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 3x}{2x^2 - 4} = \frac{3}{2}$ (da $z = n$)

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2} = 0$ (da $z < n$)

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\underbrace{x}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty}\right) = -\infty$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \left(\underbrace{\frac{1}{\underbrace{x - 3}_{\to 0^-}}}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\frac{x}{x + 2}}_{\to \frac{3}{5}}\right) = -\infty$

4

a) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ stetig, da kein Sprung im Graphen vorhanden ist. Sie ist unstetig an der Stelle $x = 1$, da der Graph dort einen Sprung macht, und sie ist stetig bei $x = 2$, da dort keine Sprungstelle vorliegt.

b) Damit keine Sprungstelle vorliegt, muss sich beim Einsetzen von $x = 2$ in den Funktionsterm für $x > 2$ ebenfalls $f(2) = 2^2 - 3 = 1$ ergeben: $a \cdot 2 + a = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

5

$m = \frac{200\,m}{450\,m} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\,\%$

$\tan\alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha \approx 24{,}0°$

Seite 194

Check-in zu Kapitel V

1

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^2 + 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_2 = -3$ und $x_3 = 1$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$ und $x_2 = \sqrt{3}$ oder

$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$ keine weitere Nullstelle

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 (x - 7)^3 = 0$

$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ oder

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$ oder

$(x - 7)^3 = 0 \Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x_3 = 7$

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}2x^4 - 0{,}4x^2 - 3 = 0$

Substitution: $x^2 = z$.

$0{,}2z^2 - 0{,}4z - 3 = 0$

$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{0{,}4 \pm \sqrt{0{,}4^2 - 4 \cdot 0{,}2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 0{,}2} = \frac{0{,}4 \pm 1{,}6}{0{,}4} \Rightarrow z_1 = -3$ und $z_2 = 5$

Rücksubstitution:

$x^2 = -3$: keine Lösung

$x^2 = 5 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5}$ und $x_2 = \sqrt{5}$

2

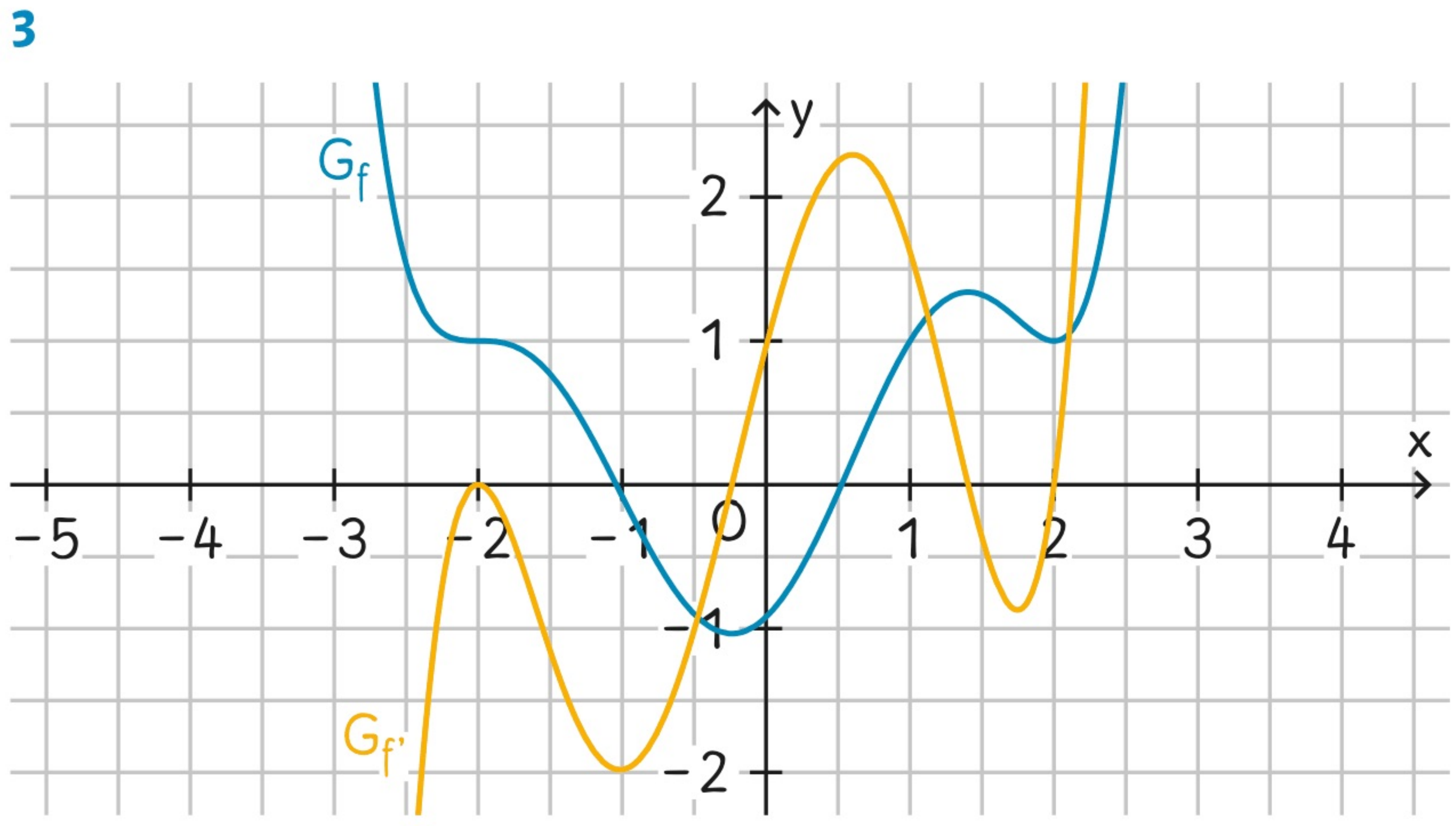
a) $f'(x) = 2x^2 - 6x + \frac{1}{4}$

b) $f(t) = (2t - 3)^2 = 4t^2 - 12t + 9,\; f'(t) = 8t - 12$

c) $f(x) = x^2(3 - 5x^2) = 3x^2 - 5x^4,\; f'(x) = 6x - 20x^3$

d) $f'(x) = -1{,}5ax^2 + 2ax - 3{,}5a$

3



4

Der Funktionsgraph A gehört zum Graphen der Ableitungsfunktion (2), da er bis $x \approx -1{,}2$ steigt, dann bis $x = 0$ fällt, bis $x \approx 0{,}6$ wieder steigt und dann fällt. Der Graph der Ableitungsfunktion verläuft bis $x \approx -1{,}2$ oberhalb der x-Achse, dann bis $x = 0$ unterhalb der x-Achse, bis $x \approx 0{,}6$ wieder oberhalb der x-Achse und dann unterhalb der x-Achse.

Der Funktionsgraph B steigt, wenn A fällt und umgekehrt. Er gehört somit zum Graphen der Ableitungsfunktion (1), da dieser oberhalb der x-Achse verläuft, wenn Graph (2) unterhalb verläuft und umgekehrt.

Der Funktionsgraph C entsteht aus A durch Verschiebung um −2 in y-Richtung und hat somit dasselbe Steigungsverhalten. Er gehört somit auch zum Graphen der Ableitungsfunktion (2).

5

a) $f'(x) = 0{,}5x$

$A(-4|5),\; B(0|1),\; C(2|2)$.

Ansatz für eine Tangente: $y = m \cdot x + t$.

Tangente an den Graphen von f in A:

$m = f'(-4) = -2$ und die Koordinaten von A in $y = m \cdot x + t$ einsetzen: $5 = -2 \cdot (-4) + t \Rightarrow t = -3$.

Gleichung der Tangente in A: $y = -2x - 3$.

Tangente an den Graphen von f in B:

$m = f'(0) = 0$ und die Koordinaten von B in $y = m \cdot x + t$ einsetzen: $1 = 0 \cdot 0 + t \Rightarrow t = 1$.

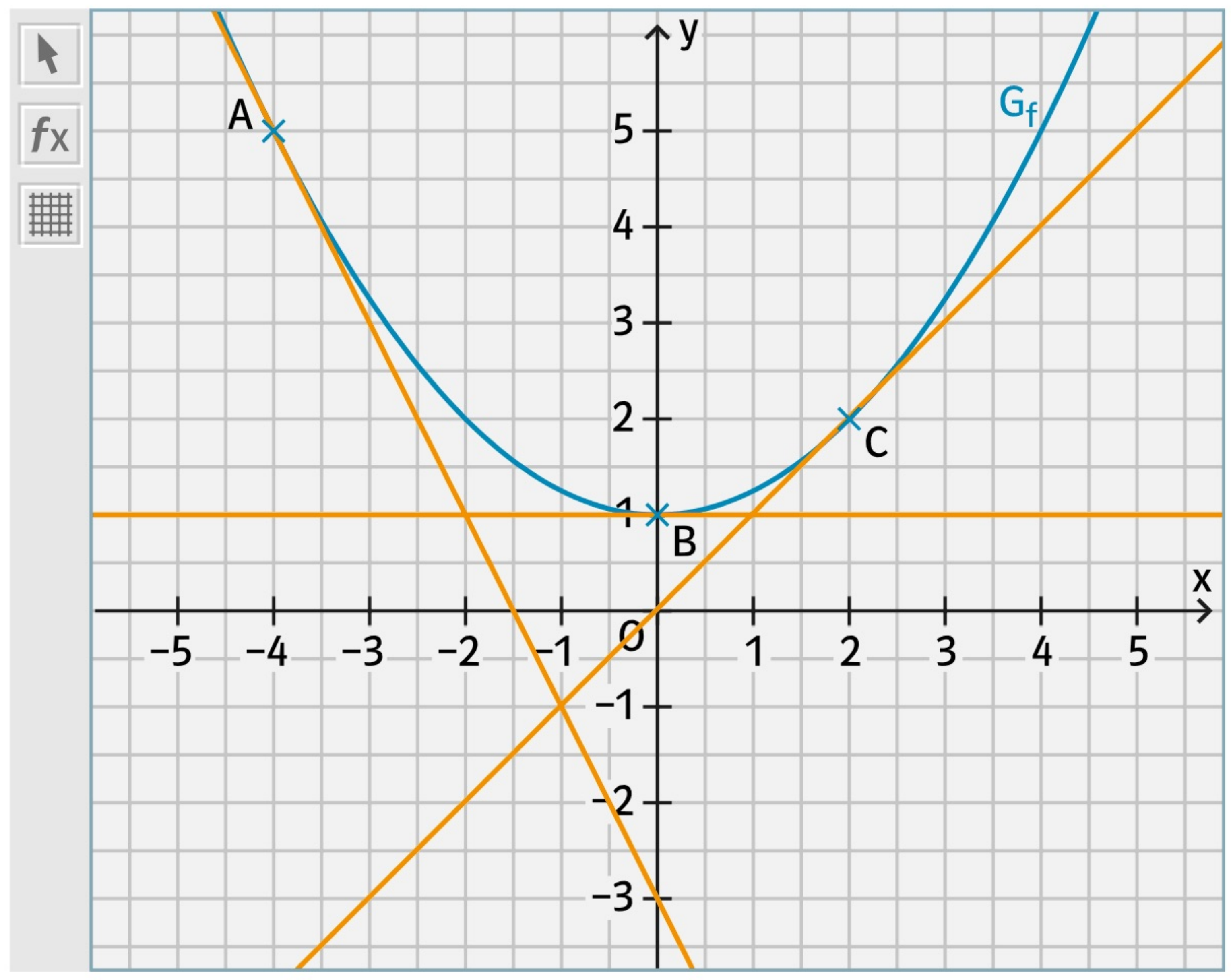
Gleichung der Tangente in B: $y = 1$.

Tangente an den Graphen von f in C:

$m = f'(2) = 1$ und die Koordinaten von C in $y = m \cdot x + t$ einsetzen: $2 = 1 \cdot 2 + t \Rightarrow t = 0$.

Gleichung der Tangente in C: $y = x$.

b)



Q

R

S

T

U

V

W

Z

Quellennachweis

Abbildungen: akg-images, Berlin, **137.1**; Alamy stock photo, Abingdon (Glasshouse Images/Alex MacLean), **3.1; 141.1**; Alamy stock photo, Abingdon (Science Photo Library/MARK GARLICK), **2.2; 39.1**; F1online digitale Bildagentur, Frankfurt (Score. by Aflo), **2.4; 99.1**; Getty Images Plus, München (iStock/coco194), **161.1**; Getty Images Plus, München (The Image Bank Unreleased/Onne van der Wal), **140.1**; Getty Images Plus, München (The Image Bank/Winfried Wisniewski), **182.1**; Getty Images, München (Bettmann), **136.1**; Getty Images, München (Getty Images Sport/Robbie Jay Barratt - AMA), **71.1**; Getty Images, München (Moment/John Hemmingsen), **U1.1**; Getty Images, München (Rubberball/Alan Bailey), **110.2**; Hungreder, Rudolf, Leinfelden-Echterdingen, **100.4; 101.4; 104.1; 106.2; 108.6; 110.1; 113.2; 117.1; 117.2; 117.3; 118.1; 119.1; 119.4; 119.5; 119.6; 119.7; 119.8; 119.9; 119.10; 119.11; 119.12; 119.13; 120.1; 121.2; 121.3; 121.4; 122.3; 125.1; 125.2; 125.3; 125.4; 125.6; 138.1; 138.2; 161.2; 161.3; 162.2**; Image Professionals, München (lookphotos/Zielske, H.& D.), **130.1**; Image Professionals, München (Science Photo Library/Arianespace/Service Optique Csg/ESA/CNES), **105.2**; IMAGO, Berlin (Aurora Photos/Cliff Leight), **38.1**; IMAGO, Berlin (Focus Images/Paul Chesterton), **92.1**; Interfoto, München (Science & Society/Science Museum Library), **135.1**; iStockphoto, Calgary, Alberta (StephanHoerold), **116.2**; laif, Köln (Benoit DECOUT/REA), **4.1**; laif, Köln (Xinhua/Polaris), **99.2**; Liese, Annette, Dortmund, **184.3**; Malz, Anja, Taunusstein, **46.2; 61.3; 78.1; 88.1; 116.1; 131.3; 133.3; 159.1; 173.3; 173.4; 173.5; 188.1; 188.3**; Mauritius Images, Mittenwald (The History Collection/Alamy), **137.2**; Oehler, Sandra, Remseck, **151.1; 156.2; 156.3; 156.4**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (Augenklick/Roth), **98.1**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (dpa/Oliver Weiken), **127.2**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (ZB/euroluftbild.de/Gerhard Launer), **151.2**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (Westend61), **61.1**; PIXTAL, New York NY, **135.2**; ShutterStock.com RF, New York (Alekcey), **U1.2**; ShutterStock.com RF, New York (Jag_cz), **133.1**; ShutterStock.com RF, New York (Nomad_Soul), **11.3**; ShutterStock.com RF, New York (RZ Design), **179.3**; stock.adobe.com, Dublin (Aleksandr), **105.3**; stock.adobe.com, Dublin (Biewer Jürgen), **169.1**; stock.adobe.com, Dublin (Christian Jung), **134.3**; stock.adobe.com, Dublin (Memed ÖZASLAN), **4.2**; stock.adobe.com, Dublin (Mike Brown), **125.5**; stock.adobe.com, Dublin (nito), **70.2**; stock.adobe.com, Dublin (peshkov), **95.2**; stock.adobe.com, Dublin (Peter Vogel), **163.2**; stock.adobe.com, Dublin (rochagneux), **2.1; 5.1**; stock.adobe.com, Dublin (ronstik), **95.1**; stock.adobe.com, Dublin (siraanamwong), **72.1**; stock.adobe.com, Dublin (tannujannu), **2.3; 70.1**; stock.adobe.com, Dublin (Wakhron), **107.2**; tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin, **6.1; 6.2; 6.3; 7.1; 7.2; 7.3; 7.4; 7.5; 8.1; 8.2; 8.3; 8.4; 8.5; 8.6; 8.7; 9.1; 9.2; 10.1; 11.1; 11.2; 12.2; 12.3; 12.4; 13.1; 13.2; 13.3; 13.4; 13.5; 13.6; 13.7; 13.8; 13.9; 14.1; 15.1; 16.1; 16.2; 17.3; 17.4; 17.5; 18.1; 18.2; 18.3; 18.4; 18.5; 18.6; 18.7; 19.1; 19.2; 20.1; 20.2; 20.3; 20.4; 20.5; 20.6; 21.1; 21.2; 22.1; 22.2; 22.3; 22.4; 22.5; 23.1; 23.2; 23.3; 23.4; 24.1; 24.2; 25.1; 25.2; 25.3; 26.1; 26.2; 26.3; 26.4; 26.5; 26.6; 26.7; 26.8; 26.9; 27.1; 27.2; 27.3; 27.4; 27.5; 28.1; 28.2; 28.3; 29.1; 29.2; 29.3; 29.4; 29.5; 29.6; 29.7; 32.1; 32.2; 32.3; 33.1; 33.2; 33.3; 33.4; 34.1; 34.2; 34.3; 34.4; 35.1; 35.2; 35.3; 36.1; 36.2; 36.3; 36.4; 36.5; 36.6; 36.7; 36.8; 37.1; 37.2; 37.3; 40.1; 40.2; 40.3; 43.1; 43.2; 43.3; 44.1; 46.1; 48.1; 48.2; 49.1; 49.2; 49.3; 49.4; 49.6; 52.1; 53.1; 54.1; 55.1; 56.1; 56.2; 57.1; 58.1; 58.2; 59.1; 59.2; 61.1; 61.2; 62.1; 63.1; 64.1; 64.2; 64.3; 64.4; 65.1; 65.2; 66.1; 67.1; 67.2; 67.3; 67.4; 68.1; 68.2; 68.3; 68.4; 68.5; 69.1; 69.2; 69.3; 72.3; 73.1; 73.3; 74.1; 75.1; 75.2; 75.3; 77.1; 78.2; 78.3; 78.4; 79.1; 79.2; 79.3; 79.4; 81.1; 81.2; 81.3; 81.4; 81.5; 82.1; 82.2; 85.1; 85.2; 85.3; 85.4; 86.1; 87.1; 87.2; 87.3; 87.4; 89.1; 90.1; 91.1; 91.2; 92.2; 93.1; 94.1; 96.1; 96.2; 96.3; 96.4; 97.1; 97.2; 100.1; 100.2; 100.3; 101.1; 101.2; 101.3; 102.1; 102.2; 102.3; 102.4; 102.5; 102.6; 102.11; 103.1; 103.2; 105.4; 106.3; 106.4; 106.5; 107.1; 107.3; 108.1; 108.2; 108.3; 108.4; 108.5; 108.7; 109.1; 110.3; 111.1; 111.2; 112.1; 112.2; 112.3; 112.4; 113.1; 113.3; 114.1; 114.2; 114.3; 114.4; 114.5; 115.1; 116.3; 116.4; 118.2; 118.3; 118.4; 118.5; 118.6; 118.7; 118.8; 118.9; 118.10; 118.11; 119.3; 121.1; 121.5; 122.1; 122.2; 124.1; 127.3; 128.1; 128.2; 130.2; 130.3; 132.1; 133.2; 134.1; 135.3; 138.3; 139.1; 139.2; 142.2; 142.3; 142.4; 142.5; 142.6; 143.1; 143.2; 143.3; 143.4; 143.5; 143.6; 143.7; 144.1; 144.2; 144.6; 144.7; 144.8; 145.1; 145.2; 145.3; 145.4; 145.5; 145.6; 145.7; 145.8; 145.9; 145.10; 146.1; 146.2; 147.1; 147.2; 147.3; 147.4; 147.5; 148.1; 148.2; 148.3; 148.4; 148.5; 149.1; 149.2; 149.3; 149.4; 149.5; 150.1; 150.2; 151.3; 152.1; 152.2; 153.3; 153.4; 153.6; 154.1; 154.2; 154.3; 154.4; 154.5; 155.1; 155.2; 155.3; 155.4; 156.1; 156.5; 157.1; 157.2; 157.3; 157.4; 157.5; 158.1; 158.2; 159.2; 159.3; 159.4; 160.1; 162.1; 162.3; 163.1; 163.3; 164.2; 165.1; 165.2; 165.3; 166.1; 168.1; 168.2; 168.3; 168.4; 168.5; 168.6; 171.1; 171.2; 171.3; 171.4; 171.5; 171.6; 172.1; 172.2; 172.3; 172.4; 172.5; 172.6; 172.7; 173.1; 173.2; 173.6; 173.7; 173.8; 174.1; 174.2; 174.3; 175.1; 175.2; 175.3; 175.4; 175.5; 176.1; 176.2; 176.3; 176.4; 177.1; 177.2; 177.3; 177.4; 177.5; 177.6; 177.7; 177.8; 177.9; 177.10; 177.11; 178.1; 178.2; 178.3; 179.1; 179.2; 180.1; 180.2; 182.2; 183.1; 183.2; 184.1; 184.2; 185.1; 185.2; 185.3; 186.1; 186.2; 187.1; 187.2; 188.2; 189.1; 189.2; 190.1; 193.1; 193.2; 194.1; 194.2; 194.3; 194.4; 194.5; 194.6; 196.1; 196.2; 196.3; 197.1; 197.2; 197.3; 198.1; 198.2; 198.3; 198.4; 199.1; 200.1; 200.2; 200.3; 201.4; 202.2; 203.1; 204.1; 204.2; 205.1; 205.2; 206.1; 206.2; 207.1; 207.2; 207.3; 208.1; 211.1; 213.1; 213.2; 214.2; 215.1; 215.2; 215.3; 215.4; 215.5; 215.6; 216.1; 216.2; 217.2; 218.1; 219.1; 219.2; 219.3; 219.4; 219.5; 219.6; 219.7; 220.1; 220.2; 220.3; 220.4; 220.5; 220.6; 220.7; 220.8; 221.1; 221.2; 222.1; 222.2; 222.3; 222.4; 222.5; 223.2; 224.1; 224.3; 225.1**; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, **4.3; 4.4; 12.1; 17.1; 17.2; 23.5; 49.5; 52.2; 72.2; 98.2; 102.7; 102.8; 102.9; 102.10; 105.1; 105.5; 106.1; 109.2; 109.3; 115.2; 115.3; 117.4; 119.2; 121.6; 123.1; 123.2; 127.1; 129.1; 131.1; 131.2; 131.4; 134.2; 136.2; 140.2; 142.1; 144.3; 144.4; 144.5; 153.2; 153.5; 160.2; 164.1; 167.1; 168.7; 181.1; 181.2; 181.3; 183.3; 197.4; 201.1; 201.2; 201.3; 201.5; 202.1; 214.1; 217.1; 223.1; 224.2; 226.1**; www.panthermedia.net, München (Kiefer), **153.1**;

Text: Abiturprüfung 2011 (Bayern), Analysis, Teil 1, Aufgabengruppe II, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/

mathematik/2011/, **51.1**; Abiturprüfung 2011 (Bayern), Stochastik, Aufgabengruppe I, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter:https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2011/, **77.1**; Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Teil 1, Aufgabengruppe II, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2012/, **41.1**; Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2014/, **177.1**; Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 2 a), b), c) und d), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2014/, **65.2**; Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 1 a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2014/, **69.1**; Abiturprüfung 2014 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1 a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2014/, **174.1**; Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 5, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2015/, **170.1**; Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 3 a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2015/, **64.1**; Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2015/, **178.1**; Abiturprüfung 2016 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2016/, **81.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **139.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **45.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **185.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 5, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **178.2**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **139.2**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1 a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **179.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 2 a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **180.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **76.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 1a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **89.1**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **87.1**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **60.1**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 1 a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **69.2**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **87.2**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **134.1; 136.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis,

Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 3 a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **129.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 3 a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **65.1**; Gottfried Wilhelm Leibniz nach: Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften unter: https://webarchive.bbaw.de/default/20201127135804/https://jahresthema.bbaw.de/2015_2016/objekt_des_monats/dezember-2016-leibniz-ueber-leibniz (Zugriff: 21.06.2022), **136.1**; Heinrich von Kleist (1777 - 1811), **70.1**; zitiert nach: https://www.forum-einstein.org/zitate.html (Zugriff: 22.08.22), **38.1**;

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

Mathematische Begriffe und Bezeichnungen

Funktionaler Zusammenhang und Zahlen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots -1; 0; 1 \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Menge der irrationale Zahlen
$\in$; $\notin$	ist Element von; ist nicht Element von
$T(x)$; $T(a; b)$	Term in Abhängigkeit von x; Term in Abhängigkeit von a und b
$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b
$a < b$	a kleiner b
$a > b$	a größer b
$a \leq b$	a kleiner b oder a gleich b
$a \geq b$	a größer b oder a gleich b
$a < b < c$	b liegt zwischen a und c.
$\lvert a \rvert$	Betrag der Zahl a
$[a; b]$	Abgeschlossenes Intervall; alle Zahlen x mit $a \leq x \leq b$
$]a; b[$	Offenes Intervall; alle Zahlen x mit $a < x < b$
$x \mapsto y$; $x \mapsto 2x$	x wird abgebildet auf y; x wird abgebildet auf 2x (Funktionsvorschrift).
$y = 0{,}5x^2 - 2$	Funktionsgleichung mit dem Funktionsterm $0{,}5x^2 - 2$
f	Bezeichner der Funktion
$f(x)$	Abkürzende Schreibweise für einen Funktionsterm
D_f	Definitionsmenge der Funktion f
W_f	Wertemenge der Funktion f
G_f	Graph der Funktion f
f'	Bezeichner der Ableitungsfunktion der Funktion f
$f'(x_0)$	Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0

Geometrie

$O(0 \mid 0)$	Koordinatenursprung
$P(x \mid y)$	Punkt P mit der ersten Koordinate x und der zweiten Koordinate y
PQ	Gerade durch die Punkte P und Q
$\overline{PQ}$	Strecke mit den Endpunkten P und Q
$\lvert\overline{PQ}\rvert$	Länge der Strecke mit den Endpunkten P und Q
[PQ	Halbgerade durch P und Q mit Anfangspunkt P
g; h; k …	Geraden, Halbgeraden
a; b; c …	Strecken, auch Länge der Strecken
w_α; $m_{\overline{AB}}$	Winkelhalbierende des Winkels α; Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$
h_a	Höhe, die senkrecht zur Seite a ist
$g \perp h$; $g \parallel h$	g ist senkrecht (orthogonal) zu h; g ist parallel zu h.
$k(M; r)$	Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r
$\sphericalangle(g, h)$	Winkel mit den Schenkeln g und h, wobei g der 1. Schenkel ist und h der 2. Schenkel.
$\sphericalangle ASB$	Winkel mit Scheitelpunkt S; A liegt auf dem 1. Schenkel und B auf dem 2. Schenkel.
$F \cong G$	Die Figuren F und G sind kongruent.
$F \sim G$	Die Figuren F und G sind ähnlich zueinander.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ω; A; B …	Ergebnismenge; Teilmenge einer Ergebnismenge; ein Ereignis
$A \subset \Omega$	A ist Teilmenge von Ω.
ω	Ergebnis
$\lvert A \rvert$	Anzahl der Ergebnisse des Ereignisses A
$\overline{A}$	Gegenereignis von A
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist

Lambacher Schweizer
Ein klares Konzept für differenziertes Lernen

Viele Aufgaben zum Üben, Vertiefen, Vernetzen
Zahlreiche Aufgaben für unterschiedliche Lernniveaus helfen beim Üben und Sichern des Lernstoffes.

Klare Struktur
Die Kapitel und Lerneinheiten sind immer nach demselben Prinzip gegliedert. Das hilft bei der Orientierung.

Testelemente zum selbstständigen Üben
Elemente wie *Test* in den Lerneinheiten und am Ende des Kapitels helfen, den Lernstoff zu festigen. *Grundwissen Test* hilft, früheren Lernstoff zu wiederholen.
Die dazugehörigen Lösungen am Ende des Buches bieten die Möglichkeit, sich selbst zu überprüfen.

ISBN 978-3-12-**735010**-4